2004 数論セミナー静岡 報告集 (2005), pp.1–91

円分型代数函数版 Bernoulli-Hurwitz 数と普遍 Bernoulli 数の理論

大西 良博 *

はじめに.

種数 g の代数曲線

(1) $$y^2 = x^{2g+1} - 1, \quad \text{または} \quad y^2 = x^{2g+1} - x$$

を考へる．これを C と呼ぶことにする．これらは自然に，無限遠に 1 点 ∞ を持つ非特異代数曲線であると考られる．いま ∞ で消えない C 上の正則微分形式の積分

(2) $$u = \int_\infty^x \frac{x^{g-1}dx}{2y}$$

を考へる．この積分は至るところ有限であり，∞ で 1 位の零点をもつ．それゆゑ，$u = 0$ の近傍でこれの逆函数 $u \mapsto x$ を考へることができる．たとへば，$g = 1$ のとき，すなはち C が楕円曲線のときは，この函数 $u \mapsto x$ を大域に自然に解析接続でき，それが楕円函数 $\wp(u)$ になる．

しかるに $g \geqq 2$ ではこれは大域に決して解析接続されないから，g 個の積分の組

(3) $$u_1 = \int_\infty^x \frac{dx}{2y}, \quad u_2 = \int_\infty^x \frac{xdx}{2y}, \quad \cdots, u_g = \int_\infty^x \frac{x^{g-1}dx}{2y}$$

を考へるべし；さらに右辺も g 個の点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$\cdots$，(x_g, y_g) までの積分の和に置きかへ，多変数函数として扱ふべし；といふのが Jacobi に始まる伝統的な Abel 函数の理論である．

一方, (1) の左側の曲線に関する上記積分 (2) で $g = 0$ の場合の $u \mapsto x$ は三角函数 $1/\sin^2(u)$ であり，整数論において，その重要性からして最高のもののひとつである Bernoulli 数 B_{2n} は，これの $u = 0$ における Laurent 展開の係数に他ならない：

(4) $$\frac{1}{\sin^2(u)} = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{2n} \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!}.$$

また，$g = 1$ の場合も，たとへば $y^2 = x^3 - x$ について全く同様に Hurwitz 数と呼ばれるやはり重要な数 E_{4n} が

(5) $$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n} E_{4n}}{4n} \frac{u^{4n-2}}{(4n-2)!}$$

* 岩手大学 人文社会科学部

で与へられる．

ところが，Bernoulli 数，Hurwitz 数を $g \geqq 2$ の場合に拡張しようとすると上記 Jacobi 流の多変数函数論的な考へでは立ち行かない．そこで筆者は素直に，(2) に戻つてみた．しからば驚いたことに，Bernoulli 数（と Hurwitz 数）についての最重要の定理，つまり von Staudt-Clausen の定理，von Staudt の第 2 定理，Kummer の合同式（とその類似 [**Hu1**]，[**Hu2**]，[**L**] など）が全く自然な形で成立することがわかつた（定理 6.1.1 ，定理 6.2.1，定理 7.1.1，定理 7.2.1）．

ここで，すこし現代的な説明をしよう．以後 $g \geqq 1$ とする．我々は，C の標準的な **普遍 Abel 被覆** $\kappa^{-1}\iota(C)$ を複素 g 次元線形空間 $\mathbf{C}^g$ のなかに，下図のやうに定義する．その正確な定義については第 4 節を見られたい．ここで，無限遠点 ∞ の $\mathbf{C}^g$ への引き戻しは積分 (3) による周期の全体がなす格子と一致し，それを $\Lambda \subset \mathbf{C}^g$ と書いてゐる．$\mathbf{C}^g/\Lambda$ は C の Jacobi 多様体 J に他ならない．

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\kappa^{-1}\iota(C)} & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & C \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \iota \\ \mathbf{C}^g & \overset{\kappa}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow} & \mathbf{C}^g/\Lambda = J \end{array}$$

種数 $g = 1$ のときは両側の埋め込みは全単射である．我々の設定では，原点 $\mathbf{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbf{C}^g = \{(u_1, u_2, \cdots, u_g)\}$ の近傍における，上記の $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上での自然な変数として，g 番目の座標 u_g を取ることができる．$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_g)$ が $\kappa^{-1}\iota(C)$ を動くとき，積分 (3) で定まる逆函数 $\boldsymbol{u} \mapsto x$ を $x(\boldsymbol{u})$ と書く．同時に $y(\boldsymbol{u})$ も定義される．さすれば，先に述べたことは，$\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数 $x(\boldsymbol{u})$ や $y(\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ における u_g に関する Laurent 展開の係数（**一般 Bernoulli-Hurwitz 数**）は $g \geqq 2$ であつても Bernoulli 数や Hurwitz 数と著しく類似した性質，とくに **von Staudt-Clausen 型の定理**，**von Staudt の第 2 定理の拡張**，**Kummer の original 型の合同式**を満たすといふことである．如何に類似がうまくいつてゐるかを実感できるやうに，この論文の最後に古典 Bernoulli 数，Hurwitz 数とこれらの新しい数について，多くの数値例を紹介しておいたので，参考にしていただきたい．

上記の各定理の証明に触れるため，**普遍 Bernoulli 数**[1] について述べなくてはならない．Bernoulli 数が $t \mapsto \log(1+t)$ を形式的対数とする形式群に付随してゐるやうに，普遍 Bernoulli 数といふのは，主に代数的位相幾何学で安定 homotopy を研究するのに利用される普遍形式群なるものに付随する数である．その名の通り普遍的な設定で定義されるものなので，これを特殊化することで，一般 Bernoulli-Hurwitz 数が得られる．従つて，荒くいへば，普遍 Bernoulli 数で成り立つことはすべて一般 Bernoulli-Hurwitz 数においても成り立つ．実際，普遍 Bernoulli 数について，von Staudt-Clausen 型定理と von Staudt の第 2 定理とをひとまとめにした美しい Clarke の定理（命題 2.3.1）は，一般 Bernoulli-Hurwitz 数のそれ（定理 6.1.1，6.2.1）を証明するのに不可欠であつた．

しかし，その他に，Carlitz が [**Ca1**] で導入した方法が必要である．Hurwitz 数の場合に伝統的に使はれてきた楕円函数の加法定理や倍公式の詳しい性質は，我々の種

[1]2003 年 7 月頃に，本論文の最初期のものを英訳中，Kummer 型の合同式の証明に gap があることが判明し，その証明を思索する間に，筆者は初めて，普遍 Bernoulli 数なるものが代数的位相幾何学で研究されてゐること，そしてこれに関するある種の Kummer 型合同式が Arnold Adelberg 氏によつて得られてゐることを知つたのであつた．

数が $g>1$ の場合には全く役に立たないやうに見える．なぜなら，我々は Jacobi 流の伝統を拒絶した所に居るからである．ところが，Carlitz は $g=1$ の場合に，楕円函数の加法や倍公式を極力避けた証明[2]を，完全ではないものの，見出してゐて，それが [**Ca1**] である．我々が，第 10 節と第 11 節で駆使してゐる彼の方法は，級数表示された函数の，異なる累乗の関係を巧みに操るもので，Lagrange inversion theorem に起源を持つものと思はれる[3]．しかし，n 乗した函数の因子（divisor）はもとの函数の因子の n 倍であり，それが Jacobi 多様体上の n 倍に他ならないから，その意味ではやはり n 倍公式を使つてゐるとも考へられる[4]．

一方，普遍 Bernoulli 数に対する Kummer 型の合同式（定理 3.1.1 ）も成り立つ．これは本論文の主結果のひとつであり，合同式の modulus に関して最良の評価を与へるもので，Adelberg 氏の結果を含む．これにはかつて未証明な補題がひとつ（本論文の命題 3.2.1（2））あつたのだが，2004 年の 2 月頃，安田正大氏がそれを証明した．彼はさらに，一般 Bernoulli-Hurwitz 数に対する Kummer 型合同式も完全に証明した．その証明は一般 Bernoulli-Hurwitz 数に付随する形式群（即ち，普遍 Bernoulli 数から一般 Bernoulli-Hurwitz 数への特殊化に伴ひ，普遍形式群の特殊化として得られる形式群）を扱ふことでなされた．結果として，普遍 Bernoulli 数についての Kummer 型合同式は，一般 Bernoulli-Hurwitz 数の Kummer 型合同式の形より弱いので，後者の合同式の証明にはほとんど役立てることができなかつた．従つて，一般 Bernoulli-Hurwitz にのみ興味のある読者は，第 3.1，3.2，3.4，3.5 の各節を読み飛ばすことができる．

これらの事実の証明を一般の場合に書くと，とても煩雑であるので，ここでは，定理については正確に述べ，証明については，主に種数 2 の超楕円曲線

$$y^2 = x^5 - 1$$

の場合に行ふ．また，17.1 節に記したやうなより一般の代数曲線の場合にもこれらの定理は成り立つ．この証明を読まれたならば，読者自身がその証明をより一般の場合に行ふのにそれほどの困難はないと信じる．さらに，本論文の結果は，曲線 C 自身の無限遠点での形式的完備化が p 進整数環上の形式群をなし，それが C の Jacobi 多様体 J の原点での形式的完備化の形式群としての因子となつてゐるやうな，より広い範疇の代数曲線に付随する代数函数についても成り立つやうに思はれる．また，我々の証明はもちろん Bernoulli 数や Hurwitz 数の場合にも通用し，それらに対する定理の新証明を与へてゐることにも注意されたい．

今回の試みは，かつて筆者が九州大学を訪れたときに小池正夫氏から受けた示唆と，すばらしい本 [**AIK**] から受けた多大な刺激がもとになつてゐる．関係の方々に御礼申し上げたい．また浅井哲也先生と松谷茂樹氏からはいくつかの comment をいただき，同時に励ましてもいただいた．補題 18.3.2 の証明は鈴木浩志氏に教へて頂いた．A. Adelberg 教授は第 1 節から第 3 節の旧版を読んで，筆者の誤りを正して下さつた．これら 3 つの節は，氏の助けに依るところが少なくない．以上，合せてお

[2] Carlitz も Hurwitz 数を超楕円曲線に一般化するべく，多くの試みをしたことが [**Ca1**], [**Ca4**] などから伺へる．しかし彼は，ここで述べたやうな試みをすることはなく，成功にいたらなかつた．それは当時まだ Jacobi 多様体の理論が未熟であつたためではないかと推察される．しかし，本論文の証明には，Jacobi 多様体の知識は一切不要である．発見するのには必要だつたが．

[3] これは 織田孝幸氏 の指摘による．また普遍 Bernoulli 数に対する Clarke の定理の証明でも，別の系統の Lagrange inversion theorem （命題 1.2.1）が使はれる．

[4] これは 松谷茂樹氏 の見解．

礼を申し上げたい．本論文は，Kummer 型の合同式がまだ予想だつた旧版に安田氏の証明を取り入れて，それを完全に書き直したものである．今回は筆者の個人的な思ひを述べた部分もあるので，一応，筆者の責任において公表するものの，読者には，安田氏との共著と考へていただきたい．

さらに，Hurwitz としし座流星群が大変深い関係にあることもわかつた[5]．いつか，すばらしいしし座流星群を見てみたいと強く思ふ．

[5]Hurwitz の論文 [**Hu2**] が出版された 1899 年に，しし座流星群の母彗星 Tempel-Tuttle（周期 33 年）が地球の軌道を通過してをり，Hurwitz の命日は 1919 年 11 月 18 日で，この日の前後にしし座流星群が見られる．今回の発見は 2002 年 11 月 19 日未明になされた．

目　次

記号についての約束.

(1) 有理数 α に対し, $\lfloor\alpha\rfloor$ は α を越えない最大の整数を表し, $\lceil\alpha\rceil$ は α より小さくない最小の整数を表す.

(2) 日本ではあまり馴染みがないが, 整数 $n \geqq 0$ に対し記法

$$(z)_n = z(z-1)\cdots(z-n+1)$$

を使ふ. ここで z をいかなる元とするかは状況による. また,

$$\binom{z}{n} = \frac{(z)_n}{n!}$$

は二項係数である.

(3) 階乗記号の一般化として $n!!$ は $n(n-2)(n-4)\cdots$ のやうに 2 づつ減らしながらの 1 または 2 までの積を意味する. 同様に $n!!!$ なども n から始めて 3 づつ減らしながらの積と定義する. さらに $n!!!!! = n!^{(5)}$ などと書くことにする. たとへば $12!^{(5)} = 12 \cdot 7 \cdot 2$.

(4) 素数 p に関し, 有理数 r の p 冪部分が p^e であるとき, $e = \mathrm{ord}_p r$ と書く. さらに, 有理数係数の多項式（多変数でもかまはない） τ について $\mathrm{ord}_p\tau$ はそのすべての係数 r に渡る $\mathrm{ord}_p r$ の最小値を意味するものとする.

(5) 自然数 a に対して $a|_p$ は a の 非 p 冪部分を表すとする. つまり $a|_p = a/p^{\mathrm{ord}_p a}$.

(6) 一般に, 変数 z に関する冪級数 $F(z)$ に対し, $[z^n]F(z)$ は $F(z)$ の z^n の係数を表すものとする. また, $[\frac{z^n}{n!}]\varphi(z) := n![z^n]\varphi(z)$ や $[\frac{z^n}{n}]\varphi(z) := n[z^n]\varphi(z)$ などの記法も使ふ.

(7) z の冪級数（負冪の項も許す） $\varphi(z)$ に対して $[\frac{z^n}{n!}]\varphi(z)$ （$n \geqq 0$）を $\varphi(z)$ の z に関する **Hurwitz 係数** といふ. また, $[\frac{z^n}{n}]\varphi(z)$ を **Carlitz 係数** とよぶことにする.

(8) 可換環 R に対し, 変数 z の非負冪項のみからなる冪級数で, Hurwitz 係数がすべて R に属するやうなもの全体がなす環を $R\langle\langle v\rangle\rangle$ で表す.

(9) 変数 z に関する冪級数を表示する場合, 記号 $(d^\circ(z) \geqq m)$ は m 次以上の部分を表すものとする. しかし, この m が明らかな場合は通常の様に $+\cdots$ で表す.

1 組合せ論からの準備

1.1. 階乗についての基本事項. ここで，階乗について以下で良く使ふ性質を列挙しておく．n，k は正整数で p は素数とする．$n = kp + a$ （$0 \leqq a < p$） のとき，

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \mathrm{ord}_p((kp)!) = \mathrm{ord}_p(k!) + k. \tag{1.1.1}$$

また $S_p(n)$ は n を p 進表示したときの各桁の数の和を表すものとすれば

$$\mathrm{ord}_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p-1}. \tag{1.1.2}$$

1.2. Lagrange の逆函数公式. 一般に，変数 z に関する冪級数 $F(z)$ に対し，$[z^n]F(z)$ は $F(z)$ の z^n の係数を表すものとする．我々は，Lagrange の逆函数公式（Lagrange inversion formula）などと呼ばれる次の公式から出発する．これは非常に強力な公式である．

命題 1.2.1. いま $\varphi(u) = u + \cdots$ は u の正冪項のみからなる冪級数で，その 1 次の項は 1 であるとする．また $\psi(t) = \varphi^{-1}(t)$ はその逆函数級数，すなはち，$\varphi(\psi(t)) = t$ となるものとする．このとき

$$[u^n]\Big(\frac{u}{\varphi(u)}\Big)^{\ell} = \frac{\ell}{\ell - n}[t^n]\Big(\frac{\psi(t)}{t}\Big)^{\ell - n}$$

が成り立つ．

証明は [**Ad1**]，p.123，Proposition 2.1 から辿つていただくか，[**Co**]，pp.148-153 を御覧いただきたい．

1.3. 二項係数についての準備. この小節では次の補題を証明するが，これは第 10.1 節まで使はない．

補題 1.3.1. n と q は正整数，r は $r < q$ なる整数とする．このとき

$$\frac{(qn - r)!^{(q)}}{(qn)!^{(q)}} \in \mathbf{Z}\Big[\frac{1}{q}\Big].$$

証明. いま $\xi = q\{(1+z)^{1/q} - 1\}$ とするとき，$z = (1 + \frac{1}{q}\xi)^q - 1$．Lagrange の逆函数公式（1.2.3）を $\ell = -1$ に適用して

$$[z^n]\Big(\frac{z}{q\{(1+z)^{1/q} - 1\}}\Big)^{-1} = [\xi^n]\Big(\frac{(1 + \frac{1}{q}\xi)^q - 1}{\xi}\Big)^{-1-n}\tfrac{d}{d\xi}\{(1 + \tfrac{1}{q}\xi)^q - 1\}.$$

右辺は明らかに $\mathbf{Z}[\frac{1}{q}]$ に属する．よつて左辺もさうであり，さらに

$$(1+z)^{r/q} = \{(1+z)^{1/q}\}^r$$

の係数を考へれば，主張が得られる．□

この補題の別証を与へておく．次の補題はこれよりは弱い形の主張ではあるが，

$$\binom{\frac{r}{q}-1}{n} = \left(\frac{r-q}{q}\right)\left(\frac{r-2q}{q}\right)\cdots\left(\frac{r-nq}{q}\right)\Big/ n! = (-1)^n\frac{(qn-r)!^{(q)}}{(qn)!^{(q)}} \tag{1.3.2}$$

なので，p を動かせば上記が得られる．

補題 1.3.3. 素数 p，整数 $n \geqq 0$ および $z \in \mathbf{Z}_{(p)}$ に対し，

$$\binom{z}{n} \in \mathbf{Z}_{(p)}.$$

証明. 整数 $n \geqq 0$ を固定したとき，函数 $z \mapsto \binom{z}{n}$ を考へると，これは $\mathbf{Z}_p$ から $\mathbf{Q}_p$ への連続函数である．また $z \in \mathbf{Z}$ のときは $\binom{z}{n} \in \mathbf{Z}$ であり，$\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Z}_p$ の稠密な部分集合なので結論を得る． □

$\boxed{2}$ 普遍 Bernoulli 数とその基本的性質

2.1. 普遍 Bernoulli 数の定義. 無限個の不定元 f_1, f_2, $\cdots$ について，冪級数

$$u = u(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \tag{2.1.1}$$

と，これの逆函数級数

$$t = t(u) = u - f_1 \frac{u^2}{2!} + (3{f_1}^2 - 2f_2)\frac{u^3}{3!} + \cdots, \tag{2.1.2}$$

つまり $u(t(u)) = u$ なるものを考へる．このとき

$$\frac{u}{t(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{B}_n \frac{u^n}{n!} \tag{2.1.2}$$

で $\hat{B}_n \in \mathbf{Q}[f_1,\ f_2,\ \cdots]$ を定め，これを（第 1 階）**普遍 Bernoulli 数** と呼ぶ．いま $f_n = (-1)^n$ とすれば $u(t) = \log(1+t)$，$t(u) = e^t - 1$ なので $\hat{B}_n$ は本来の Bernoulli 数に他ならない．

2.2. 普遍 Bernoulli 数の Schur 函数型表示. 少し記号を導入する：非負整数の有限列 $U = (U_1, U_2, \cdots)$ に対し，$w(U) = \sum_j jU_j$ と記し，これを U の**重さ**と呼び，$d(U) = \sum_j U_j$ を U の**次数**と呼ぶ．U は $w(U)$ の所謂**分割**である．また

$$U! = U_1!U_2!\cdots, \quad \binom{d}{U} = \frac{d!}{U!} \tag{2.2.1}$$

などと記す．さらに $\Lambda^U = 2^{U_1}3^{U_2}4^{U_3}\cdots$，$f^U = {f_1}^{U_1}{f_2}^{U_2}{f_3}^{U_3}\cdots$ などの記法も使ひ，

$$\gamma_U = \Lambda^U U! \tag{2.2.2}$$

と略記する．いま，$h(t) = (\psi(t)/t) - 1$ とすると

$$\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)^s = \bigl(1 + h(t)\bigr)^s = \sum_{d=0}^{\infty} \binom{s}{d} h^d(t), \quad h^d(t) = \sum_{d(U)=d} \binom{d}{U} \frac{f^U}{\Lambda^U}\, t^{w(U)} \tag{2.2.3}$$

であるので，

$$\tau_U = (-1)^{d(U)-1} \frac{(w(U) + d(U) - 2)!}{\gamma_U}. \tag{2.2.4}$$

と書くことにすれば，命題 1.2.1 を $\ell = 1$ として使ふことで次の表示を得る．

命題 2.2.5. 次が成り立つ：

$$\frac{\hat{B}_n}{n} = \sum_{w(U)=n} \tau_U f^U.$$

Haigh の指摘（[**Cl**]，p.594，$\ell.-12$）に従ひ，これを $\hat{B}_n$ の Schur 函数表示と呼ぶ．

2.3. Clarke の定理. ここでは Clarke によつて証明された普遍 Bernoulli 数に対する，von Staudt 型の強力な定理を述べる．以下，自然数 a に対して $a|_p$ は a の非 p 冪部分を表すとする．つまり $a|_p = a/p^{\mathrm{ord}_p a}$.

命題 2.3.1. 次が成り立つ：

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{2} f_1,$$

$$\frac{\hat{B}_2}{2} = -\frac{1}{4} {f_1}^2 + \frac{1}{3} f_2,$$

$$\frac{\hat{B}_n}{n} \equiv \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{n=a(p-1)\\ p:\text{素数}}} \frac{{a|_p}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} {f_{p-1}}^a & (n \equiv 0 \mod 4 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\frac{{f_1}^{n-6}{f_3}^2}{2} - \frac{n{f_1}^n}{8} + \sum_{\substack{n=a(p-1)\\ p:\text{奇素数}}} \frac{{a|_p}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} {f_{p-1}}^a & \\ & (n \neq 2 \text{ かつ } n \equiv 2 \mod 4 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\frac{{f_1}^n + {f_1}^{n-3} f_3}{2} & (n \neq 1 \text{ かつ } n \equiv 1, 3 \mod 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$\bmod \big(\mathbf{Z}[f_1, f_2, \cdots] \text{ の斉 } n \text{ 重部分}\big).$$

証明は $\hat{B}_n$ の Schur 函数型表示 2.2.5 を使つて，初等的になされる．興味のある方には [**Cl**]，Theorem 5 を参照されたい．

注意 2.3.2. (1) この命題から，たとへば $n \equiv 0 \bmod 4$ のとき

$$\hat{B}_n \equiv -\sum_{\substack{p:\text{素数}\\ p-1|n}} \frac{{f_{p-1}}^{n/(p-1)}}{p} \mod \mathbf{Z}[f_1, f_2, \cdots],$$

となることと $p-1 \nmid n$ ならば $\hat{B}_n/n \in \mathbf{Z}_{(p)}[f_1, f_2, \cdots]$ となることがわかる．実際，前者は素数 p に対し $n = a(p-1)$ で $\mathrm{ord}_p a = \nu$ とするとき，

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot \big({a|_p}^{-1} \bmod p^{1+\nu}\big)}{p^{1+\nu}} &\equiv 1 - \frac{1}{p} \mod \mathbf{Z} \\ &\equiv -\frac{1}{p} \mod \mathbf{Z} \end{aligned}$$

となるからであり，後者は明らかである．前者は Bernoulli 数について von Staudt-Clausen の定理と呼ばれる性質の類似で，後者は von Staudt の第 2 定理と呼ばれる性質の類似である．Clarke の定理はこれらの見事な一体化である．

(2) Clarke の論文では上記の modulo が $\mathbf{Z}[f_1, f_2, \cdots]$ となつてゐるが，2.2.5 において斉重であることに注意すれば，上のやうに置き換へてよいことがわかる．

3 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer 型の合同式

3.1. 主結果. ここでは，普遍 Bernoulli 数について，Kummer 型の合同式が mod $p^{\lfloor a/2 \rfloor}$ では成立することを示す．すなはち，

定理 3.1.1. 素数 p を固定する．a と n を正整数とし，$n > a$ かつ $n \not\equiv 0 \bmod (p-1)$ とする．このとき，

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-f_{p-1})^{a-r} \frac{\hat{B}_{n+r(p-1)}}{n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^{\lfloor a/2 \rfloor} \mathbf{Z}_{(p)}[f_1, f_2, \cdots]$$

が成り立つ．

注意 3.1.2. (1) ただし $a = 1$ で $n > a$ かつ $n \not\equiv 0$，$1 \bmod (p-1)$ のときは上記合同式が mod p で成立する．これは [**Ad1**]，Theorem 3.2 で証明された．また，より簡易的な証明と $n \equiv 1 \bmod (p-1)$ の場合の結果が [**Ad2**, Theorem 1] にある．
(2) 任意に与へられた奇素数 $p \geqq 7$ に対して，$U_1 = p$，$U_{2p-1} = (p-3)/2$ で他の成分は $U_j = 0$ なる U を考へる．このとき $w(U) = p + (p-5)(2p-1)/2 \equiv -1 \bmod (p-1)$ である．これについて

$$\mathrm{ord}_p(\tau_U) = (p-5)/2 (= \lfloor (p-4)/2 \rfloor)$$

が成り立つことが示せる．$a = p - 4$ と $n = w(U)$ に対して $n > a$ であるが，これらに関してあとで述べる (3.4.1) を眺めてみれば，3.1.1 は最良の評価を与へてゐることがわかる．
(3) 上記の例で $p = 5$ としても $\mathrm{ord}_5(\tau_U) = 0$ となるのだが，この場合は $n = w(U) = 5 \equiv 1 \bmod (5-1)$ なので [**Ad1**] の Theorem 3.2 では除外された場合となつてしまふ．この例を念頭に置き，あとで述べる補題 3.3.1 を細かく修正すれば，条件に $n \not\equiv 1 \bmod (p-1)$ を追加することで，$a = 1$ のときに mod p での上記合同式が成立することを，この論文の方法で証明できる．

さらに，3.1.1 と 3.1.2 (1) から，Adelberg の得た以下の型の合同式 ([**Ad3**], Theorem の (i)) が直接的に導かれることを第 3.5 節で述べる．

系 3.1.3. (Adelberg の合同式) $n \not\equiv 0$，$1 \bmod (p-1)$，$n > a$ のとき

$${f_{p-1}}^{p^{a-1}} \cdot \frac{\hat{B}_n}{n} \equiv \frac{\hat{B}_{n+p^{a-1}(p-1)}}{n+p^{a-1}(p-1)} \mod p^a \mathbf{Z}_{(p)}[f_1, f_2, \cdots].$$

また，$n \equiv 1 \bmod (p-1)$ の場合である [**Ad3**]，Theorem の (ii) も同様に，3.1.1 から導かれるが，ここでは述べない．

3.2. 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer 型の合同式の証明の準備１（安田）.

定理 3.1.1 の証明には２つの命題が必要なのであるが，次はそのひとつである．

命題 3.2.1. 奇素数 p を固定する．また a と n は非負整数とし，

$$M = \begin{cases} \mathrm{ord}_p(n!) & (n \geqq ap \text{ のとき}), \\ a - \lfloor n/p \rfloor + \mathrm{ord}_p(n!) - \lfloor (a - \lfloor n/p \rfloor)/p \rfloor & (n < ap \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおく．このとき

(1) 非負整数 q に対し，

$$\sum_{r=0}^{a} \frac{((r+q)p+n)!}{(r+q)!p^{r+q}} \binom{a}{r} \equiv 0 \mod p^M;$$

(2) r_0 を $0 < r_0 \leqq a$ なる整数とし，$n \geqq r_0 p$ は整数とすると，

$$\sum_{r=r_0}^{a} \frac{((r-r_0)p+n)!}{(r-r_0)!p^{r-r_0}} \binom{a}{r} \equiv 0 \mod p^M.$$

この研究の初期において筆者は（1）を証明してゐたが,（2）は予想に留まつてゐた．その後（1）と（2）を統一する証明が安田 [**Ya1**] によつて得られた．ここではそれを紹介する．証明のために実数 $\alpha > 0$，β について，$\mathbf{Q}_p[[v]]$ の部分集合

$$(3.2.2) \qquad \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta} = \left\{ \varphi \in \mathbf{Q}_p[[v]] \;\middle|\; \left(\tfrac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil \alpha(a+\beta) \rceil} \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle \text{ for all } a \geqq 0 \right\}$$

を考察する．

注意 3.2.3. （1） $\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ は “$p^{\alpha\beta}\mathbf{Z}_p\langle\langle p^{\alpha/p} v \rangle\rangle$” であるかのやうな気分でゐるとわかりやすいかも知れない．
（2） 3.2.1 の証明には $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$ のときだけしか使はない．

補題 3.2.4. （1） $\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ は $\mathbf{Q}_p[[v]]$ の部分 $\mathbf{Z}_p$ 加群である．
（2） $\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta} \subset p^{\lceil \alpha\beta \rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle$，特に $\beta \geqq 0$ のとき $\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta} \subset \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle$．
（3） $f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n \in \mathbf{Q}_p[[v]]$ に対し，$f(v) \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ であるためには任意の $m \geqq 0$ に対し，$\sum_{n=0}^{m} a_n v^n \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ となることが必要十分である．
（4） $\alpha_1 \geqq \alpha_2 > 0$ のとき，$\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha_1),\beta} \subset \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha_2),\beta}$．
（5） $\beta_1 \geqq \beta_2$ のとき，$\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta_1} \subset \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta_2}$．
（6） $n \in \mathbf{Z}$（負でもよい）について，$p^n\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta} \subset \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta+\frac{n}{\alpha}}$．
（7） $\varphi \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ のとき，$\frac{d}{dv}\varphi \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$．
（8） $\varphi \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ のとき，$\left(\frac{d}{dv}\right)^p\varphi \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta+1}$．
（9） $m \geqq 0$，$b \in \mathbf{Q}_p$ とする．$bv^m/m! \in \mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ となるためには，$\mathrm{ord}_p(b) \geqq \alpha\left(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor + \beta\right)$ となることが必要十分である．

証明. いづれも $\mathbf{Z}_p\langle\langle v \rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ の定義から明らかである．□

系 3.2.5. $0<\alpha\leqq 1$，$\varphi\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ のとき，
$$\left(\left(\frac{d}{dv}-1\right)^p+1\right)\varphi\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta+1}.$$

証明. 以後で，$p=2$ の場合は使はないので $p\neq 2$ とする．Leibniz の公式により
$$\left(\left(\frac{d}{dv}-1\right)^p+1\right)\varphi=\left(\frac{d}{dv}\right)^p\varphi+\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^j\binom{p}{j}\left(\frac{d}{dv}\right)^j\varphi$$
であるが，これは 3.2.4 の（8）と（7）により $\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta+1}+p\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ に属す．よつて主張は 3.2.4 の（6）と（5）および α についての仮定からでる． □

補題 3.2.6. $0<\alpha\leqq 1$ とする．
（1）$\mathbf{Z}_p[[v]]\subset\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),0}$.
（2）$\varphi_1\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta_1}$，$\varphi_2\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta_2}$ ならば $\varphi_1\varphi_2\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta_1+\beta_2}$.
特に，$0<\alpha\leqq 1$ のとき，$\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),0}$ は $\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle$ の部分 $\mathbf{Z}_p$ 線型環，$\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ は $\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),0}$ 上の加群になる．

証明. （1） $\varphi\in\mathbf{Z}_p[[v]]$ とする．任意の $a\geqq 0$ に対し，$\frac{1}{(pa)!}\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa}\varphi\in\mathbf{Z}_p[[v]]\subset\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle$ となることから
$$\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa}\varphi\in(pa)!\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle=p^a a!\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle\subset p^a\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle.$$
しかるに $\alpha\leqq 1$ より，これは $p^{\lceil\alpha a\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle$ に含まれる．従つて $\varphi\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),0}$.
（2）Leibniz の公式により
$$\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa}(\varphi\psi)=\sum_{j=0}^{pa}\binom{pa}{j}\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^j\varphi\right)\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa-j}\psi\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{a}\binom{pa}{pj}\left(\left(\frac{d}{dx}\right)^{pj}\varphi\right)\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa-pj}\psi\right)+\sum_{0\leqq j\leqq pa,p\nmid j}\binom{pa}{j}\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^j\varphi\right)\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa-j}\psi\right)$$
となる．$p\nmid j$ のとき $p\Big|\binom{pa}{j}$ に注意すると，$\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta}$ の定義および 3.2.4（7）より，
$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa}(\varphi\psi)&\in\sum_{j=0}^{a}p^{\lceil\alpha(j+\beta_1)\rceil}p^{\lceil\alpha(a-j+\beta_2)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle\\&\quad+\sum_{0\leqq j\leqq pa,\ p\nmid j}pp^{\lceil\alpha(\lfloor\frac{j}{p}\rfloor+\beta_1)\rceil}p^{\lceil\alpha(\lfloor\frac{pa-j}{p}\rfloor+\beta_2)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle\\&\subset p^{\lceil\alpha(a+\beta_1+\beta_2)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle+pp^{\lceil\alpha(a-1+\beta_1+\beta_2)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle.\end{aligned}$$
ここで $\alpha\leqq 1$ ゆゑ，これは $p^{\lceil\alpha(a+\beta_1+\beta_2)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle$ に属す．よつて
$$\varphi\psi\in\mathbf{Z}_p\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha),\beta_1+\beta_2}$$
を得る． □

補題 3.2.7. 次が成り立つ：

$$\exp\left(v+\frac{v^p}{p}\right)\in \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle^{(1-\frac{1}{p}),\,0}.$$

証明. 3.2.6（2）と 3.2.4（3）により，次の２つを示せば十分である：

（1） $\exp\big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v^{p^n}}{p^n}\big)\in \mathbf{Z}_p[[v]]$；

（2） すべての $n\geqq 2$ に対し $\exp\big(-\frac{v^{p^n}}{p^n}\big)\in \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle^{(1-\frac{1}{p}),\,0}$.

（1）については，[**Ho**]，p.238，5.4 や [**R**]，p.388，Theorem にあるので，証明を省略し，(2) のみ示す．そのためには 3.2.4（3）より

(2)′ すべての $n\geqq 2$ とすべての $m\geqq 0$ に対し，$\frac{1}{m!}\big(\frac{v^{p^n}}{p^n}\big)^m\in \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle^{(1-\frac{1}{p}),\,0}$

をいへばよい．3.2.4（9）より (2)′ は

(2)″ すべての $n\geqq 2$ とすべての $m\geqq 0$ に対し，$\mathrm{ord}_p\big(\frac{(p^nm)!}{m!p^{mn}}\big)\geqq (1-\frac{1}{p})p^{n-1}m$

と同値である．ところが

$$\mathrm{ord}_p\Big(\frac{(p^nm)!}{m!}\Big)=\sum_{j=0}^{n-1}p^jm\geqq p^{n-1}m+m$$

であるから (2)″ をいふためには

$$p^{n-1}m+m-mn\geqq \big(1-\tfrac{1}{p}\big)p^{n-1}m,$$

すなはち $m(p^{n-2}-n+1)\geqq 0$ を示せば十分である．これは容易に確かめられる． □

3.2.1 の証明. $n\geqq 0$ とし，$m=-\lceil\frac{n}{p}\rceil$ とおく．3.2.4（9）より，

$$\frac{v^n}{n!}\in \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle^{(1-\frac{1}{p}),\,m}\cap \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$$

である．3.2.7 と 3.2.6（2）より $\frac{v^n}{n!}\exp\big(v+\frac{v^p}{p}\big)\in \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle^{(1-\frac{1}{p}),\,m}\cap \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$ であり，3.2.5 より任意の $a\geqq 0$ に対し，

$$\left(\Big(\frac{d}{dv}-1\Big)^p+1\right)^a\left(\frac{v^n}{n!}\exp\Big(v+\frac{v^p}{p}\Big)\right)\in \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle^{(1-\frac{1}{p}),\,m+a}\cap \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle.$$

3.2.4（2）よりこれは $p^{\lceil(1-\frac{1}{p})(m+a)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle\cap \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$ に含まれる．ところが

$$\left(\Big(\frac{d}{dv}-1\Big)^p+1\right)^a\left(\frac{v^n}{n!}\exp\Big(v+\frac{v^p}{p}\Big)\right)=\exp(v)\left(\Big(\frac{d}{dv}\Big)^p+1\right)^a\left(\frac{v^n}{n!}\exp\Big(\frac{v^p}{p}\Big)\right)$$

であり，$\exp(v)$ は $\mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle$ の可逆元であるから

$$\left(\Big(\frac{d}{dv}\Big)^p+1\right)^a\left(\frac{v^n}{n!}\exp\Big(\frac{v^p}{p}\Big)\right)\in p^{\lceil(1-\frac{1}{p})(m+a)\rceil}\mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle\cap \mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle.$$

ここで $m=-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor$ であつたから

$$\left(\Big(\frac{d}{dv}\Big)^p+1\right)^a\left(\frac{v^n}{n!}\exp\Big(\frac{v^p}{p}\Big)\right)\in\begin{cases}\mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle & (pa<n\text{ のとき}),\\ p^{a-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor-\lfloor(a-\lfloor\frac{n}{p}\rfloor)/p\rfloor}\mathbf{Z}_p\langle\!\langle v\rangle\!\rangle & (pa\geqq n\text{ のとき})\end{cases}$$

となることがわかる．これを $n!$ 倍したものの $v^{n+qp}/(n+qp)!$ あるいは $v^{n-r_0p}/(n-r_0p)!$ の係数を見れば所望の結果が得られる． □

3.3. 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer 型の合同式の証明の準備２.

Kummer 型の合同式（定理 3.1.1）の証明に必要な命題をもうひとつ準備する.

命題 3.3.1. p は奇素数，U は $U_{p-1}=0$，$d(U)\neq 0$ なる分割とする．このとき, (2.2.4) で定義した τ_U について

$$\mathrm{ord}_p(\tau_U) \geqq \left\lfloor \frac{w(U)+d(U)-2}{2p} \right\rfloor$$

が成り立つ.

注意 3.3.2. 先に 3.1.2 (2) で述べたやうに，奇素数 $p\geqq 5$ に対して，$U_1=p$, $U_{2p-1}=(p-5)/2$ で他の成分は $U_j=0$ なる U については $\mathrm{ord}_p(\tau_U)=(p-5)/2$ が成り立つ．この U については $w(U)=p+\frac{(2p-1)(p-5)}{2}$，$d(U)=p+\frac{p-5}{2}$ であり，$\lfloor (w(U)+d(U)-2)/(2p)\rfloor = \lfloor (p^2-3p-2)/(2p)\rfloor = \lfloor \frac{p-5}{2}+\frac{p-1}{p}\rfloor = (p-5)/2$ である．したがつて上記の評価も最良である.

証明. 簡単のために $w(U)=n$，$d(U)=d$ と書く．まづ，$d\neq 0$ より $n+d-2>0$ であることに注意されたい．はじめに $U_{2p-1}\neq 0$ と仮定する．このとき,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_p(\tau_U) = \mathrm{ord}_p((n+d-2)!) - \mathrm{ord}_p(\gamma_U)\\
&= \mathrm{ord}_p\Bigg(\Big(-2+\sum_{j\neq p-1}(j+1)U_j\Big)!\Bigg) - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} - \sum_{j\neq p-1}\mathrm{ord}_p(U_j!)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\text{（これ以降 } \epsilon \text{ は } p \text{ と素な自然数を走るものとする）}\\
&\geqq \mathrm{ord}_p\Bigg(\Big(-2+\sum_{j\neq p-1,\ 2p-1} jU_j + 2pU_{2p-1}\Big)!\Bigg) - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!)\\
&= \mathrm{ord}_p\Bigg(\Big(-2+\sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k-1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1}\Big)!\Bigg)\\
&\qquad - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!)\\
&\geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{1}{p^\nu}\Big(-2+\sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k-1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1}\Big)\right\rfloor\\
&\qquad - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \qquad \Big(\because \mathrm{ord}_p(N!) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big\lfloor \frac{N}{p^\nu}\Big\rfloor \text{ なので}\Big)\\
&= \left\lfloor \frac{1}{p}\Big(-2+\sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k-1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1}\Big)\right\rfloor\\
&\qquad + \sum_{\nu=2}^{\infty}\left\lfloor \frac{1}{p^\nu}\Big(-2+\sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k-1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1}\Big)\right\rfloor\\
&\qquad\qquad - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!)\\
&\geqq \left\lfloor \frac{1}{p}\Big(-2+\sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k-1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1}\Big)\right\rfloor
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{-2+2pU_{2p-1}}{p^\nu} \right\rfloor - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \\
&= \left\lfloor \frac{1}{p}\Biggl(-2 + \sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k - 1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1} \Biggr) \right\rfloor \\
&\quad - \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1)} kU_{\epsilon p^k-1} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{-2+2pU_{2p-1}}{p^\nu} \right\rfloor - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \\
&= \left\lfloor \frac{1}{p}\Biggl(-2 + \sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k - kp - 1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1} \Biggr) \right\rfloor \\
&\quad - U_{2p-1} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{-2+2pU_{2p-1}}{p^\nu} \right\rfloor - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \\
&= \left\lfloor \frac{1}{p}\Biggl(-2 + \sum_{p\nmid j+1} jU_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} (\epsilon p^k - kp - 1)U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1} \Biggr) \right\rfloor \\
&\quad - U_{2p-1} + \mathrm{ord}_p((-2+2pU_{2p-1})!) - \left\lfloor \frac{-2+2pU_{2p-1}}{p} \right\rfloor - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!).
\end{aligned}
$$

ここで，先頭にある $-\frac{2}{p}$ を $-\frac{1}{p}$ に置き換へてよい．なぜなら，もしこの $\lfloor\ \rfloor$ のすぐ内側の括弧内の残りの項の和が p で割れれば，$\lfloor\ \rfloor$ を施すときに，$-\frac{2}{p}$ であらうが $-\frac{1}{p}$ であらうが，これは -1 として機能するし，それらの和が p で割り切れなければ，それを p で割つたときに $\frac{1}{p}$ 以上の余りがでてくるからである．また，第 2 項の和のなかの jU_j については $j \leqq (j+1)/2$ であることと，第 3 項の和についてはもし $(\epsilon,k)\neq(1,1)$，$(2,1)$ なら $\epsilon p^k - kp - 1 > \epsilon p^k/2$ であることとに注意すれば

$$
\begin{aligned}
&\geqq \left\lfloor \frac{1}{2p}\Biggl(-2 + \sum_{p\nmid j+1} (j+1)U_j + \sum_{(\epsilon,k)\neq(1,1),\ (2,1)} \epsilon p^k U_{\epsilon p^k-1} + 2pU_{2p-1} \Biggr) + U_{2p-1} \right\rfloor - U_{2p-1} \\
&\qquad + \mathrm{ord}_p((-2+2pU_{2p-1})!) - \left\lfloor \frac{-2+2pU_{2p-1}}{p} \right\rfloor - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \\
&= \left\lfloor \frac{-2+w(U)+d(U)}{2p} \right\rfloor \\
&\quad + \mathrm{ord}_p(2U_{2p-1})!) + 2U_{2p-1} - \mathrm{ord}_p(2pU_{2p-1}) - \left\lfloor \frac{-2+2pU_{2p-1}}{p} \right\rfloor - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \\
&= \left\lfloor \frac{-2+w(U)+d(U)}{2p} \right\rfloor \\
&\quad + \mathrm{ord}_p(2U_{2p-1})!) + 2U_{2p-1} - \mathrm{ord}_p(2U_{2p-1}) - 1 - (-1+2U_{2p-1}) - \mathrm{ord}_p(U_{2p-1}!) \\
&\geqq \left\lfloor \frac{-2+w(U)+d(U)}{2p} \right\rfloor + \mathrm{ord}_p\left(\frac{(2U_{2p-1}-1)!}{U_{2p-1}!} \right).
\end{aligned}
$$

よつて $U_{2p-1}\neq 0$ のときは証明された．$U_{2p-1}=0$ のときは，最初の段階でそれを代入して，同様な方針で計算をすれば目的の評価が得られる． □

3.4. 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer 型合同式. いよいよ，普遍 Bernoulli 数が満たす Kummer 型合同式（定理 3.1.1）の証明に入る．2.2.5（または [**Cl**]，p.594, Proposition 4 ）により $\hat{B}_n$ を Schur 函数表示すれば

$$\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-1)^r {f_{p-1}}^{a-r}\frac{\hat{B}_{n+r(p-1)}}{n+r(p-1)}=\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-1)^r {f_{p-1}}^{a-r}\sum_{w(U)=n+r(p-1)}\tau_{U} f^{U} \tag{3.4.1}$$

と書ける．ただし

$$\tau_U=(-1)^{d(U)-1}\frac{(w(U)+d(U)-2)!}{\gamma_U}.$$

ここで，f^U から r 個以内で与ふ限り多く（$r-r_0$ 個）の f_{p-1} をくくり出すことにより，

$$\begin{aligned}&=\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-1)^r {f_{p-1}}^{a-r}\\ &\qquad\left\{\sum_{w(U)=n}\tau_{U[r]} f^U {f_{p-1}}^{r}+\sum_{r_0=1}^{r}\sum_{\substack{w(U)=n+r_0(p-1)\\ U_{p-1}=0}}\tau_{U[r-r_0]} f^U {f_{p-1}}^{r-r_0}\right\}.\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

ただし，$U[r]$ は U の $p-1$ 成分に r を加へたものを表してゐる．いま r に関する和と U に関する和の順序を交換して，$\tau_{U[r]}$ や $\tau_{U[r-r_0]}$ を書き下せば

$$\begin{aligned}&=\sum_{w(U)=n}\frac{f^U {f_{p-1}}^{a}}{\gamma_{U|_{p-1}}}\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-1)^{d(U[r])+r-1}\frac{\{w(U[r])+d(U[r])-2\}!}{p^{r+U_{p-1}}(r+U_{p-1})!}\\ &\quad+\sum_{r_0=1}^{a}\sum_{\substack{w(U)=n+r_0(p-1)\\ U_{p-1}=0}}\frac{f^U {f_{p-1}}^{a-r_0}}{\gamma_U}\left\{\sum_{r=r_0}^{a}\binom{a}{r}(-1)^{d(U[r-r_0])+r-1}\right.\\ &\qquad\qquad\left.\cdot\frac{\{w(U[r-r_0])+d(U[r-r_0])-2\}!}{p^{r-r_0}(r-r_0)!}\right\}.\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

ここに，$U|_{p-1}$ は U の $(p-1)$ 成分を 0 にしたものを表す．従つて，前半の和に記されてゐる $\gamma_{U|_{p-1}}$ は γ_U から $p-1$ 成分に関係する部分，すなはち $p^{U_{p-1}}U_{p-1}!$ を取り除いたものを示す．各 r について，

$$\begin{aligned}\gamma_{U[r]|_{p-1}}&=\gamma_{U|_{p-1}},\\ \gamma_{U[r]|_{p-1}}p^{r+U_{p-1}}(r+U_{p-1})!&=\gamma_{U[r]}\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

であることに注意されたい．また，後半の和における

$$\gamma_U=\left(2^{U_1}\cdots(p-1)^{U_{p-2}}(p+1)^{U_p}\cdots\right)\cdot(U_1!\cdots U_{p-2}!U_p!\cdots) \tag{3.4.5}$$

は，もとより $p-1$ 番目の成分を含まないことに注意していただきたい．上の (3.4.3) の 2 つの和を順に $\sum_1$，$\sum_2$ と書き，さらに

$$=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2=\sum_{w(U)=n}S_1(U)\ +\ \sum_{r_0=1}^{a}\sum_{\substack{w(U)=n+r_0(p-1)\\ U_{p-1}=0}}S_2(U) \tag{3.4.6}$$

とおくことにする．さうすれば，$n = w(U)$ なる U についての $S_1(U)$ に関しては

$$
\begin{aligned}
w(U[r]) + d(U[r]) - 2 &= n + (p-1)r + d(U) + r - 2 \\
&= n + pr + d - 2 \\
&= (r + U_{p-1})p + n - pU_{p-1} + d(U) - 2
\end{aligned} \tag{3.4.7}
$$

である．ここで，

$$
\begin{aligned}
n - pU_{p-1} + d(U) - 2 &= \bigl(n - (p-1)U_{p-1}\bigr) + (d(U) - U_{p-1}) - 2 \\
&= w(U|_{p-1}) + d(U|_{p-1}) - 2
\end{aligned} \tag{3.4.8}
$$

であることに注意せよ．$w(U) = n + r_0(p-1)$ なる U に対する $S_2(U)$ に関しては

$$
\begin{aligned}
&w(U[r-r_0]) + d(U[r-r_0]) - 2 \\
&\qquad = n + r_0(p-1) + (p-1)(r-r_0) + d(U) + (r-r_0) - 2 \\
&\qquad = (r-r_0)p + n + r_0 p + d(U) - r_0 - 2
\end{aligned} \tag{3.4.9}
$$

である．いま，(3.4.8) の $n-pU_{p-1}+d(U)-2$（或いは (3.4.9) の $n+r_0p+d(U)-r_0-2$）が $\geqq ap$ であるか $< ap$ であるかによつて $\sum_1$ （或いは $\sum_2$）を 2 つの部分に分けて，それぞれ，$\sum_1' + \sum_1''$（或いは $\sum_2' + \sum_2''$） と書くことにする．また，$n \not\equiv 0 \bmod (p-1)$ より，(3.4.8) においては常に $n - pU_{p-1} + d(U) - 2 > 0$ であることに注意せよ．

(a) $\sum_1'$ については，$n - pU_{p-1} + d(U) - 2 \geqq ap$ ゆゑ 3.2.1 (1) と 3.3.1 より，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ord}_p(S_1(U)) &\geqq -\mathrm{ord}_p(\gamma_{U|_{p-1}}) + \mathrm{ord}_p((n - pU_{p-1} + d - 2)!) \\
&\geqq \left\lfloor \frac{n - pU_{p-1} + d(U) - 2}{2p} \right\rfloor \\
&\geqq \left\lfloor \frac{ap}{2p} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor.
\end{aligned} \tag{3.4.10}
$$

(b) $\sum_1''$ については，$0 < n-pU_{p-1}+d(U)-2 < ap$ ゆゑ，$N = n-pU_{p-1}+d(U)-2$ とおいて $N = pb + e$ $(0 \leqq e < p)$ と書けば $b < a$ である．3.3.1 により

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_p(N!) - \mathrm{ord}_p(\gamma_{U|_{p-1}}) \\
&\quad = \mathrm{ord}_p((w(U|_{p-1}) + d(U|_{p-1}) - 2)!) - \mathrm{ord}_p(\gamma_{U|_{p-1}}) \\
&\quad = \mathrm{ord}_p(\tau_{U|_{p-1}}) \\
&\quad \geqq \lfloor N/(2p) \rfloor.
\end{aligned} \tag{3.4.11}
$$

これと 3.2.1（1） によつて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ord}_p(S_1(U)) &\geqq a - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + \mathrm{ord}_p(N!) - \left\lfloor \frac{a-\lfloor N/p \rfloor}{p} \right\rfloor - \mathrm{ord}_p(\gamma_{U|_{p-1}}) \\
&= \left\lfloor \frac{N}{2p} \right\rfloor + a - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a-\lfloor N/p \rfloor}{p} \right\rfloor \\
&\geqq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + a - b - \left\lfloor \frac{a-b}{p} \right\rfloor \\
&> \left(\frac{b}{2}-1\right) - b + a - \frac{a-b}{p} \\
&= -1 + \frac{a}{2} - \frac{(a-b)(p-2)}{2p} \\
&= -1 + \frac{a}{2}.
\end{aligned}
\tag{3.4.12}
$$

しかし，最初の辺は整数なので $\geqq \lfloor a/2 \rfloor$ がいへる．結局，$\mathrm{ord}_p(\sum_1) \geqq \lfloor a/2 \rfloor$ である．同様に $\mathrm{ord}_p(\sum_2) \geqq \lfloor a/2 \rfloor$ が 3.2.1（1） の代りに 3.2.1（2） を使つて示される．ただし，その際に注意しなくてはいけないのは，(3.4.9) の $n+r_0p+d(U)-r_0-2$ について，これが $\leqq ap$ の場合に，$n+r_0p+d(U)-r_0-2 \geqq r_0p$ でなければ 3.2.1（2） が使へないことである．$d(U) \geqq 1$ なので，この条件は，$n+r_0p+1-r_0-2 \geqq r_0p$，すなはち $n-r_0-1 \geqq 0$ であれば成り立つ．これは我々の仮定 $n > a$ により，すべての $r_0 = 1, \cdots, a$ について成立する． □

注意 3.4.13. 定理 3.1.1 で条件 $n > a$ を $a \geqq n$ に置き換へるとき，あとで述べる **一般 Bernoulli-Hurwitz 数**については，当該の合同式が $\mathrm{mod}\ p^{n-1}$ で成り立ち，これが最良である．それは普遍 Bernoulli 数の特殊化であるので，条件 $n > a$ は本質的である．

3.5. 普遍 Bernoulli 数に対する Kummer-Adelberg 合同式. ここでは Adelberg（[**Ad3**]）の証明した合同式（系 3.1.3）を定理 3.1.1 と注意 3.1.2（1）より導く.

系 3.1.3 の証明. まづ，$p=3$ ならば仮定 $n \not\equiv 0,\ 1 \bmod (p-1)$ より，系の主張は空であることに注意せよ．それゆゑ，以下では $p \geqq 5$ とする．以下 a についての帰納法で証明する．$a=1$ の場合は 3.1.2（1）で述べた通りである．$a>1$ とする．定理 3.1.1 の a を p^{a-1} にとれば

$$\sum_{r=0}^{p^{a-1}} (-1)^r \binom{p^{a-1}}{r} {f_{p-1}}^{p^{a-1}-r} \frac{\hat{B}_{n+r(p-1)}}{n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^{\lfloor p^{a-1}/2 \rfloor}. \tag{3.5.1}$$

しかるに $a \geqq 2$ かつ $p \geqq 5$ なので $\lfloor p^{a-1}/2 \rfloor > a$．一方 $r \neq 0,\ p^{a-1}$ ならば（1.1.2）より

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_p \binom{p^{a-1}}{r} &= \frac{S_p(p^{a-1}-r)+S_p(r)-S_p(p^{a-1})}{p-1} \\ &= \frac{S_p(p^{a-1}-r)+S_p(r)-1}{p-1}. \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

いま $\nu = \mathrm{ord}_p(r)$ とおき，$p^{a-1}-r = d_{a-2}p^{a-2}+d_{a-3}p^{a-3}+\cdots+d_1p+d_0$, $(0 \leqq d_j \leqq p-1)$ および $r = h_{a-2}p^{a-2}+h_{a-3}p^{a-3}+\cdots+h_1p+h_0$, $(0 \leqq h_j \leqq p-1)$ を p 進展開とすると，明らかに

$$d_j + h_j = \begin{cases} p-1, & (a-2 \geqq j \geqq \nu+1)\,, \\ p, & (j=\nu)\,, \\ 0, & (\nu-1 \geqq j \geqq 0) \end{cases} \tag{3.5.3}$$

である．つまり $S_p(p^{a-1}-r)+S_p(r) = (p-1)(a-2-\nu)+p$．よつて，$\mathrm{ord}_p\binom{p^{a-1}}{r} = a-1-\nu$ がわかる．そこで p が奇数であることに注意して，各 $1 \leqq r \leqq (p^{a-1}-1)/2$ に対する和

$$\begin{aligned} &(-1)^r \binom{p^{a-1}}{r} {f_{p-1}}^{p^{a-1}-r} \frac{\hat{B}_{n+r(p-1)}}{n+r(p-1)} \\ &\qquad + (-1)^{p^{a-1}-r} \binom{p^{a-1}}{p^{a-1}-r} {f_{p-1}}^{r} \frac{\hat{B}_{n+(p^{a-1}-r)(p-1)}}{n+(p^{a-1}-r)(p-1)} \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

を考へる．先の考察と，$\nu = \mathrm{ord}_p r = \mathrm{ord}_p(p^{p-1}-r) > a$ のときに関する帰納法の仮定とを合せれば，和（3.5.4）は p^a で割り切れることがわかる．したがつて結局，系 3.1.3 が成り立つ．□

（この証明には 3.1.1 が $n \leqq a$ のときにどう書けるかの説明が欠けてゐる．2020.1.3）

4 超楕円函数

4.1. 基本的事項. 種数 g の超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ を考へる．ただし，

$$f(x) = \lambda_0 x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g} + \cdots + \lambda_{2g+1}$$

は $f(x) = 0$ が重根をもたないやうな x の $\mathbf{C}$ 上の多項式であり，先頭の係数は $\lambda_0 = 1$ とする．このとき C は無限遠に 1 点 ∞ を持つ非特異代数曲線である．良く知られてゐるやうに

$$\frac{x^{j-1}dx}{2y} \quad (j = 1, \dots, g) \tag{4.1.1}$$

が C の第 1 種微分形式の基底をなす．通常の方法で，Riemann 面としての C の基本群の適当な生成系についての，これらの微分形式に関する周期を $[\omega' \ \omega'']$ とし，$\mathbf{C}^g$ の格子

$$\Lambda := \omega'\,{}^t[\,\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z} \quad \cdots \quad \mathbf{Z}\,] + \omega''\,{}^t[\,\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z} \quad \cdots \quad \mathbf{Z}\,] \ (\subset \mathbf{C}^g)$$

を考へておく．

曲線 C の Jacobi 多様体を J と記し，C の g 個の**対称積**を $\mathrm{Sym}^g(C)$ と書けば，双有理写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^g(C) &\to \mathrm{Pic}^\circ(C) = J \\ (P_1, \dots, P_g) &\mapsto \text{the class of } P_1 + \cdots + P_g - g \cdot \infty \end{aligned}$$

を得る．解析的な多様体として J は $\mathbf{C}^g/\Lambda$ と同一視される．我々は κ でもつて，自然な写像 $\mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^g/\Lambda = J$ を表す．写像

$$\iota : Q \mapsto Q - \infty$$

により，C は J に埋めこまれる．この埋め込み ι の像の κ による引き戻し $\kappa^{-1}\iota(C)$ は曲線 C の **普遍 Abel 被覆** になつてゐる．また，上記の双有理写像は，解析的には，各 $(P_1, \dots, P_g) \in \mathrm{Sym}^g(C)$ を点 $\boldsymbol{u} \mod \Lambda \in \mathbf{C}^g/\Lambda$，ただし

$$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_g) = \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g} \right)(\omega_1, \ \dots, \ \omega_g), \tag{4.1.2}$$

に写す写像に他ならない．以後は次のことに注意されたい．

記号の約束：この論文では u_g を単に u と記す．

4.2. 超楕円函数とその変数. この論文では，各点 $\boldsymbol{u} \in \kappa^{-1}\iota(C)$ に対し，記号

$$(x(\boldsymbol{u}),\ y(\boldsymbol{u}))$$

でもつて，$\kappa(\boldsymbol{u}) = \iota\,(x(\boldsymbol{u}),\ y(\boldsymbol{u}))$ なる C の (x, y) 座標を表すことにする．我々は，これやこれらの有理式を $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数と見て，**超楕円函数**と呼ぶのである．

まづ，基本的なこととして次の補題を確認しておく．

補題 4.2.1. 超楕円函数 $x(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{u} = (0, \cdots, 0)$ における Laurent 展開に関して

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{u^2} + (d^\circ(u) \geqq 0), \quad y(\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{u^{2g+1}} + (d^\circ(u) \geqq -2g+1)$$

が成り立つ．

証明. 無限遠点 ∞ における局所助変数として $t = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ をとる．ただし $x > 0$ なら $t > 0$ となるものとする．いま $u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ は十分 $(0, 0, \ldots, 0)$ に近いとし，3 つの座標 t，$\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_g)$，$(x, y)$ が C の同一点に対応するものとすれば

$$\begin{aligned} u = u_g &= \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{g-1}dx}{2y} = \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{-3/2}dx}{2\sqrt{1 + \lambda_1 \frac{1}{x} + \cdots + \lambda_{2g+1}\frac{1}{x^{2g+1}}}} \\ &= \int_0^t \frac{t^3 \cdot \left(-\frac{2}{t^3}\right) dt}{2 + (d^\circ \geqq 1)} = -t + (d^\circ(t) \geqq 2). \end{aligned}$$

ゆゑに $x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{u^2} + (d^\circ(u) \geqq -1)$ がわかる．定義より $x(-\boldsymbol{u}) = x(\boldsymbol{u})$ であるから，$x(\boldsymbol{u})$ についての主張は証明された．$y(\boldsymbol{u})$ についても $y(-\boldsymbol{u}) = -y(\boldsymbol{u})$ に注意して同様に示される． □

つぎの補題も同様な計算で示されるので証明は省略する．

補題 4.2.2. いま $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_g)$ が $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上を動くとせよ．このとき

$$\begin{aligned} u_1 &= \tfrac{1}{2g-1}{u_g}^{2g-1} + (d^\circ(u_g) \geqq 2g), \\ u_2 &= \tfrac{1}{2g-3}{u_g}^{2g-3} + (d^\circ(u_g) \geqq 2g-2), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_{g-1} &= \tfrac{1}{3}{u_g}^3 + (d^\circ(u_g) \geqq 4) \end{aligned}$$

である．

これにより，次のことが了解される．

超楕円函数の $\boldsymbol{u} = (0, \cdots, 0)$ の近傍における独立変数としては $u = u_g$ をとるのが自然である．

5 微分方程式

5.1. 一般論. 超楕円曲線 $y(\boldsymbol{u})^2 = f\big(x(\boldsymbol{u})\big)$ （f は $2g+1$ 次の分離的多項式）について $u = u_g$ の定義から

$$\frac{du}{dx}(\boldsymbol{u}) = \frac{x^{g-1}}{2y}(\boldsymbol{u}) \tag{5.1.1}$$

であるが，これを平方してこの曲線の定義式を代入すれば $\big(\frac{du}{dx}\big)^2 = \frac{x^{2g-2}}{4f}$ を得る．つまり

$$x(\boldsymbol{u})^{2g-2}x'(\boldsymbol{u})^2 = 4f\big(x(\boldsymbol{u})\big) \quad \text{（ただし $'$ は $\dfrac{d}{du}$ を表す）.} \tag{5.1.2}$$

この（5.1.2）こそが $\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$ の類似である[6]．そこで $x(\boldsymbol{u})$ の u に関する Laurent 展開を

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{u^2} + \frac{c_{-1}}{u} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{C_n}{n}\frac{u^{n-2}}{(n-2)!} \tag{5.1.3}$$

と書いて C_n を定めれば，C_n が Bernoulli 数や Hurwitz 数の類似となる．Bernoulli 数や Hurwitz 数の場合を勘案すると C_n は 2 の冪で割つたものに置き換へるべきなのかも知れない．これは将来の課題であるが，今回はこのやうに置いておく．もちろん C_n の漸化式が（5.1.2）から得られる．また $y(\boldsymbol{u})$ についてもその $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ における u に関する Laurent 展開を

$$y(\boldsymbol{u}) = \frac{-1}{u^{2g+1}} + \frac{d_{-2g}}{u^{2g}} + \cdots + \frac{d_{-1}}{u} + \sum_{n=2g+1}^{\infty}\frac{D_n}{n}\frac{u^{n-2g-1}}{(n-2g-1)!} \tag{5.1.4}$$

と書いて D_n を定めておく．もちろん $y(\boldsymbol{u})$ の微分方程式も $du = x^{g-1}dx/2y$ から得られて，D_n の漸化式もそこから得られる．

[6] Carlitz は論文 [**Ca4**] で，$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3$ の代りに $\big(\frac{dx}{du}(u)\big)^2 =$ “$x(u)$ の 6 次式”（$u \in \mathbf{C}$）なる微分方程式（の解 $x(u)$）を考へてもうまくいかないと述べてゐる．

5.2. 円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1}-\mathbf{1}$ の場合． この場合（5.1.2）は

$$x(\boldsymbol{u})^{2g-2}x'(\boldsymbol{u})^2=4x^{2g+1}(\boldsymbol{u})-4 \qquad (\,'\text{ は } \tfrac{d}{du} \text{ を表す}). \tag{5.2.1}$$

となる．この（5.2.1）は $\wp'(u)^2=4\wp(u)^3-1$ の類似である．ここで，この曲線 $C: y^2=x^{2g+1}-1$ と Jacobi 多様体 J の自己同型について述べておく．まづ $\zeta=e^{2\pi\sqrt{-1}/(2g+1)}$ とおくと，C には

$$\pm[\zeta^j]: C\to C,\quad (x,y)\mapsto(\zeta^j x,\pm y)\quad (j=0,\cdots,2g)$$

なる自己同型がある．これは $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ の自己同型

$$\pm[\zeta^j]: P_1+\cdots+P_g-g\infty\mapsto(\pm[\zeta^j])P_1+\cdots+(\pm[\zeta^j])P_g-g\infty$$

（$P_1,\cdots,P_g\in C$）を通じて，J の自己同型を与へるので, (4.1.1）と（4.1.2）より

$$-[\zeta](u_1,u_2,\cdots,u_g)=(-\zeta u_1,-\zeta^2u_2,\cdots,-\zeta^g u_g)$$

であることがわかる．つまり

$$x(-[\zeta]\boldsymbol{u})=\zeta x(\boldsymbol{u}),\quad y(-[\zeta]\boldsymbol{u})=-y(\boldsymbol{u}) \tag{5.2.2}$$

である．これより，n が $2(2g+1)$ で割りきれなければ，$C_n=D_n=0$ である．

5.3. 円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1}-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ の場合． この場合（5.1.2）は

$$x(\boldsymbol{u})^{2g-2}x'(\boldsymbol{u})^2=4x^{2g+1}(\boldsymbol{u})-4x(\boldsymbol{u}) \qquad (\,'\text{ は } \tfrac{d}{du} \text{ を表す}). \tag{5.3.1}$$

となる．この（5.3.1）が $\wp'(u)^2=4\wp(u)^3-4\wp(u)$ の類似である．ここで，この曲線 $C: y^2=x^{2g+1}-x$ と Jacobi 多様体 J の自己同型について述べておく．まづ $\zeta=e^{2\pi\sqrt{-1}/(2g)}$ とおくと，C には

$$[\zeta^j]: C\to C,\quad (x,y)\mapsto(\zeta^{2j}x,\zeta^j y)\ (j=0,\cdots,2g)$$

なる自己同型がある．これは $\mathrm{Pic}^\circ(C)$ の自己同型

$$\pm[\zeta^j]: P_1+\cdots+P_g-g\infty\mapsto(\pm[\zeta^j])P_1+\cdots+(\pm[\zeta^j])P_g-g\infty$$

（$P_1,\cdots,P_g\in C$）を通じて J の自己同型を与へるので, (4.1.1）と（4.1.2）により

$$[\zeta](u_1,u_2,\cdots,u_g)=(\zeta u_1,\zeta^3u_2,\cdots,\zeta^{2g-1}u_g),$$

であることがわかる．つまり

$$x([\zeta]\boldsymbol{u})=\zeta^2x(\boldsymbol{u}),\quad y([\zeta]\boldsymbol{u})=\zeta y(\boldsymbol{u}) \tag{5.3.2}$$

である．これより，n が $4g$ で割りきれなければ，$C_n=D_n=0$ である．

6 Clarke 型の定理

6.1. 円分型 $y(u)^2 = x(u)^{2g+1} - 1$ の場合. この場合の $C_{(4g+2)n}$ と $D_{(4g+2)n}$ についての Clarke 型の定理はつぎのとほり：

定理 6.1.1. 各 $C_{(4g+2)n}$ と $D_{(4g+2)n}$ について,

$$\frac{C_{(4g+2)n}}{(4g+2)n} \equiv -\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod (2g+1)\\ (4g+2)n=a(p-1)}} \frac{a|_p{}^{-1} \mod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a \mod \mathbf{Z},$$

$$\frac{D_{(4g+2)n}}{(4g+2)n} \equiv -\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod (2g+1)\\ (4g+2)n=a(p-1)}} \frac{((2g)!a)|_p{}^{-1} \mod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a \mod \mathbf{Z},$$

ただし，$A_p = (-1)^{(p-1)/(4g+2)} \cdot \binom{(p-1)/2}{(p-1)/(4g+2)}$.

これより，明らかに $C_{(4g+2)n}$ と $D_{(4g+2)n}$ に対する次の von Staudt-Clausen 型の定理と von Staudt の第 2 定理の拡張を得る：

系 6.1.2. (1) 各 $C_{(4g+2)n}$ と $D_{(4g+2)n}$ は，ある整数 $G_{(4g+2)n}$ および $H_{(4g+2)n}$ により

$$C_{(4g+2)n} = \sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod (2g+1)\\ p-1|(4g+2)n}} \frac{A_p{}^{(4g+2)n/(p-1)}}{p} + G_{(4g+2)n},$$

$$D_{(4g+2)n} = \sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod (2g+1)\\ p-1|(4g+2)n}} \frac{((2g)!^{-1} \mod p)\ A_p{}^{(4g+2)n/(p-1)}}{p} + H_{(4g+2)n}$$

と書ける．ただし A_p は 6.1.1 のものに同じ．
(2) $p-1 \nmid (4g+2)n$ のとき $C_{(4g+2)n}/((4g+2)n)$ と $D_{(4g+2)n}/((4g+2)n)$ は $\mathbf{Z}_p$ に属する．

証明. $p \equiv 1 \mod (2g+1)$，$(4g+2)m = a(p-1)$ とし，$\mathrm{ord}_p a = \nu$ とする．このとき

$$\frac{(4g+2)m \cdot \left(a|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\nu}\right)}{p^{1+\nu}} \equiv 1 - \frac{1}{p} \mod p^{\nu}\mathbf{Z}$$

であるから

$$\frac{(4g+2)m \cdot \left(a|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\nu}\right)}{p^{1+\nu}} \equiv -\frac{1}{p} \mod \mathbf{Z}.$$

これより主張が従ふ． □

6.2. 円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1}-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ の場合. この場合の C_{4gn} と D_{4gn} についての Clarke 型の定理はつぎのとほり：

定理 6.2.1. 各 C_{4gn} と D_{4gn} について,

$$\frac{C_{4gn}}{4gn}\equiv-\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4g\\ 4gn=a(p-1)}}\frac{a|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}}A_p{}^a \mod \mathbf{Z},$$

$$\frac{D_{4gn}}{4gn}\equiv-\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4g\\ 4gn=a(p-1)}}\frac{((2g)!a)|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}}A_p{}^a \mod \mathbf{Z},$$

ただし，$A_p=(-1)^{(p-1)/(4g)}\cdot\dbinom{(p-1)/2}{(p-1)/(4g)}$.

これより，明らかに C_{4gn} と D_{4gn} に対する次の von Staudt-Clausen 型の定理と von Staudt の第 2 定理の拡張を得る：

系 6.2.2. (1) 各 C_{4gn} と D_{4gn} は，ある整数 G_{4gn} および H_{4gn} により

$$C_{4gn}=\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4g\\ p-1|4gn}}\frac{A_p{}^{4gn/(p-1)}}{p}+G_{4gn},$$

$$D_{4gn}=\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 4g\\ p-1|4gn}}\frac{((2g)!^{-1} \bmod p)\ A_p{}^{4gn/(p-1)}}{p}+H_{4gn}$$

と書ける．ただし A_p は 6.2.1 のものに同じ．
(2) $p-1\nmid 4gn$ のとき $C_{4gn}/(4gn)$ と $D_{4gn}/(4gn)$ は $\mathbf{Z}_p$ に属する．

証明. 6.1.2 と同様である． □

6.3. 分子 $\boldsymbol{A_p}$ についての補足. 素数 p を C が $y^2=x^{2g+1}-1$ で定義されてゐるときは $p\equiv 1 \bmod (2g+1)$ とし，C が $y^2=x^{2g+1}-x$ で定義されてゐるときは $p\equiv 1 \bmod 4g$ とする．いま，$C \bmod p$ の第 1 種微分形式の空間の基底を（4.1.1），つまり

$$\left(\frac{1}{2y},\ \frac{x}{2y},\ \dots,\frac{x^{g-1}}{2y}\right)$$

ととれば，この基底に関する Hasse-Witt 行列（$g\times g$ 型）は，対角行列となり，その $(g,\ g)$ 成分が上記 A_p に他ならない（[**Yu**]，p.381）．Katz が Hurwitz 数の場合に [**Ka**]，p.2 において，“分子”が Hasse invariant（つまり Hasse-Witt 行列の唯一の成分！）に他ならないことを指摘したのであるが，我々の場合，それのきはめて自然な一般化になつてゐる．

7 Kummer 型の合同式

7.1. 円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1} - \mathbf{1}$ の場合. この場合の $C_{(4g+2)n}$ と $D_{(4g+2)n}$ についての，Kummer の original 型合同式はつぎのとほり：

> **定理 7.1.1.** 素数 $p \equiv 1 \mod (2g+1)$ と自然数 a と n，ただし $(4g+2)n-2 \geqq a$，について，$(p-1) \nmid (4g+2)n$ ならば，
>
> $$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} \cdot \frac{C_{(4g+2)n+r(p-1)}}{(4g+2)n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a \mathbf{Z}_{(p)},$$
>
> $$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} \cdot \frac{D_{(4g+2)n+r(p-1)}}{(4g+2)n+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a \mathbf{Z}_{(p)}$$
>
> が成り立つ．ただし
>
> $$A_p = (-1)^{(p-1)/(4g+2)} \cdot \binom{(p-1)/2}{(p-1)/(4g+2)}.$$

この合同式は Kummer の original [**Ku**] の形であり，Hurwitz 数の場合（[**L**]，p.193, (26)）と全然変はらない．

注意 7.1.2. あとで述べる（10.1.1）,（10.1.2）,（10.1.3）を前提とすれば，3.1.1 により 7.1.1 の第 1 式が modulo $p^{\lfloor a/2 \rfloor}$ で成り立つことは明らかである．また（11.1.1）,（11.1.2）,（11.1.3）を前提とすれば，第 2 式が modulo $p^{\lfloor a/2 \rfloor}$ で成り立つことも同様にしてわかる．

7.2. 円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ の場合. この場合の C_{4gn} と D_{4gn} についての Kummer の original 型合同式はつぎのとほり：

> **定理 7.2.1.** 素数 $p \equiv 1 \mod 4g$ と自然数 a と n，ただし $4gn-2 \geqq a$ について，$(p-1) \nmid 4gn$ ならば，
>
> $$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} \cdot \frac{C_{4gn+r(p-1)}}{4gn+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a \mathbf{Z}_{(p)},$$
>
> $$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} \cdot \frac{D_{4gn+r(p-1)}}{4gn+r(p-1)} \equiv 0 \mod p^a \mathbf{Z}_{(p)}$$
>
> が成り立つ．ただし
>
> $$A_p = (-1)^{(p-1)/(4g)} \cdot \binom{(p-1)/2}{(p-1)/(4g)}.$$

この合同式も Kummer の original [**Ku**] の形であり，Hurwitz 数の場合（[**L**]，p.193, (23)）と全然変はらない．

注意 7.2.2. 注意 7.1.2 と同様のことが 7.2.1 についてもいへる．

8 Hurwitz 整な級数

8.1. 定義と基本性質. ここでは Hurwitz 整といふ概念とその基本的な性質を述べる．この論文では，R は，適当な素数 p についての p 進数体 $\mathbf{Q}_p$ の部分環を表す．実際には，素数 p についての $\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]$，$\mathbf{Z}$ の p における局所化 $\mathbf{Z}_{(p)}$，あるいはその p 進完備化 $\mathbf{Z}_p$ などを想定してゐる．

定義 8.1.1. 不定元あるいは複素変数 z に関する冪級数

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\frac{z^n}{n!}\qquad(h_n\in\mathbf{Q}_p)$$

のすべての係数 h_n が R に属するとき，$h(z)$ は R 上 **Hurwitz 整** であるといふ．z に関して R 上 Hurwitz 整な級数の全体を $R\langle\!\langle z\rangle\!\rangle$ と書く．

容易にわかることであるが，与えられた z に関する，R 上の Hurwitz 整な級数の全体は整域をなし，それらは d/dz と積分 $\int_0^z\cdot dz$ で閉じてゐる．また与へられた Hurwitz 整な級数が可逆元（単元）であるためには，その定数項が $R^\times$ に属することが必要十分である．さらに，次のことは容易に示すことができる．また，[**Hu2**] の第 1 節に丁寧に解説されてゐる．

命題 8.1.2. 級数

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\frac{z^n}{n!}\qquad(h_n\in\mathbf{Q}_p)$$

について，

(1) 係数 h_0，$\cdots$，h_{n-1} が R に属し，R 上のある多項式 $F(T_0,T_1,\cdots,T_{n-1})$ でもつて $h(z)$ の導関数に関する

$$h^{(n)}(z)=F(h(z),h'(z),\cdots,h^{(n-1)}(z))$$

の形の関係式が存在するならば $h(z)$ は R 上 Hurwitz 整である．

(2) $h(z)$ が R 上 Hurwitz 整であつて，かつ $h_0=0$ で $h_1=1$ のとき，その（形式的）逆函数 $z=h^{-1}(w)$ の級数展開

$$z=h^{-1}(w)=w+\cdots$$

も R 上 Hurwitz 整である．

(3) $h(z)$ が R 上 Hurwitz 整であつて，かつ $h_0=0$ で $h_1=1$ のとき，任意の自然数 m について

$$\frac{h(z)^m}{m!}$$

は R 上 Hurwitz 整である．

この命題に述べられてゐるもの以外にも Hurwitz 整性の重要な規準がいくつもあるが，まとまつた形では述べにくい．たとへば，8.3 節に述べられてゐるものがさうである．

8.2. $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{1/2}$ の Hurwitz 整性. ここで次の事実を確認しておく.

> **命題 8.2.1.** 曲線 $y^2 = x^{2g+1} - 1$ や $y^2 = x^{2g+1} - x$ に関し,
> $$t := -1/x(\boldsymbol{u})^{1/2} \quad (= u + \cdots) \in \mathbf{Z}\langle\langle u \rangle\rangle.$$

証明. ここでは，簡単の為に $y^2 = x^5 - 1$ についてのみ証明を述べる．以下，簡単に $t' = dt/du$，$t'' = d^2t/du^2$，$\cdots$ と書く．まづ，$dx/du = -2t'/t^3$ と（5.2.1）より

$$(t')^2 = 1 - t^{10}. \tag{8.2.2}$$

この両辺を u で微分し，$2t'$ で割れば

$$t'' = -5t^9 \tag{8.2.3}$$

を得る．$t(0) = t'(0) = 0$ なので，命題 8.1.2（1）により，曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に関し，

$$1/x^{1/2}(\boldsymbol{u}) = -u + 5 \cdot 9!\, \frac{u^{11}}{11!} + \cdots \in \mathbf{Z}\langle\langle u \rangle\rangle \tag{8.2.4}$$

である．□

8.3. $\boldsymbol{1/y^{1/5}(u)}$ の Hurwitz 整性. さらに，次のこともわかる.

> **命題 8.3.1.** 曲線 $y^2 = x^{2g+1} - 1$ や $y^2 = x^{2g+1} - x$ に関し,
> $$s := -1/y(\boldsymbol{u})^{1/(2g+1)} \, (= u + \cdots) \ \in\ \mathbf{Z}\langle\langle u \rangle\rangle.$$

証明. これも $y^2 = x^5 - 1$ についてのみ示しておく．まづ, (5.1.1）により,

$$du = \frac{xdx}{2y} = \frac{x\frac{dx}{dy}dy}{2y} = \frac{xdy}{2y\frac{dy}{dx}} = \frac{xdy}{5x^4} = \frac{dy}{5x^3} = \frac{dy}{5(y^2+1)^{3/5}} \tag{8.3.2}$$

なので

$$\frac{dy}{du} = 5(y^2+1)^{3/5}. \tag{8.3.3}$$

簡単のために $s' = ds/du$，$s'' = d^2s/du^2$ などと書くと $dy/du = -5s^{-6}ds/du$ ゆゑ,

$$s' = -(1 + s^{10})^{3/5} \tag{8.3.4}$$

を得る．この式から帰納法により，各自然数 $n \geqq 1$ に対して s の第 n 次導函数は，有限和の形に

$$s^{(n)} = \sum_j (1 + s^{10})^{L_{nj}/5} P_{nj}(s, s', s'', \cdots, s^{(n-1)}) \tag{8.3.5}$$

と表されることがわかる．ここで P_{nj} は n 文字の $\mathbf{Z}$ 係数多項式であり，L_{nj} は整数を表す．このことと $s(0) = 0$ から $s'(0)$，$s''(0)$，$s^{(3)}(0)$，$\cdots$ がすべて整数であることがわかる．したがつて，曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に関し,

$$1/y(\boldsymbol{u})^{1/5} = -u - 48 \cdot 9!\, \frac{u^{11}}{11!} + \cdots \in \mathbf{Z}\langle\langle u \rangle\rangle \tag{8.3.6}$$

が示された．□

9 証明の方針

ここで曲線 $y^2 = x^5 - 1$ の場合を例にとり，6.1.1，7.1.1（および 6.2.1，7.2.1）の証明方針を述べておく．記号の約束としてはじめに述べたことであるが，与へられた冪級数 $\varphi(z)$ に対して，$\left[\frac{z^n}{n!}\right]\varphi(z)$（$n \geqq 0$）を **Hurwitz 係数** といふ．以下 Hurwitz 係数は u に関して展開したもののことを指す．

9.1. Clarke 型の定理の証明方針． Clarke 型定理の証明は，大きくは，つぎのやうな段階に分かれる．

> **第 1 段** $x(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数 C_n/n と $x^2(\boldsymbol{u}) = (1/t)^4$ に現れる $C_n^{(4)}/(n)_4$ とについて，それの Clarke 型定理を $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上で証明する．
>
> **第 2 段** $y(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数 D_n/n について，それの Clarke 型定理を $\mathbf{Z}[\frac{1}{5}]$ 上で証明する．
>
> **第 3 段** 函数 $x(\boldsymbol{u})$，$x^2(\boldsymbol{u})$，$y(\boldsymbol{u})$ の間の $D = d/du$ を介した単純な関係を使つて，それらの Hurwitz 係数を結びつけることにより，目標の定理，つまり，上記第 1 段と第 2 段の両者が $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \cap \mathbf{Z}[\frac{1}{5}]$ 上で成り立つことを証明する．

もう少し詳く述べる．

第 1 段： まづ，$x^{1/2}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数 $C_{10m}^{(1)}/(10m)$ に関する Clarke 型の定理を $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上で具体的に与へる（10.1.7）．さらに

$x(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $x^{1/2}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（10.2.4），
$x^{3/2}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $x(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（10.3.4），
$x^2(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $x^{3/2}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（10.4.4）

をそれぞれ与へる．これらの関係から，これら Hurwitz 係数に関する $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上の Clarke 型の定理が得られる．その際，$t = x^{-1/2}(\boldsymbol{u})$ の逆函数の Carlitz 係数（巻頭の記号の約束）についての性質（10.1.3）が必要である．以上から得られる $x^2(\boldsymbol{u}) = \left(x^{1/2}(\boldsymbol{u})\right)^4$ の Hurwitz 係数 $C_{10m}^{(4)}/(10m)_4$ についての Clarke 型の定理（10.5.3）が 第 3 段 で重要になる．

第 2 段： まづ第 11.1 節で，$y^{1/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数 $D_{10m}^{(1)}/(10m)_4$ についての Clarke 型の定理（11.1.7）を証明する．その際，$s = y^{-1/5}(\boldsymbol{u})$ の逆函数の Carlitz 係数についての性質（11.1.3）が必要である．さらに

$y^{2/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $y^{1/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（11.2.4），
$y^{3/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $y^{2/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（11.3.4），
$y^{4/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $y^{3/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（11.4.4），
$y(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数と $y^{4/5}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数との関係（11.5.4）

をそれぞれ与へる．これらを総合し $y(\boldsymbol{u}) = \left(y^{1/5}(\boldsymbol{u})\right)^5$ の Hurwitz 係数 $D_{10m}/(10m)$ が $D_{10m}^{(1)}/(10m)$ に結び付けられる（（11.6.1）と（11.6.2））．これで，$D_{10m}/(10m)$ に対する $\mathbf{Z}[\frac{1}{5}]$ 上での Clarke 型の定理（11.6.3）が示される．以上が 第 2 段 の概要である．

第 3 段： 以後 $D = d/du$ とする．はじめに

$$(Dx^2)(\boldsymbol{u}) = 4y(\boldsymbol{u})$$

を使つて D_{10m} と $C_{10m}^{(4)}$ とが本質的に同一のものであることが示される．$D_{10m}/(10m) \in \mathbf{Z}_{(2)}$ ゆゑ $C_{10m}^{(4)}/(10m)_4$ の分母には 2 の冪も 5 の冪も現れないことがわかり，結局 $D_{10m}/(10m)$ に関する $\mathbf{Z}$ 上の Clarke 型の定理（(12.1.4)，つまり定理 6.1.1 の第 2 式）が完成する．最後に $D = d/du = (2y/x)d/dx$ について

$$D^2x(\boldsymbol{u}) = 6x^2(\boldsymbol{u}) + \frac{4}{x^3(\boldsymbol{u})}$$

であることと（8.2.4）で示した $1/x^3(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 整性により，$C_{10m}^{(4)}/(10m)_4$ に $C_{10m}/(10m)$ を直接に結びつけることができ，これによつて $C_{10m}/(10m)$ についての Clarke 型の定理（定理 6.1.1 の第 1 式）の証明が完成する．

以上が方針の概略である．ちなみに，織田孝幸氏から，この証明で頻繁に使はれてゐる，ひとつの冪級数について，それの異なる冪の冪級数展開の Hurwitz 係数と逆函数の Carlitz 係数を結びつける方法（第 11 節と第 12 節）も，(命題 1.2.1 に述べた）Lagrange の逆函数定理の一変種であることを教へて頂いた．関心のある読者には [**W**]，pp.128-133 （Lagrange-Bürmann の公式）や [**Co**]，pp.148-153 を見られたい．

また，高階の普遍 Bernoulli 数なるもの（つまり上記のやうな元の級数 $1/t$ の冪の Hurwitz 係数の普遍版）についての合同式が [**Ad1**, Theorem 3.4] に述べられてゐる．これは我々の方法と深く関係すると思はれるが，筆者はそれを利用することができなかつた．

9.2. Kummer 型の合同式の証明方針． 以下では素数 $p \equiv 1 \bmod 5$ を固定して考へる．ここでは C_{10m} についてのみ述べるが，D_{10m} についても同様である．Kummer 型の合同式の証明は，つぎのやうに示される．

第 1 段 函数 $u \mapsto t = x(\boldsymbol{u})^{-1/2}$ の逆函数が与へる冪級数 $u(t) \in \mathbf{Z}_p\langle\langle t\rangle\rangle$ が本田の規準（13.1.10）を満すことを確かめる（(13.1.10)）．そのことから，これを形式的対数とする形式群 F，つまり

$$F(t_1, t_2) := u^{-1}(u(t_1) + u(t_2))$$

は $\mathbf{Z}_p$ 上に定義されるといふことが従ふ（定理 13.1.1）．

第 2 段 次に Hochshild の公式といふものと $u(t)$ についての本田の規準（13.1.10）を使ひ，級数 $t = t(u) = x(\boldsymbol{u})^{-1/2} \in \mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle$ について

$$\Big(\big(\tfrac{d}{du}\big)^p - A_p \tfrac{d}{du}\Big)t(u) \in p\mathbf{Z}_p[[t(u)]] \tag{9.2.1}$$

であることを証明する（第 13.2 節）．

第 3 段 いま $\xi \in \mathbf{Z}_p$ を 1 の原始 $p-1$ 乗根とすると，上記の F から定まる ξ 倍，即ち

$$F_\xi(t) := u^{-1}\big(\xi u(t)\big) = \xi t + \cdots$$

は上のことから $\xi t + t^2\mathbf{Z}_p[[t]]$ に属する．ここで我々は混乱を避けるために $x\langle u\rangle = x(\boldsymbol{u}) \in \frac{1}{u^2} + \mathbf{Q}_p[[u]]$ と書くことにする．この $F_\xi(t)$ のお陰で容易に

$$x\langle u(t)\rangle - \xi^2 x\langle \xi u(t)\rangle \in \mathbf{Z}_p[[t]] \tag{9.2.2}$$

がわかる．最後に（9.2.1）と（9.2.2）を合せれば整数 $a > 0$ について

$$\Big(\big(\tfrac{d}{du}\big)^p - A_p \tfrac{d}{du}\Big)^a \big(x\langle u(t)\rangle - \xi^2 x\langle \xi u(t)\rangle\big) \in p^a\mathbf{Z}_p[[t]] \subset p^a\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle \tag{9.2.3}$$

が得られるが，これの $u^{10n-a-2}/(10n-a-2)!$ の係数が 7.1.1 （の第 1 式）の左辺に他ならないので，これで証明が完結する．

さらに，先に述べた $C_{10m}^{(\nu)}$ や $D_{10m}^{(\nu)}$ についても Kummer 型の合同式が成り立つことが同様に示せる（第 14.1 節を参照）．

$\boxed{10}$ $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上での $x(\boldsymbol{u})$ に関する Clarke 型の定理

この節は，曲線 $y^2 = x^5 - 1$ についてのみ述べてある．

10.1. $x(\boldsymbol{u})^{1/2}$ に関する Clarke 型の定理．曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に対する $u \mapsto \sqrt{x(\boldsymbol{u})}$ の逆函数を考へる．すなはち，

$$t = \frac{-1}{x^{1/2}(\boldsymbol{u})}$$

とおき， u を t の冪級数に展開する．つまり

$$\begin{aligned}
u &= \int_\infty^x \frac{xdx}{2y} \\
&= \int_0^{-t} \frac{\frac{1}{t^2}\cdot\left(-\frac{2dt}{t^3}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{t^{10}}-1}} \\
&= -\int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt{1-t^{10}}}dt \\
&= -\int_0^{-t} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}t^{10m}\right)dt \\
&= t + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m+1}}{10m+1}.
\end{aligned}$$

引用のために再記しておく：

$$u = t + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m+1}}{10m+1}. \tag{10.1.1}$$

ここで，普遍 Bernoulli 数との対応を考慮して

$$f_{10m} = (-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m} \tag{10.1.2}$$

と書く．1.3.1 と（1.3.2）により

$$f_{10m} \in \mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.1.3}$$

これ以外の f_n は $f_n = 0$ である．このとき，普遍 Bernoulli 数をその番号で割つた $\hat{B}_{10m}/(10m)$ は $C_{10m}^{(1)}/(10m)$ に特殊化されるが，2.2.5 の表示から

$$\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} \ \in\ 3!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.1.4}$$

となることを以下のやうに示すことができる．そのために 3.3.1 を $p = 2$ および $p = 3$ について適用する．今の場合は $f_{2-1} = 0$，$f_{3-1} = 0$ であることに注意すると，$U_{2-1} = U_{3-1} = 0$ なる分割 U のみ考へればよい．ここで，

$$w(U) = 10m \geqq 10,\ \ d(U) \geqq 1$$

なので

$$\mathrm{ord}_2(\tau_U) \geqq \lfloor \tfrac{10+1-2}{4} \rfloor = 2, \quad \mathrm{ord}_3(\tau_U) \geqq \lfloor \tfrac{10+1-2}{6} \rfloor = 1.$$

よつて $C^{(1)}_{10m}/(10m)$ の 2.2.5 の表示において，そのすべての係数は 3! で割れる．これと（10.1.3）より（10.1.4）がわかる．

また，$p = 10m+1$ が素数のとき，上記の係数 f_{p-1} は mod p でみれば，曲線 C mod p の Hasse-Witt 行列の $(2,2)$ 成分 A_p に他ならない：

$$f_{p-1} = (-1)^{(p-1)/10}\binom{-\frac{1}{2}}{\frac{p-1}{10}} \equiv A_p \mod p. \tag{10.1.5}$$

詳しくは付録（18.1 節）を参照されたい．

以上の考察を元に，我々は函数 $u \mapsto x(\boldsymbol{u})^{1/2}$ の $u=0$ における Laurent 級数展開について，Clarke の定理を適用する．即ち，上記の $1/t$ の u に関する展開を

$$\frac{1}{t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C^{(1)}_{10m}}{10m} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} \tag{10.1.6}$$

と書くと，命題 2.3.1 と（10.1.4）により，上記の係数 $C^{(1)}_{10m}$ について，

$$\boxed{\frac{1}{3!}\frac{C^{(1)}_{10m}}{10m} \in \sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 5 \\ 10m=a(p-1)}} \frac{(3!a)|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a + \mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \qquad (10.1.7)}$$

となることがわかる．

10.2. $\boldsymbol{x(u)^{1/2}}$ の Hurwitz 係数と $\boldsymbol{x(u)}$ の Hurwitz 係数の関係． $y^2 = x^5 - 1$ における $x(\boldsymbol{u})$ について述べる．いま

$$t = \frac{-1}{x(\boldsymbol{u})^{1/2}} \quad (= u + \cdots)$$

について

$$\frac{1}{t^2} = x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{u^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} \tag{10.2.1}$$

と展開しておく．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^u \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{u^2}\right)du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}\right)du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!}.\end{aligned} \tag{10.2.2}$$

一方（10.1.1）を u で微分したのち t^2 で割ると

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2}\frac{dt}{du} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}t^{10m-2}\frac{dt}{du} \tag{10.2.3}$$

を得る．つまり

$$\int_0^u \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{u^2}\right)du = \left(-\frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m-1}}{10m-1}\right) + \frac{1}{u}.$$

これを（10.2.2）と等置し，先の（10.1.6）を使へば，

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} \\ &\qquad = \left(-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m}\frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m-1}}{10m-1}\right) + \frac{1}{u}.\end{aligned}$$

ここで，$C_0^{(1)} = 1$ に注意して，u の負冪項を消去して，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m}\frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m-1}}{10m-1}.$$

この右辺は，1.3.1，8.1.2（3），(8.2.4）により u に関して $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上 Hurwitz 整な級数である．しかも（10.1.3）が成り立つてゐる．それゆゑ，左辺の係数について

$$\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \in (10\cdot 1-2)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \subset 3!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.2.4}$$

を得る．ここで，定義より $C_{10m}/(10m) = C_{10m}^{(2)}/(10m)_2$ ゆゑ，(10.2.4）から

$$\frac{C_{10m}}{10m} \in -\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + 3!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.2.5}$$

である．これと（10.1.7）とを合せて，C_{10m} に関する，$\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上での Clarke 型の定理が証明されたことになる．しかし，それを $\mathbf{Z}$ 上の Clarke の定理にまで高めるには，第 9.1 節で述べたやうな遠周りをしなければならない．

10.3. $\boldsymbol{x(u)}$ の Hurwitz 係数と $\boldsymbol{x(u)^{3/2}}$ の Hurwitz 係数の関係. ここでは, $y^2=x^5-1$ における $x(\boldsymbol{u})$ について $x^{3/2}(\boldsymbol{u})$ と $x(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数を比較する. いま

$$t=\frac{-1}{x(\boldsymbol{u})^{1/2}}\quad(=u+\cdots)$$

について

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^3}&=-x^{3/2}(\boldsymbol{u})\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3}\frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!}\qquad(C_0^{(3)}=1)\end{aligned}\tag{10.3.1}$$

と展開しておく. このとき

$$\begin{aligned}\int_0^u\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{u^3}\right)du&=\int_0^u\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3}\frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!}\right)du\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}.\end{aligned}\tag{10.3.2}$$

一方 (10.1.1) を u で微分したのち t^3 で割ると

$$\frac{1}{t^3}=\frac{1}{t^3}\frac{dt}{du}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}t^{10m-3}\frac{dt}{du}\tag{10.3.3}$$

を得る. つまり

$$\int_0^u\left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{u^3}\right)du=\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m-3}}{10m-3}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}.$$

これを (10.3.2) と等置し, 先の (10.2.1) を使へば,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}\\&\quad=\left(-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m-2}}{10m-2}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}.\end{aligned}$$

ここで, $C_0^{(2)}=1$ に注意して, u の負冪項を消去して,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3}\frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}=2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{m}\frac{t^{10m-2}}{10m-2}.$$

この右辺は, 1.3.1, 8.1.2 (3), (8.2.4) より u に関して $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上 Hurwitz 整な級数である. しかも (10.1.3) が成り立つてゐる. それゆゑ, 左辺の係数について

$$\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}+\frac{2C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3}\in(10\cdot1-3)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}]\subset3!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}]\tag{10.3.4}$$

を得る.

10.4. $\boldsymbol{x(u)^{3/2}}$ の Hurwitz 係数と $\boldsymbol{x(u)^2}$ の Hurwitz 係数の関係. ここでは，$y^2 = x^5 - 1$ における $x(\boldsymbol{u})$ について $x^2(\boldsymbol{u})$ と $x(\boldsymbol{u})^{3/2}$ の Huriwtz 係数を比較する．いま

$$t = \frac{-1}{x(\boldsymbol{u})^{1/2}} \quad (= u + \cdots)$$

について

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^4} &= x^2(\boldsymbol{u}) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} \qquad (C_0^{(4)} = 1)\end{aligned} \tag{10.4.1}$$

と展開しておく．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^u \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{u^4}\right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}\right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!}.\end{aligned} \tag{10.4.2}$$

一方（10.1.1）を u で微分したのち t^4 で割ると

$$\frac{1}{t^4} = \frac{1}{t^4}\frac{dt}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} t^{10m-4} \frac{dt}{du}. \tag{10.4.3}$$

を得る．つまり

$$\int_0^u \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{u^4}\right) du = \left(-\frac{1}{3}\frac{1}{t^3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} \frac{t^{10m-3}}{10m-3}\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{u^3}.$$

これを（10.4.2）と等置し，先の（10.3.1）を使へば,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} \\ &\qquad = \left(-\frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} \frac{t^{10m-3}}{10m-3}\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{u^3}.\end{aligned}$$

ここで，$C_0^{(3)} = 1$ に注意して，u の負冪項を消去して,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} = 3\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} \frac{t^{10m-3}}{10m-3}.$$

この右辺は，1.3.1，8.1.2（3），(8.2.4) により u に関して $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上 Hurwitz 整な級数である．しかも （10.1.3）が成り立つてゐる．それゆゑ，左辺の係数について

$$\frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} + \frac{3C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in (10\cdot 1 - 4)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \subset 3!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.4.4}$$

を得る．

10.5. $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ 上での $x(\boldsymbol{u})^2$ に関する Clarke 型の定理. 第 10 節のここまでのことをまとめておく．すなはち（10.2.4），(10.3.4)，(10.4.4）により結局

$$\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + 3!\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in\ 3!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.5.1}$$

が得られた．つまり

$$\frac{1}{3!}\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in \mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \tag{10.5.2}$$

が得られる．これと 10.1.7 により,

$$\boxed{\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in\ -\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 5\\ 10m=a(p-1)}} \frac{((3!a)|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a + \mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}]} \tag{10.5.3}$$

となることがわかる．とくに

$$\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in \mathbf{Z}_{(5)} \tag{10.5.4}$$

であることに注意する．

$\boxed{11}$ $\mathbf{Z}[\frac{1}{5}]$ 上での $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})$ に関する Clarke 型の定理の証明

この節も，曲線 $y^2 = x^5 - 1$ についてのみ述べてある．

11.1. $\boldsymbol{y}^{1/5}(\boldsymbol{u})$ に対する Clarke 型の定理.

曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に対する $u \mapsto y(\boldsymbol{u})^{1/5}$ の逆函数を考へる．すなはち，

$$y(\boldsymbol{u}) = -1/s^5$$

とおき， u を s の冪級数に展開する．つまり

$$\begin{aligned}
u &= \int_{\infty}^{x} \frac{xdx}{2y} = \int_{\infty}^{y} \frac{x}{2y}\frac{dx}{dy}dy = \int_{\infty}^{y} \frac{x}{5x^4}dy = \int_{\infty}^{y} \frac{1}{5x^3}dy \\
&= \int_{\infty}^{y} \frac{1}{5(y^2+1)^{3/5}}dy = \int_{0}^{s} \frac{\frac{5ds}{s^6}}{5(\frac{1}{s^{10}}+1)^{3/5}} \\
&= \int_{0}^{s} \frac{1}{(1+s^{10})^{3/5}}ds \\
&= \int_{0}^{s} \left(1 - \frac{1}{1!}\frac{3}{5}s^{10} + \frac{1}{2!}\frac{3}{5}\frac{8}{5}s^{20} - \frac{1}{3!}\frac{3}{5}\frac{8}{5}\frac{13}{5}s^{30} + \cdots\right)ds \\
&= \int_{0}^{s} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} s^{10m}\right)ds \\
&= s + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m+1}}{10m+1}.
\end{aligned}$$

引用のために再記すると

$$u = s + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m+1}}{10m+1}. \tag{11.1.1}$$

ここで，普遍 Bernoulli 数との対応を考慮して

$$f_{10m} = \binom{-\frac{3}{5}}{m} \tag{11.1.2}$$

と書く．1.3.1 と（1.3.2）により

$$f_{10m} \in \mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}] \tag{11.1.3}$$

これ以外の f_n は $f_n = 0$ である．このとき，普遍 Bernoulli 数をその番号で割つた $\hat{B}_{10m}/(10m)$ は $D^{(1)}_{10m}/(10m)$ に特殊化されるが，2.2.5 の表示を使つて

$$\frac{D^{(1)}_{10m}}{10m} \ \in \ 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}] \tag{11.1.4}$$

となることを示さう．そのために 3.3.1 を $p = 2$ および $p = 3$ について適用する．今の場合は $f_{2-1} = 0$，$f_{3-1} = 0$ であることに注意すると，$U_{2-1} = U_{3-1} = 0$ なる分割

U のみ考へればよい．もし $m=1$ ならば $D_{10}^{(1)}/10=(3/5)(9!/11)=2^7 3^5 7/11$ であり，これは 4! で割れる．また $m \geqq 2$ であれば

$$w(U)=10m \geqq 20,\ \ d(U) \geqq 1$$

なので

$$\mathrm{ord}_2(\tau_U) \geqq \lfloor \tfrac{20+1-2}{4} \rfloor = 4, \quad \mathrm{ord}_3(\tau_U) \geqq \lfloor \tfrac{20+1-2}{6} \rfloor = 3.$$

よつて $D_{10m}^{(1)}/(10m)$ の 2.2.5 の表示において，そのすべての係数は 4! で割れる．これと（11.1.3）より（11.1.4）がわかる．

また，$p=10m+1$ と表せるやうな素数 p に関し，上記の係数 f_{p-1} は，やはり，曲線 $C \bmod p$ の Hasse-Witt 行列の $(2,2)$ 成分 A_p （(10.1.5) でも登場）に他ならない：

(11.1.5) $$f_{p-1} = -\binom{-\frac{3}{5}}{\frac{p-1}{10}} \equiv A_p \mod p.$$

この証明は付録 18.1 を見よ．

さて，以上の考察を元に我々は函数 $u \mapsto -y(\boldsymbol{u})^{1/5}$ の $u=0$ における Laurent 級数展開について Clarke の定理を適用する．即ち，上記の $1/s$ の u に関する展開を

(11.1.6) $$\frac{1}{s} = \sum_{m=0}^{\infty} D_{10m}^{(1)} \frac{u^{10m-1}}{(10m)!}$$

と書くと，命題 2.3.1 と（11.1.4）により，上記の係数 $D_{10m}^{(1)}$ について，

(11.1.7) $$\boxed{\frac{1}{4!}\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \in -\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 5\\ 10m=a(p-1)}} \frac{(4!a)|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a + \mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}]}$$

となることがわかる．

11.2. $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^{1/5}$ の Hurwitz 係数と $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^{2/5}$ の Hurwitz 係数の関係. ここでは, $y^2 = x^5 - 1$ における $y(\boldsymbol{u})$ について $y^{2/5}(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})^{1/5}$ の Hurwitz 係数を比較する．いま

$$s = \frac{-1}{y(\boldsymbol{u})^{1/5}} \quad (= u + \cdots)$$

について

$$\frac{1}{s^2} = y(\boldsymbol{u})^{2/5} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} \qquad (D_0^{(2)} = 1) \tag{11.2.1}$$

と展開しておく．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^u \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{u^2}\right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}\right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!}.\end{aligned} \tag{11.2.2}$$

一方（11.1.1）を u で微分したのち s^2 で割ると

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}\frac{ds}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} s^{10m-2} \frac{ds}{du} \tag{11.2.3}$$

を得る．つまり

$$\int_0^u \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{u^2}\right) du = \left(-\frac{1}{s} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-1}}{10m-1}\right) + \frac{1}{u}.$$

これを（11.2.2）と等置し，先の（11.1.6）を使へば,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} \\ &\qquad = \left(-\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-1}}{10m-1}\right) + \frac{1}{u}.\end{aligned}$$

ここで，$D_0^{(1)} = 1$ に注意して，u の負冪項を消去して,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-1}}{10m-1}.$$

この右辺は 8.1.2 (3) と（8.3.6）により u に関して Hurwitz 整な級数である.（11.1.3）によつて，左辺の係数について

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \in (10\cdot 1 - 2)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \subset 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}] \tag{11.2.4}$$

を得る.

11.3. $y(\boldsymbol{u})^{2/5}$ の Hurwitz 係数と $y(\boldsymbol{u})^{3/5}$ の Hurwitz 係数の関係. ここでは, $y^2 = x^5 - 1$ における $y(\boldsymbol{u})$ について $y^{3/5}(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})^{2/5}$ の Huruwitz 係数を比較する．いま

$$s = \frac{-1}{y(\boldsymbol{u})^{1/5}} \quad (\,= u + \cdots)$$

について

$$\frac{1}{s^3} = -y(\boldsymbol{u})^{3/5} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} \qquad (D^{(3)}_0 = 1) \tag{11.3.1}$$

と展開しておく．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^u \left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{u^3}\right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-2)!}\right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!}\end{aligned} \tag{11.3.2}$$

一方（11.1.1）を u で微分したのち s^3 で割ると

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{s^3} \frac{ds}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} s^{10m-3} \frac{ds}{du} \tag{11.3.3}$$

を得る．つまり

$$\int_0^u \left(\frac{1}{s^3} - \frac{1}{u^3}\right) du = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-2}}{10m-2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}.$$

これを（11.3.2）と等置し，先の（11.2.1）を使へば,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} \\ &\qquad = \left(-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{(2)}_{10m}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-2}}{10m-2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}.\end{aligned}$$

ここで，$D^{(2)}_0 = 1$ に注意して，u の負冪項を消去して 2 倍し,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(2)}_{10m}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} = 2\sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-2}}{10m-2}.$$

この右辺は 8.1.2 (3) と（8.3.6）により u に関して Hurwitz 整な級数である.（11.1.3）によつて，左辺の係数について

$$\frac{D^{(2)}_{10m}}{(10m)_2} + \frac{2D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \in (10\cdot 1 - 3)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \subset 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}] \tag{11.3.4}$$

を得る.

11.4. $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^{3/5}$ の Hurwitz 係数と $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^{4/5}$ の展開係数の関係. ここでは，$y^2 = x^5-1$ における $y(\boldsymbol{u})$ について $y^{4/5}(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})^{3/5}$ の Hurwitz 係数を比較する．いま

$$s = \frac{-1}{y(\boldsymbol{u})^{1/5}} \quad (\, = u + \cdots)$$

について

$$\frac{1}{s^4} = y(\boldsymbol{u})^{4/5} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} \qquad (D^{(4)}_0 = 1) \tag{11.4.1}$$

と展開しておく．このとき

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{s^4} - \frac{1}{u^4}\right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}\right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} \end{aligned} \tag{11.4.2}$$

一方（11.1.1）を u で微分したのち s^4 で割ると

$$\frac{1}{s^4} = \frac{1}{s^4}\frac{ds}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} s^{10m-4} \frac{ds}{du} \tag{11.4.3}$$

を得る．つまり

$$\int_0^u \left(\frac{1}{s^4} - \frac{1}{u^4}\right) du = -\frac{1}{3}\frac{1}{s^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{u^3} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-3}}{10m-3}.$$

これを（11.4.2）と等置し，先の（11.3.1）を使へば,

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} \\ &\qquad = \left(\frac{-1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-3}}{10m-3}\right) + \frac{1}{3}\frac{1}{u^3}. \end{aligned}$$

ここで，$D^{(3)}_0 = 1$ に注意して，u の負冪項を消去して 3 倍し，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} = 3\sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{s^{10m-3}}{10m-3}.$$

この右辺は 8.1.2 (3) と（8.3.6）により u に関して Hurwitz 整な級数である.（11.1.3）によつて，左辺の係数について

$$\frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3} + \frac{3D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4} \in (10\cdot 1 - 4)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}] \subset 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}] \tag{11.4.4}$$

を得る．

11.5. $\boldsymbol{y(u)^{4/5}}$ の Hurwitz 係数と $\boldsymbol{y(u)}$ の Hurwitz 係数の関係. ここでは，$y^2=x^5-1$ における $y(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})^{4/5}$ の Hurwitz 係数を比較する．いま

$$s=\frac{-1}{y(\boldsymbol{u})^{1/5}}\quad (=u+\cdots)$$

について

$$\frac{1}{s^5}=-y(\boldsymbol{u})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5}\frac{u^{10m-5}}{(10m-5)!}\qquad (D_0^{(5)}=1) \tag{11.5.1}$$

と展開しておく．このとき

$$\begin{aligned}\int_0^u\left(\frac{1}{s^5}-\frac{1}{u^5}\right)du&=\int_0^u\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5}\frac{u^{10m-5}}{(10m-5)!}\right)du\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5}\frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}\end{aligned} \tag{11.5.2}$$

一方（11.1.1）を u で微分したのち s^5 で割ると

$$\frac{1}{s^5}=\frac{1}{s^5}\frac{ds}{du}+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{3}{5}}{m}s^{10m-5}\frac{ds}{du} \tag{11.5.3}$$

を得る．つまり

$$\int_0^u\left(\frac{1}{s^5}-\frac{1}{u^5}\right)du=-\frac{1}{4}\frac{1}{s^4}+\frac{1}{4}\frac{1}{u^4}+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{3}{5}}{m}\frac{s^{10m-4}}{10m-4}.$$

これを（11.5.2）と等置し，先の（11.4.1）を使へば,

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5}\frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}\\&\qquad=\left(\frac{-1}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4}\frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{3}{5}}{m}\frac{s^{10m-4}}{10m-4}\right)+\frac{1}{4}\frac{1}{u^4}.\end{aligned}$$

ここで，$D_0^{(4)}=1$ に注意して，u の負冪項を消去して 4 倍し，

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4}\frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5}\frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!}=4\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{3}{5}}{m}\frac{s^{10m-4}}{10m-4}.$$

この右辺は 8.1.2 (3) と (8.3.6) により u に関して Hurwitz 整な級数である. (11.1.3) によつて，左辺の係数について

$$\frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4}+\frac{4D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5}\in(10\cdot 1-5)!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{2}]\subset 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}] \tag{11.5.4}$$

を得る.

11.6. $\mathbf{Z}[\frac{1}{5}]$ 上での $y(\boldsymbol{u})$ に関する Clarke 型の定理. この節での以上の考察により，次の 4 つのことが示されたのであつた（(11.2.4) , (11.3.4) , (11.4.4) , (11.5.4)）：

$$\frac{D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4}+4\frac{D^{(5)}_{10m}}{(10m)_5}\in 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}],$$
$$\frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3}+3\frac{D^{(4)}_{10m}}{(10m)_4}\in 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}],$$
$$\frac{D^{(2)}_{10m}}{(10m)_2}+2\frac{D^{(3)}_{10m}}{(10m)_3}\in 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}],$$
$$\frac{D^{(1)}_{10m}}{10m}+\frac{D^{(2)}_{10m}}{(10m)_2}\in 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}].$$

ゆゑに

$$\frac{D^{(1)}_{10m}}{10m}-4!\frac{D^{(5)}_{10m}}{(10m)_5}\in 4!\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}]. \tag{11.6.1}$$

である．よつて

$$\frac{1}{4!}\frac{D^{(1)}_{10m}}{10m}-\frac{D^{(5)}_{10m}}{(10m)_5}\in \ \mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}].$$

ここで $y(\boldsymbol{u})=-1/s(\boldsymbol{u})^5$ ゆゑ

$$\frac{D_{10m}}{10m}=\frac{D^{(5)}_{10m}}{(10m)_5}. \tag{11.6.2}$$

これと 11.1.7 を合はせれば，第 11 節の目的であつた次の事実が得られる：

$$\boxed{\frac{D_{10m}}{(10m)}\in\ -\sum_{\substack{p\equiv 1 \mod 5\\ 10m=a(p-1)}}\frac{(4!a|_p)^{-1}\mathrm{mod}\ p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}}A_p{}^a+\mathbf{Z}[\tfrac{1}{5}]} \tag{11.6.3}$$

と書ける．

12 Z 上での $x(u)$ と $y(u)$ に関する Clarke 型の定理の証明

この節も，曲線 $y^2 = x^5 - 1$ についてのみ述べてある．

12.1. $y(u)$ の Hurwitz 係数と $x^2(u)$ の Hurwitz 係数の関係. いま

$$x^2(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{t^4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} \tag{12.1.1}$$

とおく．しかるに $D = d/du = (2y/x)d/dx$ について

$$D(x^2) = 2xDx = 2x\tfrac{2y}{x} = 4y \tag{12.1.2}$$

なので

$$\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} = 4\frac{D_{10m}}{10m}. \tag{12.1.3}$$

ゆゑに，(10.5.3) と (11.6.3) から $C_{10m}^{(4)}/(10m)_4$ の分母の因子として 2 は現れず，$C_{10m}^{(4)}/(10m)_4$ は

$$\boxed{\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in -\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 5 \\ 10m=a(p-1)}} \frac{(3!a)|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a + \mathbf{Z}} \tag{12.1.4}$$

を満す．さらに $\frac{1}{4}\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} = \frac{D_{10m}}{10m}$ であるが，

$$\frac{D_{10m}}{10m} \in \mathbf{Z}\Big[\frac{1}{5},\ \frac{1}{p}\ ;\ p \equiv 1 \bmod 5,\ p-1|10m\Big] \subset \mathbf{Z}_{(2)}$$

なので，$D_{10m}/(10m)$ の分母には 2 が現れない．よつて $C_{10m}^{(4)}/(10m)_4$ の分子は 4 で割りきれるはずである．以上のことと (11.6.3) から，

$$\frac{D_{10m}}{10m} \in -\sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 5 \\ 10m=a(p-1)}} \frac{(4!a)|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a + \mathbf{Z} \tag{12.1.5}$$

となることがわかつた．これが定理 6.1.1 の第 2 式である．

12.2. $\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数から $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ の Hurwitz 係数へ. 最後に

$$D^2 x = D\frac{2y}{x} = 6x^2 + \frac{4}{x^3} \quad \text{（ただし，} D = \tfrac{d}{du} = \tfrac{2y}{x}\tfrac{d}{dx}\text{）} \tag{12.2.1}$$

を使ふ．微分方程式（5.2.1）の両辺に D を施して変形すれば，容易に

$$D^2\Big(\frac{1}{x}\Big) = 3\frac{1}{x}\Big(D\frac{1}{x}\Big)^2 - 10 \tag{12.2.2}$$

が得られる．従つて 8.1.3（2）から $1/x(\boldsymbol{u})$ は u の Hurwitz 整な級数であり，$1/x^3$ もさうである．このことは, (8.2.4) でも述べた. (12.2.1) と (12.2.2) より

$$\frac{C_{10m}}{10m} = 6 \cdot \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} + \text{“ 整数 ”} \tag{12.2.3}$$

である．つまり, (12.1.4) を使へば，適当な整数 $G_{10m} \in \mathbf{Z}$ でもつて

$$\begin{aligned} \frac{C_{10m}}{10m} &= 3!\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} + \text{“ 整数 ”} \\ &= G_{10m} - \sum_{\substack{p\equiv 1 \bmod 5 \\ 10m=a(p-1)}} \frac{a|_p{}^{-1} \bmod p^{1+\mathrm{ord}_p a}}{p^{1+\mathrm{ord}_p a}} A_p{}^a \end{aligned} \tag{12.2.4}$$

と書かれることがわかる．これこそが目的の等式であつた．

13 Kummer 型の合同式の証明（安田）

これより安田による定理 7.1.1（および 定理 7.2.1）の証明を [**Ya2**] に沿つて述べる．

13.1. 形式群と本田の規準． ここでは（10.1.1）や（11.1.1）がそれぞれ，$\mathbf{Z}_p$ 上のある形式群の形式的対数になつてゐることを示す．

> **命題 13.1.1.** もし $\mathbf{Q}_p$ 上の不定元 t に関する冪級数 $u(t) \in \mathbf{Q}_p[[t]]$ がある $\beta \in \mathbf{Z}_p$ について
>
> (13.1.2) $$pu(t) - \beta u(t^p) \in p\mathbf{Z}_p[[t]]$$
>
> を満せば，
>
> (13.1.3) $$F(t_1, t_2) := u^{-1}(u(t_1) + u(t_2))$$
>
> で定義される F は $\mathbf{Z}_p$ 上の形式群を与へる．ここで $u^{-1}(t)$ は $u^{-1}(u(t)) = t$ となる級数（$\in \mathbf{Q}_p[[t]]$）を示す．特に，$\alpha \in \mathbf{Z}_p$ に関して，
>
> (13.1.4) $$F_\alpha(t) := u^{-1}(\alpha u(t)) \in \alpha t + t^2\mathbf{Z}_p[[t]]$$
>
> である．

これは本田 [**Ho**]，p. 223，Theorem 2 を $n = 1$，$q = p$，$P = 1$，$u = p - \beta T$，$f = u(t)$ としたものである．我々はこの定理を（10.1.1）の $t \mapsto u = u_g$ と（11.1.1）の $s \mapsto u$ に対して適用しなくてはならない．

そのために，p 進 $\mathit{\Gamma}$ 函数

(13.1.5) $$\mathit{\Gamma}_p : \mathbf{Z}_p \to {\mathbf{Z}_p}^\times$$

を思ひ出す．それは正の整数 n については

(13.1.6) $$\mathit{\Gamma}_p(n) = (-1)^n \prod_{\substack{1 \leqq j < n \\ p \nmid j}} j$$

となるやうな連続函数である．特に重要な性質は

(13.1.7) $$\mathit{\Gamma}_p(z+1) = \begin{cases} -z\mathit{\Gamma}_p(z) & (z \notin p\mathbf{Z}_p) \\ -\mathit{\Gamma}_p(z) & (z \in p\mathbf{Z}_p) \end{cases}$$

と任意の自然数 ν について

(13.1.8) $$z \equiv w \mod p^\nu\mathbf{Z}_p \quad \text{ならば} \quad \mathit{\Gamma}_p(z) \equiv \mathit{\Gamma}_p(w) \mod p^\nu\mathbf{Z}_p$$

となることの二つである．詳しくは森田 [**Mo**] や [**R**] などを見よ．

さて，積分

$$u(= u_g) = \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^{g-1}dx}{2y}$$

を $t = -x^{-\frac{1}{2}}$ で展開した冪級数を $u(t)$ と書けば，次のことが成り立つ．

補題 13.1.9. 曲線 $y^2 = x^{2g+1} - 1$（または $y^2 = x^{2g+1} - x$）と素数 $p \equiv 1 \mod 2g+1$（または $p \equiv 1 \mod 4g$）について，

$$\beta_p = -(-1)^{(p-1)/(4g+2)} \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{4g+1}{4g+2})\Gamma_p(\frac{2g+2}{4g+2})} \quad (\in {\mathbf{Z}_p}^{\times})$$

$$\left(\text{または，} \beta_p = -(-1)^{(p-1)/(4g)} \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{4g-1}{4g})\Gamma_p(\frac{2g+1}{4g})} \quad (\in {\mathbf{Z}_p}^{\times}) \right)$$

とおく．このとき級数 $u(t)$ について

(13.1.10)
$$pu(t) - \beta_p u(t^p) \in p\mathbf{Z}_p[[t]]$$

が成り立つ．同様な式は u の $s = -y^{-\frac{1}{2g+1}}$ に関する展開についても成り立つ．

証明．わかり易くするために，曲線 $y^2 = x^5 - 1$（$g = 2$）について証明する．ここで $u(t)$ の展開において t^{10n+1} の係数を $f_{10n}/(10n+1)$ と書くと（10.1.2）から $f_{10n} = (-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ である．我々は，$p(10m+1) = 10n+1$ のとき

$$p\frac{f_{10n}}{10n+1} - \beta_p \frac{f_{10m}}{10m+1} \in p\mathbf{Z}_p$$

であることを示せばよい．まづ $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor m + \frac{1}{10} - \frac{1}{10p} \right\rfloor = m$ に注意する．この事と

$$p(2\left\lfloor \tfrac{n}{p} \right\rfloor - 1) \leqq 2n - 1 \leqq p\big(2(\left\lfloor \tfrac{n}{p} \right\rfloor + 1) - 1\big)$$

より，$2n-1$ を越えない p の倍数のうち最大の奇数は $p(2m-1)$ である．ゆゑに

$$\begin{aligned}
&p\frac{f_{10n}}{10n+1} - \beta_p \frac{f_{10m}}{10m+1} \\
&\quad = p(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{1}{10n+1} - \beta_p \cdot (-1)^m \binom{-\frac{1}{2}}{m} \frac{1}{10m+1} \\
&\quad = \frac{1}{10m+1} \left\{ (-1)^{pm + \frac{p-1}{10}} \frac{\prod_{j=1}^{n} \left(-\frac{2j-1}{2}\right)}{n!} - \beta_p \cdot (-1)^m \frac{\prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{2j-1}{2}\right)}{m!} \right\} \\
&\quad = \frac{(-1)^{m+\frac{p-1}{10}}}{10m+1} \left\{ \frac{\prod_{j=1,\, p\nmid 2j-1}^{n} \left(-\frac{2j-1}{2}\right) \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{p(2k-1)}{2}\right)}{\left(\prod_{j=1,\, p\nmid j}^{n} j\right)\left(\prod_{k=1}^{m} pk\right)} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - (-1)^{\frac{p-1}{10}} \beta_p \frac{\prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{2j-1}{2}\right)}{m!} \right\}
\end{aligned}$$

ここで（13.1.7）を繰り返し使用すれば

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{m+\frac{p-1}{10}}}{10m+1} \left\{ \frac{\frac{(-1)^n \Gamma_p(-\frac{1}{2}+1)}{\Gamma_p(-\frac{2n-1}{2})}\ p^m \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{(-1)^{n+1}\Gamma_p(n+1)\ p^m m!} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - (-1)^{\frac{p-1}{10}} \beta_p \frac{\prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{2j-1}{2}\right)}{m!} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{m+\frac{p-1}{10}}}{10m+1}\left\{-\frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(n+1)\Gamma_p(-n+\frac{1}{2})}\frac{\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{m!}\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{9}{10})\Gamma_p(\frac{6}{10})}\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(-\frac{2j-1}{2}\right)}{m!}\right\}$$
$$= \frac{(-1)^{m+\frac{p-1}{10}}}{10m+1}\binom{-\frac{1}{2}}{m}\left\{-\frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{1}{10}p(10m+1)+\frac{9}{10})\Gamma_p(-\frac{1}{10}p(10m+1)+\frac{6}{10})}\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{9}{10})\Gamma_p(\frac{6}{10})}\right\}$$

ここで $p^\nu||(10m+1)$ とすると，性質（13.1.7）と（13.1.8）により，

$$\frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{1}{10}p(10m+1)+\frac{9}{10})\Gamma_p(-\frac{1}{10}p(10m+1)+\frac{6}{10})} \equiv \frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{9}{10})\Gamma_p(\frac{6}{10})} \quad \mathrm{mod}\ p^{\nu+1}\mathbf{Z}_p$$

となる．また 1.3.3 により

$$\binom{-\frac{1}{2}}{m} \in \mathbf{Z}_p$$

である．よつて

$$p\frac{f_{10n}}{10n+1} - \beta_p\frac{f_{10m}}{10m+1} \in p\mathbf{Z}_p$$

である． □

注意 13.1.11. (1) （安田） 写像 $\iota : C \to J$ を $\mathbf{Z}_p$ 上の射と見て，これの原点における形式的完備化を $\hat{\iota} : \hat{C} \to \hat{J}$ と書く．一方 $\hat{J}$ は 1 次元の形式群の直積に分解する．その特別な 1 つ G への射影 $\pi : \hat{J} \to G$ との合成 $\hat{\pi}\circ\hat{\iota} : \hat{C} \to G$ は形式群の間の同型を与へるであらう．
(2) $u(t)$ を形式的対数とする $\mathbf{Z}_p$ 上の形式群の<u>高さ</u>（height）は 1 である．即ち，$b \in \mathbf{Z}_p$，$\notin p\mathbf{Z}_p$ があつて，$u^{-1}(pu(t)) \equiv bt^p \bmod p\mathbf{Z}_p[[t]]$ と書かれる．これは (10.1.5) の $f_{p-1} \notin p\mathbf{Z}_p$ で，

$$pu(t) = p\big(t + \cdots + f_{p-1}\frac{t^p}{p} + \cdots\big)$$

であることからわかる．$s \mapsto u$ に付随する形式群についても同様である．

13.2. Hochschild の公式と本田の規準. Kummer 型の合同式を証明するのに重要な下の補題 13.2.2 を証明するのために Hochschild の公式と呼ばれる次の補題を思ひ出す.

補題 13.2.1. p を素数とする. R を可換環とし, δ は R の導分とする. いま M を R の（$\mathbf{Z}$ 上の）部分加群とし, δM は, 次の様な R の 部分環 A に含まれてゐるとする. 即ち, pA が A の素 ideal であり, かつ $\delta A \subset A$ なるものに含まれてゐる. このとき, $b \in R$ に対して

$$(b\delta)^p = b^p\delta^p + \big((b\delta)^{p-1}(b)\big)\cdot\delta.$$

これは [**Ma**], p.240, 定理 25.5 に他ならない. 証明もそこに書かれてゐるのでここでは略す.

これを利用すると次の等式が示されるが, これの種数 $g = 1$ の場合が, これより弱い形で [**G**] に述べられてゐる.

補題 13.2.2. 曲線 $y^2 = x^{2g+1} - 1$（あるいは $y^2 = x^{2g+1} - x$）を取り, $t = t(u)$ は 8.2.1 の冪級数, $s = s(u)$ は 8.3.1 の冪級数とする. $p \equiv 1 \bmod (2g+1)$（あるいは mod $4g$）は素数とする. もし, $\varphi \in \mathbf{Z}_p[[t]]$ または $\varphi \in \mathbf{Z}_p[[s]]$ ならば

$$\Big(\Big(\frac{d}{du}\Big)^p - A_p\frac{d}{du}\Big)\varphi \in p\mathbf{Z}_p[[t]] \quad \text{または} \quad \in p\mathbf{Z}_p[[s]].$$

証明. 13.2.1 を $R = \mathbf{Q}_p[[t]]$, $M = u(t)\cdot\mathbf{Z}_p$, $A = \mathbf{Z}_p[[t]]$, $\delta = \frac{d}{dt}$ として適用する. このとき $A/pA = \mathbf{F}_p[[t]]$ である. 以下で等号 $=$ はこの $\mathbf{F}_p[[t]]$ におけるものである. 始めに（10.1.1）や（10.1.3）と同様に得られる

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac12}{n}t^{(2g+2)n} \in 1 + t\mathbf{Z}[\tfrac12][[t]],\\ \frac{dt}{du} &\in 1 + t\mathbf{Z}[\tfrac12][[t]]\end{aligned} \tag{13.2.3}$$

に注意する. この $b := \frac{dt}{du}$ と δ に対して 13.2.1 を使ふと

$$\begin{aligned}0 &= \Big(\frac{d}{du}\Big)^p u = (b\delta)^p u\\ &= \big(b^p\delta^p + ((b\delta)^{p-1}(b))\cdot\delta\big)u\\ &= \Big(\frac{dt}{du}\Big)^p\frac{d^pu}{dt^p} + \Big\{\Big(\frac{dt}{du}\frac{d}{dt}\Big)^{p-1}\frac{dt}{du}\Big\}\frac{du}{dt}\\ &= \Big(\frac{dt}{du}\Big)^p\frac{d^pu}{dt^p} + \Big\{\Big(\frac{d}{du}\Big)^{p-1}\frac{dt}{du}\Big\}\frac{du}{dt}\\ &= \Big(\frac{dt}{du}\Big)^p\frac{d^pu}{dt^p} + \frac{d^pt}{du^p}\frac{du}{dt}\end{aligned}$$

なので,

$$\frac{d^pt}{du^p} = -\Big(\frac{du}{dt}\Big)^{-p-1}\frac{d^pu}{dt^p} \tag{13.2.4}$$

を得る．いま φ と上記の δ，b に対して再び 13.2.1 を使ふと

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{du}\Big)^p\varphi &= (b\delta)^p\varphi \\ &= \big(b^p\delta^p + \big((b\delta)^{p-1}(b)\big)\cdot\delta\big)\varphi \\ &= \Big(\frac{dt}{du}\Big)^p\Big(\frac{d}{dt}\Big)^p\varphi + \Big(\Big(\frac{dt}{du}\frac{d}{dt}\Big)^{p-1}\frac{dt}{du}\Big)\frac{d}{dt}\varphi \\ &= \Big(\frac{du}{dt}\Big)^{-p}\frac{d^p}{dt^p}\varphi + \frac{d^pt}{du^p}\frac{du}{dt}\frac{d}{du}\varphi \\ &= \frac{d^pt}{du^p}\frac{du}{dt}\frac{d}{du}\varphi.\end{aligned}$$

ここで $\varphi(t)\in\mathbf{Z}_p[[t]]$ であることを使つた．先の最後の式に（13.2.4）を代入すれば

(13.2.5) $$\Big(\frac{d}{du}\Big)^p\varphi = -\Big(\frac{du}{dt}\Big)^{-p}\frac{d^pu}{dt^p}\cdot\frac{d}{du}\varphi$$

となる．ここで $(\frac{d}{dt})^p\mathbf{Z}_p[[t]]\in p\mathbf{Z}_p[t]]$ に注意して本田の規準（13.1.10）の両辺に $(\frac{d}{dt})^p$ を施せば

$$\begin{aligned}\frac{d^pu}{dt^p} &= \Big(\frac{d}{dt}\Big)^{p-1}\big(\beta_p t^{p-1}u'(t^p)\big) \\ &= (p-1)!\,\beta_p\,u'(t^p) \\ &= -\beta_p u'(t)^p\end{aligned}$$

を得る．しかるに（13.1.6）と（13.1.8）により，

$$\begin{aligned}A_p &= (-1)^{(p-1)/(4g+2)}\binom{\frac{p-1}{2}}{\frac{p-1}{4g+2}} \\ &= (-1)^{(p-1)/(4g+2)}(-1)\frac{\Gamma_p(\frac{p-1}{2}+1)}{\Gamma_p(\frac{p-1}{4g+2}+1)\Gamma_p(\frac{p-1}{2}-\frac{p-1}{4g+2}+1)} \\ &= -(-1)^{(p-1)/(4g+2)}\frac{\Gamma_p(\frac{p+1}{2})}{\Gamma_p(\frac{p+4g+1}{4g+2})\Gamma_p(\frac{2gp+2g+2}{4g+2})} \\ &\equiv -(-1)^{(p-1)/(4g+2)}\frac{\Gamma_p(\frac{1}{2})}{\Gamma_p(\frac{4g+1}{4g+2})\Gamma_p(\frac{2g+2}{4g+2})} \mod p \\ &= \beta_p\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{d^pu}{dt^p} = -A_p\Big(\frac{du}{dt}\Big)^p$$

となる．これを（13.2.5）に代入すれば

$$\Big(\frac{d}{du}\Big)^p\varphi = A_p\frac{d}{du}\varphi$$

を得る．$s=s(u)$ についても同様である． □

注意 13.2.6. この論文の仕事の初期，安田により証明が与へられる以前は，13.2.2. を得るのに，13.2.1 より弱いある等式と Carlitz の論文 [**Ca1**] の方法とを合せて利用してゐた．参考の為に前者のみを付録 18.3 として一部を残しておいた．

13.3. Kummer 型の合同式の証明. 前節まででで準備が整つたので，曲線 $y^2 = x^5 - 1$ の場合に定理 7.1.1（および 定理 7.2.1）の証明に入る．我々は展開

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{10n}}{10n} \frac{u^{10n-2}}{(10n-2)!}$$

を $\mathbf{Q}_p[[u]]$ の元と見なして，

$$x\langle u \rangle \ (:= x(\boldsymbol{u}))$$

と書く．以下では $\xi \in \mathbf{Z}_p$ を 1 のひとつの原始 $p-1$ 乗根とする．このとき

$$x\langle u \rangle - \xi^2 x\langle \xi u \rangle = \sum_{\substack{n=1 \\ p-1 \nmid 10n}}^{\infty} \frac{(1-\xi^{10n})C_{10n}}{10n} \frac{u^{10n-2}}{(10n-2)!} \tag{13.3.1}$$

であるので，我々の目的のためには自然数 a と $D = d/du$ に関して

$$(D^p - A_p D)^a (x\langle u \rangle - \xi^2 x\langle \xi u \rangle) \in p^a \mathbf{Z}_p\langle\langle u \rangle\rangle \tag{13.3.2}$$

が示されればよい．実際 $10n \geqq a+2$ で $p-1 \nmid 10n$ のとき $u^{10n-a-2}/(10n-a-2)!$ の係数は

$$(1-\xi^{10n}) \sum_{r=0}^{a} \binom{r}{a} (-A_p)^{a-r} \frac{C_{10n+r(p-1)}}{10n + r(p-1)}$$

であり，このとき $1 - \xi^{10n} \notin p\mathbf{Z}_p$ だからである．しかるに（13.2.2）を考慮すれば（13.3.2）を示すには

$$x\langle u(t) \rangle - \xi^2 x\langle \xi u(t) \rangle \in \mathbf{Z}_p[[t]] \tag{13.3.3}$$

が示されればよい．ここで

$$\begin{aligned} F_\xi(t) &= u^{-1}(\xi u(t)) \quad (u^{-1} \text{ は } t \mapsto u \text{ の逆函数}) \\ &= t(\xi u(t)) \end{aligned} \tag{13.3.4}$$

とおけば 13.1.1 と 13.1.9 により $F_\xi(t) \in \xi t + t^2 \mathbf{Z}_p[[t]]$ であるから，

$$x\langle u(t) \rangle - \xi^2 x\langle \xi u(t) \rangle = \frac{1}{t^2} - \frac{\xi^2}{t(\xi u(t))^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{\xi^2}{(\xi t + \cdots)^2} \in \mathbf{Z}_p[[t]]$$

がわかる．よつて定理 7.1.1 の第 1 式は証明された．

第 2 式についても $t = t(u)$ の代りに $s = s(u)$ を使つて同様に証明されるので，詳細は読者に任せる． □

$\boxed{14}$ Kummer 型の合同式についての補足

この節は特に $y^2 = x^5 - 1$ だけに限定せず,

$$y^2 = x^{2g+1} - 1, \qquad y^2 = x^{2g+1} - x$$

のいづれかで定義される超楕円曲線一般について述べる.

14.1. 任意階の一般 Bernoulli-Hurwitz 数に対する Kummer 型の合同式.

前節で,$t^{-2} = x(\boldsymbol{u})$ の $u = u_g$ に関する Taylor 係数について Kummer 型合同式を証明したが,ここでは,$t^{-\nu}$ ($1 \leqq \nu \leqq 4g+2$)についても同様の合同式が成立することを証明する.

円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1} - \mathbf{1}$ の場合. 曲線 $y^2 = x^{2g+1} - 1$ について,第 10 節で定義した $C^{(\nu)}_{(4g+2)n}$ や第 11 節で定義した $D^{(\nu)}_{(4g+2)n}$ を思ひ出さう.すなはち $\nu = 1$, 2, $\cdots$ について

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^\nu} &= \frac{1}{u^\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^{(\nu)}_{(4g+2)n}}{((4g+2)n)_\nu} \frac{u^{(4g+2)n-\nu}}{((4g+2)n-\nu)!}, \\ \frac{1}{s^\nu} &= \frac{1}{u^\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^{(\nu)}_{(4g+2)n}}{((4g+2)n)_\nu} \frac{u^{(4g+2)n-\nu}}{((4g+2)n-\nu)!}. \end{aligned} \tag{14.1.1}$$

もちろん,その他の番号 n については $C^{(\nu)}_n = D^{(\nu)}_n = 0$ とする.このとき,$p \equiv 1 \mod (4g+2)$ を素数,$\xi \in \mathbf{Z}_p$ を 1 の原始 $p-1$ 乗根として,前節の(13.3.1)の代りに

$$\frac{1}{t(u)^\nu} - \xi^\nu \frac{1}{t(\xi u)^\nu} = \sum_{\substack{n=1 \\ p-1 \nmid (4g+2)n}}^{\infty} \frac{(1-\xi^{(4g+2)n}) C^{(\nu)}_{(4g+2)n}}{((4g+2)n)_\nu} \frac{u^{(4g+2)n-\nu}}{((4g+2)n-\nu)!} \tag{14.1.2}$$

を利用すれば,次が成り立つことがわかる.

定理 14.1.3. 素数 $p \equiv 1 \mod (2g+1)$,任意の自然数 a と ν ($1 \leqq \nu \leqq 4g+2$)について,$(4g+2)n \geqq a + \nu$ かつ $p-1 \nmid (4g+2)n$ のとき

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{r}{a} (-A_p)^{a-r} \frac{C^{(\nu)}_{(4g+2)n+r(p-1)}}{((4g+2)n+r(p-1))_\nu} \equiv 0 \mod p^a,$$

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{r}{a} (-A_p)^{a-r} \frac{D^{(\nu)}_{(4g+2)n+r(p-1)}}{((4g+2)n+r(p-1))_\nu} \equiv 0 \mod p^a.$$

円分型 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})^2 = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})^{2g+1} - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ の場合． 曲線 $y^2 = x^{2g+1} - x$ と $\nu = 1$，2，$\cdots$ についても，$C_{4gn}^{(\nu)}$ と $D_{4gn}^{(\nu)}$ を

$$(14.1.4)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{t^\nu} &= \frac{1}{u^\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{4gn}^{(\nu)}}{(4gn)_\nu} \frac{u^{4gn-\nu}}{(4gn-\nu)!}, \\ \frac{1}{s^\nu} &= \frac{1}{u^\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_{4gn}^{(\nu)}}{(4gn)_\nu} \frac{u^{4gn-\nu}}{(4gn-\nu)!} \end{aligned}$$

で定義する．もちろん，その他の番号 n については $C_n^{(\nu)} = D_n^{(\nu)} = 0$ とする．このとき，$p \equiv 1 \bmod 4g$ を素数，$\xi \in \mathbf{Z}_p$ を 1 の原始 $p-1$ 乗根として，前節の (13.3.1) の代りに

$$(14.1.5)\qquad \frac{1}{t(u)^\nu} - \xi^\nu \frac{1}{t(\xi u)^\nu} = \sum_{\substack{n=1 \\ p-1 \nmid 4gn}}^{\infty} \frac{(1-\xi^{4gn}) C_{4gn}^{(\nu)}}{(4gn)_\nu} \frac{u^{4gn-\nu}}{(4gn-\nu)!}$$

を利用すれば，次が成り立つことがわかる．

定理 14.1.6. 素数 $p \equiv 1 \mod 4g$，任意の自然数 a，および ν $(1 \leqq \nu \leqq 4g+2)$ について，$4gn \geqq a + \nu$ かつ $p-1 \nmid 4gn$ のとき

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{r}{a} (-A_p)^{a-r} \frac{C_{4gn+r(p-1)}^{(\nu)}}{(4gn+r(p-1))_\nu} \equiv 0 \mod p^a,$$

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{r}{a} (-A_p)^{a-r} \frac{D_{4gn+r(p-1)}^{(\nu)}}{(4gn+r(p-1))_\nu} \equiv 0 \mod p^a.$$

14.2. $t(u_g)^h/h!$ と $s(u_g)^h/h!$ の Hurwitz 係数に対する Kummer 型の合同式. ここでは，8.2.1 の $t = t(u)$ と 8.3.1 $s = s(t)$ の冪の冪級数展開

$$\frac{t(u)^h}{h!} = \sum_{m=h}^{\infty} c_m^{(h)} \frac{u^m}{m!}, \qquad \frac{s(u)^h}{h!} = \sum_{m=h}^{\infty} d_m^{(h)} \frac{u^m}{m!} \quad \in \mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle \tag{14.2.1}$$

（$c_h^{(h)} = d_h^{(h)} = 1$）の Hurwitz 係数 $c_m^{(h)}$，$d_m^{(h)}$ について次を示す:

補題 14.2.2. $\nu > 0$，$m \geqq a+1$ のとき

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} c_{m+r(p-1)}^{(h)} \equiv 0 \mod p^a,$$

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} d_{m+r(p-1)}^{(h)} \equiv 0 \mod p^a.$$

証明. まづ，8.1.2 の（2）と（3）および 8.2.1 により，

$$\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle = \mathbf{Z}_p\langle\langle t\rangle\rangle \tag{14.2.3}$$

であることに注意する．$D = d/du$ のとき，帰納法により整数 $h \geqq 1$ について

$$(D^p - A_p D)\Big(\frac{t^h}{h!}\Big) \in b + p\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle, \qquad (b \in \mathbf{Z}_p) \tag{14.2.4}$$

と書けることを証明する．$h = 1$ のときは 13.2.2 と（14.2.3）より成り立つ．また，

$$\begin{aligned}
D(D^p - A_p D)\Big(\frac{t^{h+1}}{(h+1)!}\Big) &= (D^p - A_p D)\Big(\frac{t^h}{h!}\frac{dt}{du}\Big) \\
&= \Big(D^p \frac{t^h}{h!}\Big)\frac{dt}{du} + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} \Big(D^{p-j}\frac{t^h}{h!}\Big)\Big(D^j \frac{dt}{du}\Big) + \frac{t^h}{h!}\Big(D^p \frac{dt}{du}\Big) \\
&\quad - A_p D\Big(\frac{t^h}{h!}\Big)\frac{dt}{du} - A_p \frac{t^h}{h!}\Big(D\frac{dt}{du}\Big) \\
&\in \Big\{(D^p - A_p D)\frac{u^h}{h!}\Big\}\frac{dt}{du} + \frac{t^h}{h!}\Big\{(D^p - A_p D)\frac{dt}{du}\Big\} + p\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle
\end{aligned}$$

であるが，帰納法の仮定および（13.2.4）と 13.2.2 から，これは $p\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle$ に属することがわかる．よつて

$$(D^p - A_p D)\Big(\frac{t^{h+1}}{(h+1)!}\Big) \in b + p\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle, \qquad (b \in \mathbf{Z}_p)$$

と書けるので,（14.2.4）が証明された.（14.2.4）を繰り返し用いて，$a > 0$ について

$$(D^p - A_p D)^a \Big(\frac{t^h}{h!}\Big) \in b + p^a\mathbf{Z}_p\langle\langle u\rangle\rangle, \qquad (b \in \mathbf{Z}_p) \tag{14.2.5}$$

と書けることがわかる．ところが

$$(D^p - A_p D)^a \Big(\frac{t^h}{h!}\Big) = \sum_{m=h}^{\infty} \Big\{\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} c_{m+r(p-1)}^{(h)}\Big\} D^a \frac{u^m}{m!}$$

ゆゑ，所望の第 1 式を得る．第 2 式も同様に得られる． □

14.3. Vandiver-Carlitz 型合同式. ここでは（14.1.3）と（14.1.6）に現れる分母を除いた合同式を証明する．Vandiver が [**V**] で Bernoulli 数に関するこの形の合同式を証明し，Hurwitz 数に関しての類似の性質を，Carlitz が [**Ca4**] で調べてゐる．

命題 14.3.1. 整数 $a > 0$，$n \geqq a+1$ および（14.1.1）や（14.1.4）で定義した $\{C_n^{(\nu)}\}$ と $\{D_n^{(\nu)}\}$ に対して

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} C_{n+r(p-1)}^{(\nu)} \equiv 0 \mod p^{a-\nu},$$
$$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} D_{n+r(p-1)}^{(\nu)} \equiv 0 \mod p^{a-\nu}.$$

注意 14.3.2. 14.3.1 においては 7.1.1，7.2.1，14.1.3，14.1.6 とは異なり，条件 $p-1 \nmid n$ が要らないが，証明に（13.1.10）や 13.1.1 を使ふ必要がないので，それら程に深くはないと思はれる．

証明. 第 10.1 節のやうに $u(t)$ の t に関する Carlitz 係数を $[t^{n+1}/(n+1)]u(t) = f_n$ と書くことにする．ここでも前節と同様に $u = u_g$，$D = d/du$ である．まづ

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} \frac{u^m}{m!} = \frac{u}{t(u)} = \frac{1}{t} \sum_{m=\nu}^{\infty} f_h \frac{t^{h+1}}{h+1}$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{f_h h!}{h+1} \sum_{m=h}^{\infty} c_m^{(h)} \frac{u^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{m} \frac{f_h h!}{h+1} c_m^{(h)} \right) \frac{u^m}{m!}$$

から

$$C_m^{(1)} = \sum_{h=0}^{m} \frac{f_h h!}{h+1} c_m^{(h)} \tag{14.3.3}$$

を得る．従つて

$$\sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} C_{m+r(p-1)}^{(1)} = \sum_{r=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} \sum_{h=0}^{m+r(p-1)} \frac{f_h h!}{h+1} c_{m+r(p-1)}^{(h)}$$
$$= \sum_{h=0}^{m+r(p-1)} \frac{f_h h!}{h+1} \sum_{m=0}^{a} \binom{a}{r} (-A_p)^{a-r} c_{m+r(p-1)}^{(h)}.$$

ここで $m \geqq a+1$ なら，内側の和は（14.2.2）より p^a で割切れる．いま $p^w || (h+1)$（$w \geqq 1$）とすると $p^w - 1 \leqq h$ より $\mathrm{ord}_p(p^w-1)! \leqq \mathrm{ord}_p h!$ であるが（1.1.2）により

$$\mathrm{ord}_p(p^w-1)! = \frac{(p^w-1)-(p-1)w}{p-1} = p^{w-1} + p^{w-2} + \cdots + p + 1 - w.$$

しかるに，我々は $p \geqq 3$ しか扱はないので，$w \geqq 2$ ならばこれは $\geqq w$ であり，$w = 1$ のときが最悪の状況となる．結局

$$w \leqq \mathrm{ord}_p h! + 1, \qquad (w \geqq 1) \tag{14.3.4}$$

がわかつた．従つて

$$\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-A_p)^{a-r}C^{(1)}_{m+r(p-1)} \ \in\ p^{a-1}\mathbf{Z}_{(p)} \qquad (m \geqq a+1) \tag{14.3.5}$$

を得る．これは 14.3.1 の第 1 式の $\nu=1$ の場合に他ならない．一般の ν の場合も同様で，以下のやうにして示される．はじめに $u=\sum_{h=0}^{\infty} f_h\frac{t^{h+1}}{h+1}$ ゆゑ

$$u^{\nu}=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}t^{h+\nu}$$

である．よつて

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{t}\right)^{\nu}&=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}t^{h}\\&=\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}\,h!\sum_{m=h}^{\infty}c^{(h)}_m\frac{u^m}{m!}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{h=0}^{m}h!\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}c^{(h)}_m\right)\frac{u^m}{m!}.\end{aligned}$$

つまり

$$\frac{1}{t^{\nu}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m)_\nu}\left(\sum_{h=0}^{m}h!\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}c^{(h)}_m\right)\frac{u^{m-\nu}}{(m-\nu)!}$$

であり

$$C^{(\nu)}_m=\sum_{h=0}^{m}h!\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}c^{(h)}_m. \tag{14.3.6}$$

それゆゑ

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-A_p)^{a-r}C^{(\nu)}_{n+r(p-1)}=\sum_{h=0}^{m}&\left(h!\sum_{\substack{h_1+h_2+\cdots\\+h_\nu=h}}\frac{f_{h_1}}{h_1+1}\frac{f_{h_2}}{h_2+1}\cdots\frac{f_{h_\nu}}{h_\nu+1}\right)\\&\cdot\left\{\sum_{r=0}^{a}\binom{a}{r}(-A_p)^{a-r}c^{(h)}_{n+r(p-1)}\right\}.\end{aligned} \tag{14.3.7}$$

ここで $p^{w_j}||(h_j+1)$ とすれば（14.3.4）と同様に $w_j \leqq \mathrm{ord}_p h_j!+1$ であるから

$$w_1+\cdots+w_\nu \leqq \mathrm{ord}_p(h_1!h_2!\cdots h_\nu!)+\nu \leqq \mathrm{ord}_p(h!)+\nu$$

である．結局（14.3.7）の右辺は $p^{a-\nu}$ で割り切れる．これで（14.3.1）の第 1 式が証明された．第 2 式も同様の推論で証明できる．□

$\boxed{15}$ 数 値 例（古典）

15.1. Bernoulli 数. 曲線 $y^2 = x-1$（種数 $g=0$）について $C_{2n} = (-1)^{n-1}2^{2n}B_{2n}$（$B_{2n}$ は Bernoulli 数）の最初のいくつかの値：

$$
\begin{aligned}
2^2B_2 &= \frac{1}{3}\cdot 2, & -2^4B_4 &= \frac{1}{3\cdot 5}\cdot 2^3,\\
2^6B_6 &= \frac{1}{3\cdot 7}\cdot 2^5, & -2^8B_8 &= \frac{1}{3\cdot 5}\cdot 2^7,\\
2^{10}B_{10} &= \frac{1}{3\cdot 11}\cdot 2^9\cdot 5, & -2^{12}B_{12} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}\cdot 2^{11}\cdot 691,\\
2^{14}B_{14} &= \frac{1}{3}\cdot 2^{13}\cdot 7, & -2^{16}B_{16} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 17}\cdot 2^{15}\cdot 3617,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2^{18}B_{18} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 19}\cdot 2^{17}\cdot 43867,\\
-2^{20}B_{20} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 11}\cdot 2^{19}\cdot 283\cdot 617,\\
2^{22}B_{22} &= \frac{1}{3\cdot 23}\cdot 2^{21}\cdot 11\cdot 131\cdot 593,\\
-2^{24}B_{24} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}\cdot 2^{23}\cdot 103\cdot 2294797,\\
2^{26}B_{26} &= \frac{1}{3}\cdot 2^{25}\cdot 13\cdot 657931,\\
-2^{28}B_{28} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 29}\cdot 2^{27}\cdot 7\cdot 9349\cdot 362903,\\
2^{30}B_{30} &= \frac{1}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 31}\cdot 2^{29}\cdot 5\cdot 1721\cdot 1001259881,\\
-2^{32}B_{32} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 17}\cdot 2^{31}\cdot 37\cdot 683\cdot 305065927,\\
2^{34}B_{34} &= \frac{1}{3}\cdot 2^{33}\cdot 2^{33}\cdot 17\cdot 151628697551,\\
-2^{36}B_{36} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 19\cdot 37}\cdot 2^{35}\cdot 26315271553053477373,\\
2^{38}B_{38} &= \frac{1}{3}\cdot 2^{37}\cdot 19\cdot 154210205991661,\\
-2^{40}B_{40} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 11\cdot 41}\cdot 2^{39}\cdot 137616929\cdot 1897170067619,\\
2^{42}B_{42} &= \frac{1}{3\cdot 7\cdot 43}\cdot 2^{41}\cdot 1520097643918070802691,\\
-2^{44}B_{44} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 23}\cdot 2^{43}\cdot 11\cdot 59\cdot 8089\cdot 2947939\cdot 1798482437,\\
2^{46}B_{46} &= \frac{1}{3\cdot 47}\cdot 2^{45}\cdot 23\cdot 383799511\cdot 67568238839737,\\
-2^{48}B_{48} &= \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17}\cdot 2^{47}\cdot 653\cdot 56039\cdot 153289748932447906241,\\
2^{50}B_{50} &= \frac{1}{3\cdot 11}\cdot 2^{49}\cdot 5^2\cdot 417202699\cdot 47464429777438199.
\end{aligned}
$$

15.2. 楕円曲線 $y^2 = x^3 - 1$ に対する Hurwitz 数. 曲線 $y^2 = x^3 - 1$（種数 $g = 1$）について C_{6n} の最初のいくつかの値：

$$C_6 = \frac{1}{7} \cdot 2^4 \cdot 3^2, \qquad C_{12} = \frac{-1}{7 \cdot 13} \cdot 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2,$$

$$C_{18} = \frac{1}{7 \cdot 19} \cdot 2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 11, \qquad C_{24} = \frac{-1}{7 \cdot 13} \cdot 2^{22} \cdot 3^{11} \cdot 5^3 \cdot 11^2 \cdot 17,$$

$$C_{30} = \frac{1}{7 \cdot 31} \cdot 2^{28} \cdot 3^{14} \cdot 5^6 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 23,$$

$$C_{36} = \frac{-1}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37} \cdot 2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^7 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 43,$$

$$C_{42} = \frac{1}{7 \cdot 43} \cdot 2^{40} \cdot 3^{20} \cdot 5^8 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 431,$$

$$C_{48} = \frac{-1}{7 \cdot 13} \cdot 2^{46} \cdot 3^{23} \cdot 5^8 \cdot 11^4 \cdot 17^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 313,$$

$$C_{54} = \frac{1}{7 \cdot 19} \cdot 2^{52} \cdot 3^{26} \cdot 5^{10} \cdot 11^4 \cdot 17^3 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 1201,$$

$$C_{60} = \frac{-1}{7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 61} \cdot 2^{58} \cdot 3^{29} \cdot 5^{13} \cdot 11^5 \cdot 17^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 41^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 1823,$$

$$C_{66} = \frac{1}{7 \cdot 67} \cdot 2^{64} \cdot 3^{32} \cdot 5^{13} \cdot 11^6 \cdot 17^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 79 \cdot 733,$$

$$C_{72} = \frac{-1}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73} \cdot 2^{70} \cdot 3^{35} \cdot 5^{13} \cdot 11^6 \cdot 17^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 1153 \cdot 13963 \cdot 29059,$$

$$C_{78} = \frac{1}{7 \cdot 79} \cdot 2^{76} \cdot 3^{38} \cdot 5^{15} \cdot 11^7 \cdot 13 \cdot 17^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 2647111,$$

$$C_{84} = \frac{-1}{7 \cdot 13 \cdot 43} \cdot 2^{82} \cdot 3^{41} \cdot 5^{17} \cdot 11^7 \cdot 17^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 41^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 8431097574437,$$

$$C_{90} = \frac{1}{7 \cdot 19 \cdot 31} \cdot 2^{88} \cdot 3^{44} \cdot 5^{19} \cdot 11^8 \cdot 17^5 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 41^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 83 \cdot 998039409083,$$

$$C_{96} = \frac{-1}{7 \cdot 13 \cdot 97} \cdot 2^{94} \cdot 3^{47} \cdot 5^{18} \cdot 11^8 \cdot 17^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 41^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 253013 \cdot 826151671,$$

$$C_{102} = \frac{1}{7 \cdot 103} \cdot 2^{100} \cdot 3^{50} \cdot 5^{20} \cdot 11^9 \cdot 17^6 \cdot 23^4 \cdot 29^4 \cdot 41^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 433 \cdot 1493 \cdot 532620611,$$

$$C_{108} = \frac{-1}{7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 109} \cdot 2^{106} \cdot 3^{53} \cdot 5^{22} \cdot 11^9 \cdot 17^6 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 41^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 101 \cdot 38543 \cdot 72745827951021097.$$

15.3. 楕円曲線 $y^2 = x^3 - x$ に対する Hurwitz 数. 曲線 $y^2 = x^3 - x$ （種数 $g = 1$） について $C_{4n} = 2^{4n}E_{4n}$（original Hurwitz 数）の最初のいくつかの値はつぎの通り：

$$
\begin{aligned}
2^4E_4 &= \frac{1}{5}\cdot 2^3\cdot 3,\\
2^8E_8 &= \frac{1}{5}\cdot 2^7\cdot 3,\\
2^{12}E_{12} &= \frac{1}{5\cdot 13}\cdot 2^{11}\cdot 3^4\cdot 7,\\
2^{16}E_{16} &= \frac{1}{5\cdot 17}\cdot 2^{15}\cdot 3^4\cdot 7^2\cdot 11,\\
2^{20}E_{20} &= \frac{1}{5}\cdot 2^{19}\cdot 3^6\cdot 7^2\cdot 11,\\
2^{24}E_{24} &= \frac{1}{5\cdot 13}\cdot 2^{23}\cdot 3^7\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 19,\\
2^{28}E_{28} &= \frac{1}{5\cdot 29}\cdot 2^{27}\cdot 3^9\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 19\cdot 23,\\
2^{32}E_{32} &= \frac{1}{5\cdot 17}\cdot 2^{31}\cdot 3^{10}\cdot 7^4\cdot 11^2\cdot 19\cdot 23\cdot 223,\\
2^{36}E_{36} &= \frac{1}{5\cdot 13\cdot 37}\cdot 2^{35}\cdot 3^{14}\cdot 7^5\cdot 11^3\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 61,\\
2^{40}E_{40} &= \frac{1}{5\cdot 41}\cdot 2^{39}\cdot 3^{13}\cdot 7^5\cdot 11^3\cdot 19^2\cdot 23\cdot 31\cdot 2381,\\
2^{44}E_{44} &= \frac{1}{5}\cdot 2^{43}\cdot 3^{15}\cdot 7^6\cdot 11^4\cdot 19^4\cdot 23\cdot 31,\\
2^{48}E_{48} &= \frac{1}{5\cdot 13\cdot 17}\cdot 2^{47}\cdot 3^{16}\cdot 7^5\cdot 11^4\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 31\cdot 43\cdot 1162253,\\
2^{52}E_{52} &= \frac{1}{5\cdot 53}\cdot 2^{51}\cdot 3^{18}\cdot 7^7\cdot 11^4\cdot 13\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 31\cdot 43\cdot 47\cdot 8887,\\
2^{56}E_{56} &= \frac{1}{5\cdot 29}\cdot 2^{55}\cdot 3^{19}\cdot 7^8\cdot 11^5\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 31\cdot 43\cdot 47\cdot 61\cdot 52289,\\
2^{60}E_{60} &= \frac{1}{5\cdot 13\cdot 61}\cdot 2^{59}\cdot 3^{22}\cdot 7^8\cdot 11^5\cdot 19^3\cdot 23^2\cdot 31\cdot 43\cdot 47\cdot 2630966033,\\
2^{64}E_{64} &= \frac{1}{5\cdot 17}\cdot 2^{63}\cdot 3^{22}\cdot 7^9\cdot 11^5\cdot 19^3\cdot 23^2\cdot 31^2\cdot 43\cdot 47\cdot 59\cdot 109\cdot 814903,\\
2^{68}E_{68} &= \frac{1}{5}\cdot 2^{67}\cdot 3^{24}\cdot 7^9\cdot 11^6\cdot 17\cdot 19\cdot 23^2\cdot 31^2\cdot 43\cdot 47\cdot 59\cdot 80232721,\\
2^{72}E_{72} &= \frac{1}{5\cdot 13\cdot 37\cdot 73}\cdot 2^{71}\cdot 3^{25}\cdot 7^{10}\cdot 11^6\cdot 19^3\cdot 23^3\cdot 31^2\cdot 43\cdot 47\cdot 59\cdot 67\\
&\quad\cdot 48316510111193,\\
2^{76}E_{76} &= \frac{1}{5}\cdot 2^{75}\cdot 3^{27}\cdot 7^{10}\cdot 11^6\cdot 19^4\cdot 23^3\cdot 31^2\cdot 43\cdot 47\cdot 59\cdot 67\cdot 71\cdot 3469\cdot 1330177.
\end{aligned}
$$

16 数 値 例（新理論）

16.1. 曲線 $y^2 = x^5 - 1$ の $x(u)$ について. 曲線 $y^2 = x^5 - 1$ （種数 $g = 2$）について C_{10n} の最初のいくつかの値はつぎのとほり：

$$C_{10} = \frac{1}{11} \cdot 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7,$$

$$C_{20} = \frac{-1}{11} \cdot 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17,$$

$$C_{30} = \frac{1}{11 \cdot 31} \cdot 2^{28} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23^2,$$

$$C_{40} = \frac{-1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{38} \cdot 3^{17} \cdot 5^9 \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 31991,$$

$$C_{50} = \frac{1}{11} \cdot 2^{47} \cdot 3^{23} \cdot 5^{12} \cdot 7^6 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 4999,$$

$$C_{60} = \frac{-1}{11 \cdot 31 \cdot 61} \cdot 2^{59} \cdot 3^{28} \cdot 5^{15} \cdot 7^6 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 43 \\ \cdot 47 \cdot 53 \cdot 351453077,$$

$$C_{70} = \frac{1}{11 \cdot 71} \cdot 2^{72} \cdot 3^{31} \cdot 5^{16} \cdot 7^9 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 43 \\ \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 6740734411,$$

$$C_{80} = \frac{-1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{78} \cdot 3^{34} \cdot 5^{19} \cdot 7^8 \cdot 13^6 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 37^2 \cdot 43 \\ \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 109 \cdot 460903 \cdot 121384433,$$

$$C_{90} = \frac{1}{11 \cdot 31} \cdot 2^{87} \cdot 3^{42} \cdot 5^{21} \cdot 7^{10} \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \\ \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 131 \cdot 881 \cdot 2799606697,$$

$$C_{100} = \frac{-1}{11 \cdot 101} \cdot 2^{97} \cdot 3^{47} \cdot 5^{24} \cdot 7^{11} \cdot 13^7 \cdot 17^3 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \\ \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 10343 \cdot 1938718187373563,$$

$$C_{110} = \frac{1}{11} \cdot 2^{107} \cdot 3^{51} \cdot 5^{27} \cdot 7^{13} \cdot 13^8 \cdot 17^4 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 37 \cdot 43^2 \\ \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \\ \cdot 3019729 \cdot 865724129494813,$$

$$C_{120} = \frac{-1}{11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61} \cdot 2^{119} \cdot 3^{56} \cdot 5^{29} \cdot 7^{13} \cdot 13^9 \cdot 17^5 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \\ \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \\ \cdot 863833294249 \cdot 7389430581319,$$

$$C_{130} = \frac{1}{11 \cdot 131} \cdot 2^{128} \cdot 3^{61} \cdot 5^{32} \cdot 7^{15} \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \\ \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \\ \cdot 5303 \cdot 97785319 \cdot 175363749323953511,$$

$$C_{140} = \frac{-1}{11 \cdot 71} \cdot 2^{139} \cdot 3^{65} \cdot 5^{34} \cdot 7^{15} \cdot 13^{10} \cdot 17^6 \cdot 19^7 \cdot 23^6 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^3 \\ \cdot 47 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \\ \cdot 137 \cdot 3191 \cdot 79927801 \cdot 2927519326077590415331021,$$

$$C_{150} = \frac{1}{11 \cdot 31 \cdot 151} \cdot 2^{150} \cdot 3^{70} \cdot 5^{37} \cdot 7^{17} \cdot 13^{12} \cdot 17^{5} \cdot 19^{7} \cdot 23^{6} \cdot 29^{5} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3}$$
$$\cdot 47^{2} \cdot 53^{2} \cdot 59^{2} \cdot 67^{2} \cdot 73^{2} \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127$$
$$\cdot 137 \cdot 139 \cdot 50951 \cdot 450127 \cdot 1464426640811 \cdot 58871719018640089,$$

$$C_{160} = \frac{-1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{158} \cdot 3^{72} \cdot 5^{40} \cdot 7^{17} \cdot 13^{12} \cdot 17^{6} \cdot 19^{8} \cdot 23^{6} \cdot 29^{5} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3}$$
$$\cdot 47^{2} \cdot 53^{2} \cdot 59^{2} \cdot 67^{2} \cdot 73^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \cdot 137$$
$$\cdot 139 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 5473709 \cdot 2254350262236573093155129320156570651 1,$$

$$C_{170} = \frac{1}{11} \cdot 2^{167} \cdot 3^{78} \cdot 5^{42} \cdot 7^{19} \cdot 13^{12} \cdot 17^{8} \cdot 19^{8} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 37^{3} \cdot 43^{3}$$
$$\cdot 47^{2} \cdot 53^{3} \cdot 59^{2} \cdot 67^{2} \cdot 73^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127$$
$$\cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167$$
$$\cdot 587 \cdot 22573 \cdot 18793 \cdot 246289 \cdot 311203545376580358674935387,$$

$$C_{180} = \frac{-1}{11 \cdot 31 \cdot 61 \cdot 181} \cdot 2^{177} \cdot 3^{87} \cdot 5^{45} \cdot 7^{19} \cdot 13^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{6} \cdot 37^{3} \cdot 43^{4}$$
$$\cdot 47^{2} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 67^{2} \cdot 73^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127$$
$$\cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173$$
$$\cdot 239 \cdot 1471 \cdot 1579 \cdot 7030999221688667065861742323016843138707.$$

これら C_{10n} は ある整数 G_{10n} でもつて，以下のやうに書ける（von Staudt-Clausen 型の定理）.

$$
\begin{aligned}
C_{10} &= \frac{6}{11} + G_{10},\\
C_{20} &= \frac{6^2}{11} + G_{20},\\
C_{30} &= \frac{6^3}{11} + \frac{10}{31} + G_{30},\\
C_{40} &= \frac{6^4}{11} + \frac{7}{41} + G_{40},\\
C_{50} &= \frac{6^5}{11} + G_{50},\\
C_{60} &= \frac{6^6}{11} + \frac{10^2}{31} + \frac{1}{61} + G_{60},\\
C_{70} &= \frac{6^7}{11} + \frac{32}{71} + G_{70},\\
C_{80} &= \frac{6^8}{11} + \frac{7^2}{41} + G_{80},\\
C_{90} &= \frac{6^9}{11} + \frac{10^3}{31} + G_{90},\\
C_{100} &= \frac{6^{10}}{11} + \frac{46}{101} + G_{100},\\
C_{110} &= \frac{6^{11}}{11} + G_{110},\\
C_{120} &= \frac{6^{12}}{11} + \frac{10^4}{31} + \frac{7^3}{41} + \frac{1}{61} + G_{120},\\
C_{130} &= \frac{6^{13}}{11} + \frac{64}{131} + G_{130},\\
C_{140} &= \frac{6^{14}}{11} + \frac{32^2}{71} + G_{140},\\
C_{150} &= \frac{6^{15}}{11} + \frac{10^5}{31} + \frac{52}{151} + G_{150},\\
C_{160} &= \frac{6^{16}}{11} + \frac{7^4}{41} + G_{160},\\
C_{170} &= \frac{6^{17}}{11} + G_{170},\\
C_{180} &= \frac{6^{18}}{11} + \frac{10^6}{31} + \frac{1}{61} + \frac{37}{181} + G_{180}.
\end{aligned}
$$

16.2. 曲線 $y^2 = x^5 - 1$ の $y(u)$ について. 曲線 $y^2 = x^5 - 1$ （種数 $g = 2$）について D_{10n} の最初のいくつかの値はつぎのとほり：

$$
\begin{aligned}
D_{10} &= \frac{-1}{11} \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2, \\
D_{20} &= \frac{1}{11} \cdot 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 13, \\
D_{30} &= \frac{-1}{11 \cdot 31} \cdot 2^{23} \cdot 3^{11} \cdot 5^7 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23, \\
D_{40} &= \frac{1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{35} \cdot 3^{17} \cdot 5^{10} \cdot 7^3 \cdot 13^2 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 53, \\
D_{50} &= \frac{-1}{11} \cdot 2^{43} \cdot 3^{21} \cdot 5^{12} \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 683, \\
D_{60} &= \frac{1}{11 \cdot 31 \cdot 61} \cdot 2^{57} \cdot 3^{28} \cdot 5^{15} \cdot 7^6 \cdot 13^4 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \\
&\quad \cdot 115781, \\
D_{70} &= \frac{-1}{11 \cdot 71} \cdot 2^{64} \cdot 3^{32} \cdot 5^{16} \cdot 7^8 \cdot 13^6 \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \\
&\quad \cdot 59 \cdot 22703881, \\
D_{80} &= \frac{1}{11 \cdot 41} \cdot 2^{75} \cdot 3^{33} \cdot 5^{19} \cdot 7^8 \cdot 13^6 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 37^2 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \\
&\quad \cdot 59 \cdot 67 \\
&\quad \cdot 73 \cdot 4580521741, \\
D_{90} &= \frac{-1}{11 \cdot 31} \cdot 2^{83} \cdot 3^{42} \cdot 5^{22} \cdot 7^9 \cdot 13^6 \cdot 17^4 \cdot 19^5 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47 \cdot 53 \\
&\quad \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 9601 \cdot 1285049, \\
D_{100} &= \frac{1}{11 \cdot 101} \cdot 2^{94} \cdot 3^{44} \cdot 5^{24} \cdot 7^{11} \cdot 13^7 \cdot 17^3 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \\
&\quad \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 4002942001952573, \\
D_{110} &= \frac{-1}{11} \cdot 2^{102} \cdot 3^{48} \cdot 5^{27} \cdot 7^{12} \cdot 13^8 \cdot 17^4 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 37 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \\
&\quad \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 9747003959677530439, \\
D_{120} &= \frac{1}{11 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 61} \cdot 2^{116} \cdot 3^{56} \cdot 5^{29} \cdot 7^{13} \cdot 13^9 \cdot 17^4 \cdot 19^6 \cdot 23^6 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 43^2 \cdot 47^2 \\
&\quad \cdot 53^2 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \\
&\quad \cdot 1759 \cdot 2027 \cdot 2278423765903.
\end{aligned}
$$

16.3. 曲線 $y^2 = x^5 - x$ の $x(u)$ について. 曲線 $y^2 = x^5 - x$ （種数 $g = 2$）について C_{8n} の最初のいくつかの値はつぎのとほり：

$$
\begin{aligned}
C_8 &= 2^7 \cdot 5, \\
C_{16} &= \frac{-1}{17} \cdot 2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13, \\
C_{24} &= 2^{22} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 19, \\
C_{32} &= \frac{-1}{17} \cdot 2^{31} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 1741, \\
C_{40} &= \frac{1}{41} \cdot 2^{40} \cdot 3^8 \cdot 5^8 \cdot 7^5 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 5693, \\
C_{48} &= \frac{-1}{17} \cdot 2^{46} \cdot 3^{10} \cdot 5^8 \cdot, 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 41957857, \\
C_{56} &= 2^{54} \cdot 3^{12} \cdot 5^{11} \cdot 7^8 \cdot 11^5 \cdot 13^4 \cdot 19 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 715991, \\
C_{64} &= \frac{-1}{17} \cdot 2^{63} \cdot 3^{14} \cdot 5^{12} \cdot 7^9 \cdot 11^3 \cdot 13^4 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \\
&\quad \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 89 \cdot 32591401, \\
C_{72} &= \frac{1}{73} \cdot 2^{72} \cdot 3^{16} \cdot 5^{13} \cdot 7^{10} \cdot 11^4 \cdot 13^5 \cdot 19^2 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 43 \cdot 47 \\
&\quad \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 19346595547931, \\
C_{80} &= \frac{-1}{17 \cdot 41} \cdot 2^{80} \cdot 3^{18} \cdot 5^{17} \cdot 7^{11} \cdot 11^5 \cdot 13^6 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \cdot 43 \cdot 47 \\
&\quad \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 5826608412403.
\end{aligned}
$$

これら C_{8n} は ある整数 G_{8n} でもつて，以下のやうに書ける．(von Staudt-Clausen 型の定理．C_{144} まで.)

$$
\begin{aligned}
&C_8 && &&&&&&&&&&&&&&\text{(整数)},\\
&C_{16} = \frac{11}{17} && &&&&&&&&&&&&&& + G_{16},\\
&C_{24} && &&&&&&&&&&&&&&\text{(整数)},\\
&C_{32} = \frac{11^2}{17} && &&&&&&&&&&&&&& + G_{32},\\
&C_{40} = && \frac{35}{41} &&&&&&&&&&&&&& + G_{40},\\
&C_{48} = \frac{11^3}{17} && &&&&&&&&&&&&&& + G_{48},\\
&C_{56} && &&&&&&&&&&&&&&\text{(整数)},\\
&C_{64} = \frac{11^4}{17} && &&&&&&&&&&&&&& + G_{64},\\
&C_{72} = && &&\frac{2}{73} &&&&&&&&&&&& + G_{72},\\
&C_{80} = \frac{11^6}{17} && +\frac{35^2}{41} &&&&&&&&&&&&&& + G_{80},\\
&C_{88} = && &&&&\frac{18}{89} &&&&&&&&&& + G_{88},\\
&C_{96} = \frac{11^7}{17} && &&&&&&+\frac{10}{97} &&&&&&&& + G_{96},\\
&C_{104} && &&&&&&&&&&&&&&\text{(整数)},\\
&C_{112} = \frac{11^8}{17} && &&&&&&&&+\frac{18}{113} &&&&&& + G_{112},\\
&C_{120} = && \frac{35^3}{41} &&&&&&&&&&&&&& + G_{120},\\
&C_{128} = \frac{11^9}{17} && &&&&&&&&&&&&&& + G_{128},\\
&C_{136} = && &&&&&&&&&&\frac{131}{137} &&&& + G_{136},\\
&C_{144} = \frac{11^{10}}{17} && &&+\frac{2^2}{73} &&&&&&&&&&&& + G_{144}.
\end{aligned}
$$

16.4. 曲線 $y^2 = x^7 - 1$ の $x(u)$ について. 曲線 $y^2 = x^7 - 1$ （種数 $g = 3$）について C_{14n} の最初のいくつかの値はつぎのとほり：

$$
\begin{aligned}
C_{14} &= 2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11, \\
C_{28} &= \frac{-1}{29} \cdot 2^{25} \cdot 3^{11} \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23, \\
C_{42} &= \frac{1}{43} \cdot 2^{39} \cdot 3^{16} \cdot 5^6 \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 31^2 \cdot 37 \cdot 61, \\
C_{56} &= \frac{-1}{29} \cdot 2^{53} \cdot 3^{22} \cdot 5^9 \cdot 7^9 \cdot 11^4 \cdot 13^4 \cdot 17^3 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 37 \\
&\quad \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 179 \cdot 2273, \\
C_{70} &= \frac{1}{71} \cdot 2^{67} \cdot 3^{28} \cdot 5^{11} \cdot 7^{11} \cdot 11^6 \cdot 13^5 \cdot 17^4 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 31^2 \cdot 37 \\
&\quad \cdot 41 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 1093 \cdot 31513, \\
C_{84} &= \frac{-1}{29 \cdot 43} \cdot 2^{81} \cdot, 3^{35} \cdot 5^{13} \cdot 7^{13} \cdot 11^7 \cdot 13^6 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 31^2 \cdot 37^2 \\
&\quad \cdot 41^2 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 14953011635323, \\
C_{98} &= \frac{1}{29} \cdot 2^{95} \cdot 3^{40} \cdot 5^{16} \cdot 7^{16} \cdot 11^8 \cdot 13^7 \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 23^4 \cdot 31^3 \cdot 37^2 \\
&\quad \cdot 41^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 5413 \cdot 15937 \cdot 27361, \\
C_{112} &= \frac{-1}{29 \cdot 113} \cdot 2^{109} \cdot 3^{47} \cdot 5^{18} \cdot 7^{19} \cdot 11^{11} \cdot 13^8 \cdot 17^5 \cdot 19^3 \cdot 23^4 \cdot 31^3 \cdot 37^2 \\
&\quad \cdot 41^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 109 \cdot 7752349172767981, \\
C_{126} &= \frac{1}{43 \cdot 127} \cdot 2^{123} \cdot 3^{52} \cdot 5^{22} \cdot 7^{20} \cdot 11^{13} \cdot 13^9 \cdot 17^6 \cdot 19^4 \cdot 23^5 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \\
&\quad \cdot 41^3 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 61^2 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 109 \cdot 47713 \cdot 139246440988973, \\
C_{140} &= \frac{-1}{29 \cdot 71} \cdot 2^{137} \cdot 3^{57} \cdot 5^{24} \cdot 7^{22} \cdot 11^{13} \cdot 13^{10} \cdot 17^7 \cdot 19^5 \cdot 23^6 \cdot 31^4 \cdot 37^3 \\
&\quad \cdot 41^3 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 109 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 2159361537856453634367122 89, \\
C_{154} &= 2^{151} \cdot 3^{64} \cdot 5^{26} \cdot 7^{25} \cdot 11^{16} \cdot 13^{11} \cdot 17^8 \cdot 19^6 \cdot 23^6 \cdot 31^3 \cdot 37^4 \\
&\quad \cdot 41^3 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 61^2 \cdot 67^2 \cdot 73^2 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 109 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 14137678329625798451 6233421, \\
C_{168} &= \frac{-1}{29 \cdot 43} \cdot 2^{165} \cdot 3^{70} \cdot 5^{29} \cdot 7^{27} \cdot 11^{16} \cdot 13^{11} \cdot 17^7 \cdot 19^5 \cdot 23^7 \cdot 31^4 \cdot 37^4 \\
&\quad \cdot 41^4 \cdot 47^2 \cdot 53^3 \cdot 59^2 \cdot 61^2 \cdot 67^2 \cdot 73^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 109 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157^2 \cdot 163 \cdot 811 \\
&\quad \cdot 417793 \cdot 1745978749 \cdot 41834306314956317, \\
C_{182} &= 2^{181} \cdot 3^{76} \cdot 5^{31} \cdot 7^{29} \cdot 11^{17} \cdot 13^{14} \cdot 17^8 \cdot 19^6 \cdot 23^7 \cdot 31^4 \cdot 37^4 \\
&\quad \cdot 41^4 \cdot 47^2 \cdot 53^3 \cdot 59^3 \cdot 61 \cdot 67^2 \cdot 73^2 \cdot 79^2 \cdot 83^2 \cdot 89^2 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot 109 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \\
&\cdot 2538509 \cdot 7602187 \cdot 167935399 \cdot 79956683481346979, \\
C_{196} = &\frac{-1}{29 \cdot 197} \cdot 2^{201} \cdot 3^{82} \cdot 5^{34} \cdot 7^{32} \cdot 11^{19} \cdot 13^{15} \cdot 17^{9} \cdot 19^{7} \cdot 23^{8} \cdot 31^{6} \cdot 37^{5} \\
&\cdot 41^{4} \cdot 47^{3} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 61^{2} \cdot 67^{2} \cdot 73^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97^{2} \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\cdot 109 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193 \\
&\cdot 727297 \cdot 64778760224034269867033351318033, \\
C_{210} = &\frac{1}{43 \cdot 71 \cdot 211} \cdot 2^{207} \cdot 3^{88} \cdot 5^{36} \cdot 7^{35} \cdot 11^{19} \cdot 13^{16} \cdot 17^{10} \cdot 19^{8} \cdot 23^{9} \cdot 31^{5} \cdot 37^{5} \\
&\cdot 41^{5} \cdot 47^{3} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 61^{2} \cdot 67^{3} \cdot 73^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97^{2} \cdot 101^{2} \cdot 103^{2} \cdot 107 \\
&\cdot 109 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193 \\
&\cdot 199 \cdot 537631123386707971 \cdot 1879498328977922881976251377771, \\
C_{224} = &\frac{-1}{29 \cdot 113} \cdot 2^{211} \cdot 3^{93} \cdot 5^{38} \cdot 7^{37} \cdot 11^{21} \cdot 13^{17} \cdot 17^{11} \cdot 19^{7} \cdot 23^{9} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \\
&\cdot 41^{5} \cdot 47^{3} \cdot 53^{4} \cdot 59^{3} \cdot 61^{3} \cdot 67^{3} \cdot 73^{3} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97^{2} \cdot 101^{2} \cdot 103^{2} \cdot 107^{2} \\
&\cdot 109^{2} \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193 \\
&\cdot 199 \cdot 2143 \cdot 980275197267685204162754635787499610695199551689, \\
C_{238} = &\frac{1}{239} \cdot 2^{235} \cdot 3^{102} \cdot 5^{42} \cdot 7^{38} \cdot 11^{22} \cdot 13^{18} \cdot 17^{13} \cdot 19^{8} \cdot 23^{10} \cdot 31^{6} \cdot 37^{6} \\
&\cdot 41^{5} \cdot 47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{2} \cdot 67^{4} \cdot 73^{3} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97^{2} \cdot 101^{2} \cdot 103^{2} \cdot 107^{2} \\
&\cdot 109^{2} \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193 \\
&\cdot 199 \cdot 223 \cdot 227 \cdot 229 \cdot 233 \\
&\cdot 1481 \cdot 817289119749725617 \cdot 129311862685631303361301385041, \\
C_{252} = &\frac{-1}{29 \cdot 43 \cdot 127} \cdot 2^{213} \cdot 3^{107} \cdot 5^{44} \cdot 7^{41} \cdot 11^{24} \cdot 13^{19} \cdot 17^{11} \cdot 19^{9} \cdot 23^{10} \cdot 31^{7} \cdot 37^{6} \\
&\cdot 41^{6} \cdot 47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{4} \cdot 61^{3} \cdot 67^{3} \cdot 73^{3} \cdot 79^{3} \cdot 83^{3} \cdot 89^{2} \cdot 97^{2} \cdot 101^{2} \cdot 103^{2} \cdot 107^{2} \\
&\cdot 109^{2} \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 181 \cdot 191 \cdot 193 \\
&\cdot 199 \cdot 223 \cdot 227 \cdot 229 \cdot 233 \cdot 241 \cdot 38356192325687 \\
&\cdot 983117314012755559943 \cdot 209316897257954284206743809693.
\end{aligned}
$$

これら C_{14n} は ある整数 G_{14n} でもつて，以下のやうに書ける.（von Staudt-Clausen 型の定理. C_{252} まで.）

$$
\begin{aligned}
&C_{14} && (\text{整数}),\\
&C_{28} = \frac{4}{29} && + G_{28},\\
&C_{42} = \frac{10}{43} && + G_{42},\\
&C_{56} = \frac{4^2}{29} && + G_{56},\\
&C_{70} = \frac{20}{71} && + G_{70},\\
&C_{84} = \frac{4^3}{29} + \frac{10^2}{43} && + G_{84},\\
&C_{98} && (\text{整数}),\\
&C_{112} = \frac{4^4}{29} + \frac{3}{113} && + G_{112},\\
&C_{126} = \frac{10^3}{43} + \frac{41}{127} && + G_{126},\\
&C_{140} = \frac{4^5}{29} + \frac{20^2}{71} && + G_{140},\\
&C_{154} && (\text{整数}),\\
&C_{168} = \frac{4^6}{29} + \frac{10^4}{43} && + G_{168},\\
&C_{182} && (\text{整数}),\\
&C_{196} = \frac{4^7}{29} + \frac{56}{197} && + G_{196},\\
&C_{210} = \frac{10^5}{43} + \frac{20^3}{71} + \frac{180}{211} && + G_{210},\\
&C_{224} = \frac{4^8}{29} + \frac{3^2}{113} && + G_{224},\\
&C_{238} = \frac{118}{239} && + G_{238},\\
&C_{252} = \frac{4^9}{29} + \frac{10^6}{43} + \frac{41^2}{127} && + G_{252}.
\end{aligned}
$$

16.5. 曲線 $\boldsymbol{y^2 = x^7 - x}$ の $\boldsymbol{x(u)}$ について. 曲線 $y^2 = x^7 - x$ （種数 $g = 3$）について C_{12n} の最初のいくつかの値はつぎのとほり：

$$
\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{1}{13} \cdot 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7, \\
C_{24} &= \frac{-1}{13} \cdot 2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 17^2 \cdot 19, \\
C_{36} &= \frac{1}{13 \cdot 37} \cdot 2^{36} \cdot 3^{17} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 17^2 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41, \\
C_{48} &= \frac{-1}{13 \cdot 61} \cdot 2^{46} \cdot 3^{22} \cdot 5^6 \cdot 7^5 \cdot 11^4 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \\
&\quad \cdot 43 \cdot 226843, \\
C_{60} &= \frac{1}{13 \cdot 61} \cdot 2^{56} \cdot 3^{30} \cdot 5^{11} \cdot 7^8 \cdot 11^5 \cdot 17^3 \cdot 19^5 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 31 \cdot 41 \\
&\quad \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 1489, \\
C_{72} &= \frac{-1}{13 \cdot 37} \cdot 2^{73} \cdot 3^{34} \cdot 5^{10} \cdot 7^{10} \cdot 11^6 \cdot 17^4 \cdot 19^3 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 41 \\
&\quad \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 9833 \cdot 38618729, \\
C_{84} &= \frac{1}{13} \cdot 2^{84} \cdot 3^{42} \cdot 5^{14} \cdot 7^{12} \cdot 11^7 \cdot 17^3 \cdot 19^4 \cdot 23^3 \cdot 29^2 \cdot 31^2 \cdot 41^2 \\
&\quad \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 257 \cdot 311 \cdot 10445899, \\
C_{96} &= \frac{-1}{13 \cdot 97} \cdot 2^{94} \cdot 3^{47} \cdot 5^{14} \cdot 7^{12} \cdot 11^8 \cdot 17^4 \cdot 19^4 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 31^3 \cdot 41^2 \\
&\quad \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 157 \cdot 47563 \cdot 46457 \cdot 653693, \\
C_{108} &= \frac{1}{13 \cdot 37 \cdot 109} \cdot 2^{105} \cdot 3^{53} \cdot 5^{18} \cdot 7^{15} \cdot 11^9 \cdot 17^6 \cdot 19^5 \cdot 23^4 \cdot 29^3 \cdot 31^3 \cdot 41^2 \\
&\quad \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 101 \cdot 103 \\
&\quad \cdot 647 \cdot 255307815673498109, \\
C_{120} &= \frac{-1}{13 \cdot 61} \cdot 2^{116} \cdot 3^{59} \cdot 5^{18} \cdot 7^{17} \cdot 11^9 \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 31^3 \cdot 41^2 \\
&\quad \cdot 43^2 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\quad \cdot 331 \cdot 4759 \cdot 8486377 \cdot 205745894701, \\
C_{132} &= \frac{1}{13} \cdot 2^{132} \cdot 3^{63} \cdot 5^{22} \cdot 7^{18} \cdot 11^{12} \cdot 17^6 \cdot 19^6 \cdot 23^5 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 41^3 \\
&\quad \cdot 43^3 \cdot 47^2 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\quad \cdot 127 \cdot 519205082831736259350305213, \\
C_{144} &= \frac{-1}{13 \cdot 37 \cdot 73} \cdot 2^{145} \cdot 3^{70} \cdot 5^{22} \cdot 7^{19} \cdot 11^{13} \cdot 17^7 \cdot 19^7 \cdot 23^6 \cdot 29^3 \cdot 31^4 \cdot 41^3 \\
&\quad \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 71^2 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\quad \cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 487 \cdot 116447 \cdot 70754581159 \cdot 13276324698781, \\
C_{156} &= \frac{1}{13 \cdot 157} \cdot 2^{152} \cdot 3^{75} \cdot 5^{26} \cdot 7^{22} \cdot 11^{14} \cdot 17^8 \cdot 19^8 \cdot 23^6 \cdot 29^4 \cdot 31^4 \cdot 41^3 \\
&\quad \cdot 43^3 \cdot 47^3 \cdot 53^2 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 71^2 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\quad \cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot 449 \cdot 9839 \cdot 2761009 \cdot 22771433 \cdot 14897675203748611, \\
C_{168} = &\frac{-1}{13} \cdot 2^{167} \cdot 3^{87} \cdot 5^{26} \cdot, 7^{25} \cdot 11^{15} \cdot 17^{7} \cdot 19^{8} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 41^{4} \\
&\cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot 53^{3} \cdot 59^{2} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 163 \\
&\cdot 2153 \cdot 2179 \cdot 2909 \cdot 5303 \cdot 28573 \cdot 215723 \cdot 486014655083, \\
C_{180} = &\frac{1}{13 \cdot 37 \cdot 61 \cdot 181} \cdot 2^{181} \cdot 3^{90} \cdot 5^{31} \cdot 7^{25} \cdot 11^{16} \cdot 17^{8} \cdot 19^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 41^{4} \\
&\cdot 43^{4} \cdot 47^{4} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \\
&\cdot 1409 \cdot 4356533 \cdot 4142965053699842320224225817933 3, \\
C_{192} = &\frac{-1}{13 \cdot 97 \cdot 193} \cdot 2^{190} \cdot 3^{97} \cdot 5^{30} \cdot 7^{26} \cdot 11^{17} \cdot 17^{10} \cdot 19^{10} \cdot 23^{8} \cdot 29^{5} \cdot 31^{6} \cdot 41^{4} \\
&\cdot 43^{4} \cdot 47^{4} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \\
&\cdot 1637 \cdot 6553 \cdot 91528069 \cdot 138182422934743639 \cdot 20021491335197148 47, \\
C_{204} = &\frac{1}{13} \cdot 2^{201} \cdot 3^{100} \cdot 5^{34} \cdot 7^{29} \cdot 11^{18} \cdot 17^{11} \cdot 19^{10} \cdot 23^{8} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 41^{3} \\
&\cdot 43^{4} \cdot 47^{4} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 67^{3} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 101^{2} \cdot 103 \cdot 107 \cdot 113 \\
&\cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 191 \cdot 197 \cdot 199 \\
&\cdot 3215816668951 \cdot 690281420686969 \cdot 355828513600997578367, \\
C_{216} = &\frac{-1}{13 \cdot 37 \cdot 73 \cdot 109} \cdot 2^{213} \cdot 3^{106} \cdot 5^{34} \cdot 7^{31} \cdot 11^{19} \cdot 17^{10} \cdot 19^{11} \cdot 23^{9} \cdot 29^{6} \cdot 31^{6} \cdot 41^{4} \\
&\cdot 43^{4} \cdot 47^{4} \cdot 53^{4} \cdot 59^{3} \cdot 67^{3} \cdot 71^{3} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 101^{2} \cdot 103^{2} \cdot 107^{2} \cdot 113 \\
&\cdot 127 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 163 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 191 \cdot 197 \cdot 199 \cdot 211 \\
&\cdot 668273 \cdot 236655047 \cdot 8245796813443668293 \\
&\cdot 204802173835724669974107025 7.
\end{aligned}
$$

これら C_{12n} は ある整数 G_{12n} でもつて，以下のやうに書ける．(von Staudt-Clausen 型の定理． C_{216} まで．)

$$
\begin{aligned}
C_{12} &= \frac{7}{13} &&+ G_{12},\\
C_{24} &= \frac{7^2}{13} &&+ G_{24},\\
C_{36} &= \frac{7^3}{13} &&+ G_{36},\\
C_{48} &= \frac{7^4}{13} &&+ G_{48},\\
C_{60} &= \frac{7^5}{13} + \frac{51}{61} &&+ G_{60},\\
C_{72} &= \frac{7^6}{13} + \frac{6}{73} &&+ G_{72},\\
C_{84} &= \frac{7^7}{13} &&+ G_{84},\\
C_{96} &= \frac{7^8}{13} + \frac{79}{97} &&+ G_{96},\\
C_{108} &= \frac{7^9}{13} + \frac{103}{109} &&+ G_{108},\\
C_{120} &= \frac{7^{10}}{13} + \frac{51^2}{61} &&+ G_{120},\\
C_{132} &= \frac{7^{11}}{13} &&+ G_{132},\\
C_{144} &= \frac{7^{12}}{13} + \frac{6^2}{73} &&+ G_{144},\\
C_{156} &= \frac{7^{13}}{13} + \frac{22}{157} &&+ G_{156},\\
C_{168} &= \frac{7^{14}}{13} &&+ G_{168},\\
C_{180} &= \frac{7^{15}}{13} + \frac{51^3}{61} + \frac{79^2}{97} + \frac{18}{181} &&+ G_{180},\\
C_{192} &= \frac{7^{16}}{13} + \frac{179}{193} &&+ G_{196},\\
C_{204} &= \frac{7^{17}}{13} &&+ G_{204},\\
C_{216} &= \frac{7^{18}}{13} + \frac{6^3}{73} + \frac{103^2}{109} &&+ G_{216}.
\end{aligned}
$$

16.6. 曲線 $y^2 = x^9 - 1$ の $x(u)$ について. 曲線 $y^2 = x^9 - 1$（種数 $g = 4$）について C_{18n} の最初のいくつかの値はつぎのとほり：

$$\begin{aligned}
C_{18} &= \frac{1}{19} \cdot 2^{16} \cdot 3^{8} \cdot 5^{3} \cdot 7^{2} \cdot 11 \cdot 13, \\
C_{36} &= \frac{-1}{19 \cdot 37} \cdot 2^{34} \cdot 3^{17} \cdot 5^{7} \cdot 7^{4} \cdot 11^{3} \cdot 13^{2} \cdot 17^{2} \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 53, \\
C_{54} &= \frac{1}{19} \cdot 2^{51} \cdot 3^{26} \cdot 5^{12} \cdot 7^{8} \cdot 11^{3} \cdot 13^{4} \cdot 17^{3} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47, \\
C_{72} &= \frac{-1}{19 \cdot 37 \cdot 73} \cdot 2^{70} \cdot 3^{34} \cdot 5^{16} \cdot 7^{11} \cdot 11^{5} \cdot 13^{5} \cdot 17^{4} \cdot 23^{3} \cdot 29^{2} \cdot 31^{2} \cdot 41 \\
&\quad \cdot 43 \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 277 \cdot 35107, \\
C_{90} &= \frac{1}{19} \cdot 2^{89} \cdot 3^{44} \cdot 5^{21} \cdot 7^{13} \cdot 11^{7} \cdot 13^{5} \cdot 17^{5} \cdot 23^{3} \cdot 29^{3} \cdot 31^{2} \cdot 41^{2} \cdot 43^{2} \\
&\quad \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 113 \cdot 199 \cdot 2069, \\
C_{108} &= \frac{-1}{19 \cdot 37 \cdot 109} \cdot 2^{105} \cdot 3^{53} \cdot 5^{29} \cdot 7^{17} \cdot 11^{7} \cdot 13^{7} \cdot 17^{6} \cdot 23^{4} \cdot 29^{3} \cdot 31^{3} \cdot 41^{2} \\
&\quad \cdot 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot 53^{2} \cdot 59 \cdot 61^{2} \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 251 \cdot 2681009, \\
C_{126} &= \frac{1}{19 \cdot 127} \cdot 2^{126} \cdot 3^{63} \cdot 5^{31} \cdot 7^{21} \cdot 11^{10} \cdot 13^{8} \cdot 17^{7} \cdot 23^{5} \cdot 29^{5} \cdot 31^{4} \cdot 41^{3} \\
&\quad \cdot 43^{2} \cdot 47^{2} \cdot 53^{2} \cdot 59^{2} \cdot 61^{2} \cdot 67 \cdot 71 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 113 \cdot 22639911725059, \\
C_{144} &= \frac{-1}{19 \cdot 37 \cdot 73} \cdot 2^{144} \cdot 3^{71} \cdot 5^{35} \cdot 7^{22} \cdot 11^{14} \cdot 13^{11} \cdot 17^{8} \cdot 23^{6} \cdot 29^{3} \cdot 31^{4} \cdot 41^{3} \\
&\quad \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot 53^{2} \cdot 59^{2} \cdot 61^{2} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 113 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 257 \cdot 2063 \cdot 14375966528323, \\
C_{162} &= \frac{1}{19 \cdot 163} \cdot 2^{160} \cdot 3^{84} \cdot 5^{39} \cdot 7^{26} \cdot 11^{12} \cdot 13^{11} \cdot 17^{9} \cdot 23^{7} \cdot 29^{4} \cdot 31^{5} \cdot 41^{3} \\
&\quad \cdot 43^{3} \cdot 47^{3} \cdot 53^{3} \cdot 59^{2} \cdot 61^{2} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 113 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 683 \cdot 1868051 \cdot 4779877 \cdot 5414895901, \\
C_{180} &= \frac{-1}{19 \cdot 37 \cdot 181} \cdot 2^{180} \cdot 3^{92} \cdot 5^{45} \cdot 7^{28} \cdot 11^{14} \cdot 13^{12} \cdot 17^{10} \cdot 23^{7} \cdot 29^{5} \cdot 31^{5} \cdot 41^{4} \\
&\quad \cdot 43^{4} \cdot 47^{3} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 61^{2} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 113 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151 \cdot 157 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \\
&\quad \cdot 80051837 \cdot 34258198164906355929 83, \\
C_{198} &= \frac{1}{19 \cdot 199} \cdot 2^{196} \cdot 3^{99} \cdot 5^{47} \cdot 7^{32} \cdot 11^{18} \cdot 13^{14} \cdot 17^{11} \cdot 23^{8} \cdot 29^{7} \cdot 31^{6} \cdot 41^{4} \\
&\quad \cdot 43^{4} \cdot 47^{4} \cdot 53^{3} \cdot 59^{3} \cdot 61^{3} \cdot 67^{2} \cdot 71^{2} \cdot 79^{2} \cdot 83^{2} \cdot 89^{2} \cdot 97^{2} \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \\
&\quad \cdot 113 \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 149 \cdot 151^{2} \cdot 157 \cdot 167 \cdot 173 \cdot 179 \cdot 191 \cdot 193 \cdot 197 \\
&\quad \cdot 3943 \cdot 64682082077 \cdot 9591335434411.
\end{aligned}$$

これら C_{18n} は ある整数 G_{18n} でもつて，以下のやうに書ける．(von Staudt-Clausen 型の定理． C_{198} まで．)

$$
\begin{aligned}
C_{18} &= \frac{7}{19} + G_{18},\\
C_{36} &= \frac{7^2}{19} + \frac{5}{37} + G_{36},\\
C_{54} &= \frac{7^3}{19} + G_{54},\\
C_{72} &= \frac{7^4}{19} + \frac{5^2}{37} + \frac{67}{73} + G_{76},\\
C_{90} &= \frac{7^5}{19} + G_{90},\\
C_{108} &= \frac{7^6}{19} + \frac{5^3}{37} + G_{108},\\
C_{126} &= \frac{7^7}{19} + \frac{95}{109} + G_{126},\\
C_{144} &= \frac{7^8}{19} + \frac{5^4}{37} + \frac{67^2}{73} + G_{144},\\
C_{162} &= \frac{7^9}{19} + \frac{7}{163} + G_{162},\\
C_{180} &= \frac{7^{10}}{19} + \frac{5^5}{37} + \frac{20}{181} + G_{180},\\
C_{198} &= \frac{7^{11}}{19} + \frac{114}{199} + G_{198}.
\end{aligned}
$$

17 超楕円曲線でない場合

17.1. 無限遠点が完全分岐した代数曲線. ここでは，一般の（円分型）代数曲線（種数は g とする）では，どのやうに変数 u_g を選ぶのかについて，解説する．

いま a と b を互ひに素な 2 つの自然数とし，

$$f(x,y) = y^a - x^b - \sum_{(i,j)} \lambda_{ia+jb} x^i y^j \tag{17.1.1}$$

とおく．ただし，(i,j) は

$$0 \leqq i < b-1,\ 0 \leqq j < a-1,\ ia+jb < ab \tag{17.1.2}$$

を満たす整数の組を走る．我々は代数曲線

$$C : f(x,y) = 0 \tag{17.1.3}$$

について議論を展開するのである．ただし C は，自然に，無限遠に 1 点 ∞ のみを有する代数曲線であると考へる．また C の種数は $g=(a-1)(b-1)/2$ である．この節では C は非特異なものしか考へない．このやうな C については

$$\frac{x^{i-1}y^{a-j-1}dx}{f_y(x,y)} \tag{17.1.4}$$

たちが C の第 1 種微分形式の基底をなす．ただし $f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ であり，i と j は

$$-ia+jb \geqq 0,\ i>0,\ a>j>0$$

なる g 個の整数の組を走る．上記の基底を，$-ai+jb$ が大きい順に ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_g と名付ける．通常の方法で，Riemann 面としての C の基本群の適当な生成系についての，これらの微分形式に関する周期を $[\omega'\ \omega'']$ とし，$\mathbf{C}^g$ の格子

$$\Lambda := \omega'\,{}^t[\mathbf{Z}\quad \mathbf{Z}\quad \cdots\quad \mathbf{Z}] + \omega''\,{}^t[\mathbf{Z}\quad \mathbf{Z}\quad \cdots\quad \mathbf{Z}]\ (\subset \mathbf{C}^g)$$

を考へておく．

曲線 C の Jacobi 多様体を J と記し，C の g 個の**対称積**を $\mathrm{Sym}^g(C)$ と書けば，双有理写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^g(C) &\to \mathrm{Pic}^\circ(C) = J \\ (P_1,\ldots,P_g) &\mapsto \text{the class of } P_1+\cdots+P_g - g\cdot\infty \end{aligned}$$

を得る．解析的な多様体として J は $\mathbf{C}^g/\Lambda$ と同一視される．我々は κ でもつて，自然な写像 $\mathbf{C}^g \to \mathbf{C}^g/\Lambda = J$ を表す．写像

$$\iota : Q \mapsto Q - \infty$$

により，C は J に埋めこまれる．この埋め込み ι の像の κ による引き戻し $\kappa^{-1}\iota(C)$ は曲線 C の普遍 Abel 被覆になつてゐる．また，上記の双有理写像は，解析的には，各 $(P_1,\ldots,P_g) \in \mathrm{Sym}^g(C)$ を点 $\boldsymbol{u} \mod \Lambda \in \mathbf{C}^g/\Lambda$，ただし

$$\boldsymbol{u} = (u_1,\ldots,u_g) = \left(\int_\infty^{P_1} + \cdots + \int_\infty^{P_g}\right)(\omega_1,\ \ldots,\ \omega_g),$$

に写す写像に他ならない．

各点 $u \in \kappa^{-1}\iota(C)$ に対し，記号

$$x(\boldsymbol{u}), \qquad y(\boldsymbol{u}) \tag{17.1.5}$$

でもつて，$\kappa(\boldsymbol{u}) = \iota\,(x(\boldsymbol{u}),\ y(\boldsymbol{u}))$ なる C の点の (x, y) 座標を表すことにする．我々は，これやこれらの有理式を $\kappa^{-1}\iota(C)$ 上の函数と見るのである．次の補題は基本的である．

補題 17.1.6. 函数 $x(\boldsymbol{u})$ と $y(\boldsymbol{u})$ の $\boldsymbol{u} = (0, \cdots, 0)$ における Laurent 展開に関して

$$x(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{{u_g}^a} + (d^\circ(u_g) \geqq -a+1), \quad y(\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{{u_g}^b} + (d^\circ(u_g) \geqq -b+1)$$

が成り立つ．

また，

$\iota^{-1}\kappa(C)$ 上の $\boldsymbol{u} = (0, \cdots, 0)$ における局所助変数としては u_g をとるのが自然である．

といふこともわかる．

円分型代数曲線 とは，上記 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = y^a - x^b + 1, \quad \text{または} \quad f(x, y) = y^a - x^b + x \tag{17.1.7}$$

で与へられるやうな曲線 C ことである．そのやうな曲線では，上記の函数 $u_g \mapsto x(\boldsymbol{u})$, $u_g \mapsto y(\boldsymbol{u})$ の u_g に関する Hurwitz 係数が，Clarke の定理（von Staudt-Clausen の定理と von Staudt の第 2 定理）のや Kummer の合同式の自然な拡張をみたすのである．証明はすべて，この論文の方法でできるはずである．

17.2. 曲線 $\boldsymbol{y}^3 = \boldsymbol{x}^5 - \mathbf{1}$ の $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ について. 曲線 $y^3 = x^5 - 1$ (種数 $g = 4$) に対しては

$$u_4 = \int_\infty^{(x,y)} \frac{x^2}{3y^2}$$

が無限遠点における局所助変数であり，これから得られる函数 $x(\boldsymbol{u})$ は微分方程式

$$\frac{du_4}{dx} = \frac{x^2dx}{3y^2},$$

つまり

$$\boxed{x(\boldsymbol{u})^6 x'(\boldsymbol{u})^3 = 27(x(\boldsymbol{u})^5 - 1)^2 \quad \text{(ただし $'$ は $\frac{d}{du_4}$ を表す).}}$$

の解である.

この $x(\boldsymbol{u})$ についての C_m の最初のいくつかの値はつぎのとほり．ただし，C_{15n} 以外の C_m は 0 である．

$$
\begin{aligned}
C_{15} &= 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11, \\
C_{30} &= \frac{1}{31} \cdot 2^{19} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^3 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19^2 \cdot 23, \\
C_{45} &= 2^{31} \cdot 3^{21} \cdot 5^{10} \cdot 7^6 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 29 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 787, \\
C_{60} &= \frac{1}{31 \cdot 61} \cdot 2^{43} \cdot 3^{28} \cdot 5^{15} \cdot 7^9 \cdot 11^5 \cdot 13^5 \cdot 17^3 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \\
&\quad \cdot 47 \cdot 53 \cdot 2671, \\
C_{75} &= 2^{55} \cdot 3^{37} \cdot 5^{18} \cdot 7^{11} \cdot 11^6 \cdot 13^5 \cdot 17^4 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29^2 \cdot 37^2 \cdot 41 \cdot 43 \\
&\quad \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 149 \cdot 5843, \\
C_{90} &= \frac{1}{31} \cdot 2^{67} \cdot 3^{44} \cdot 5^{21} \cdot 7^{13} \cdot 11^9 \cdot 13^5 \cdot 17^5 \cdot 19^3 \cdot 23 \cdot 29^4 \cdot 37^2 \cdot 41^2 \cdot 43^2 \\
&\quad \cdot 47 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 482561869, \\
C_{105} &= 2^{79} \cdot 3^{51} \cdot 5^{25} \cdot 7^{17} \cdot 11^9 \cdot 13^6 \cdot 17^6 \cdot 19^5 \cdot 23^2 \cdot 29^3 \cdot 37^2 \cdot 41^2 \cdot 43^2 \\
&\quad \cdot 47^2 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 4132022673901, \\
C_{120} &= \frac{1}{31 \cdot 61} \cdot 2^{91} \cdot 3^{59} \cdot 5^{29} \cdot 7^{18} \cdot 11^9 \cdot 13^8 \cdot 17^6 \cdot 19^5 \cdot 23^3 \cdot 29^4 \cdot 37^3 \cdot 41^2 \cdot 43^2 \\
&\quad \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \\
&\quad \cdot 113153 \cdot 31199395512997, \\
C_{135} &= 2^{103} \cdot 3^{66} \cdot 5^{34} \cdot 7^{20} \cdot 11^{12} \cdot 13^9 \cdot 17^7 \cdot 19^6 \cdot 23^2 \cdot 29^4 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \\
&\quad \cdot 47^2 \cdot 53 \cdot 59^2 \cdot 67 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 79 \cdot 83^2 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \\
&\quad \cdot 131 \cdot 1567 \cdot 970351 \cdot 280656653, \\
C_{150} &= \frac{1}{31 \cdot 151} \cdot 2^{115} \cdot 3^{73} \cdot 5^{37} \cdot 7^{24} \cdot 11^{13} \cdot 13^{11} \cdot 17^8 \cdot 19^5 \cdot 23^3 \cdot 29^5 \cdot 37^3 \cdot 41^3 \cdot 43^3 \\
&\quad \cdot 47^3 \cdot 53 \cdot 59^2 \cdot 67^2 \cdot 71^2 \cdot 73^2 \cdot 79 \cdot 83 \cdot 89 \cdot 97 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 113 \cdot 127 \\
&\quad \cdot 131 \cdot 137 \cdot 139 \cdot 1993 \cdot 13703297 \cdot 394936930338121.
\end{aligned}
$$

これら C_{15n} は ある整数 G_{15n} でもつて，以下のやうに書ける．(von Staudt-Clausen 型の定理．C_{150} まで．)

$$
\begin{aligned}
&C_{15} && && && \text{(整数)}, \\
&C_{30} = \frac{2}{31} && && && +G_{30}, \\
&C_{45} && && && \text{(整数)}, \\
&C_{60} = \frac{2\cdot 4}{31} && +\frac{6}{61} && && +G_{60}, \\
&C_{75} && && && \text{(整数)}, \\
&C_{90} = \frac{2\cdot 4^2}{31} && && && +G_{90}, \\
&C_{105} && && && \text{(整数)}, \\
&C_{120} = \frac{2\cdot 4^3}{31} && +\frac{11\cdot 12}{61} && && +G_{120}, \\
&C_{135} && && && \text{(整数)}, \\
&C_{150} = \frac{2\cdot 4^4}{31} && && +\frac{136}{151} && +G_{150}.
\end{aligned}
$$

17.3. 曲線 $\boldsymbol{y}^4 = \boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$ について. 曲線 $y^4 = x^3 - x$ （種数 $g = 3$）に対しては

$$u_3 = \int_{\infty}^{(x,y)} \frac{xdx}{4y^3}$$

が無限遠点における局所助変数であり，これから得られる函数 $x(\boldsymbol{u})$ は微分方程式

$$\frac{du_3}{dx} = \frac{x}{4y^3},$$

つまり

$$\boxed{x(\boldsymbol{u})x'(\boldsymbol{u})^4 = 4^4(x^2(\boldsymbol{u}) - 1)^3 \quad \text{（ただし $'$ は $\frac{d}{du_3}$ を表す）.}}$$

の解である.

この $x(\boldsymbol{u})$ についての C_m の最初のいくつかの値はつぎのとほり．ただし，C_{8n} 以外の C_m は 0 である．

$$
\begin{aligned}
C_8 &= 2^6,\\
C_{16} &= \frac{-1}{17}\cdot 2^{16}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11,\\
C_{24} &= 2^{21}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^4\cdot 11\cdot 13\cdot 19,\\
C_{32} &= \frac{-1}{17}\cdot 2^{30}\cdot 3^9\cdot 5^4\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 19\cdot 23\cdot 53,\\
C_{40} &= \frac{1}{41}\cdot 2^{38}\cdot 3^{12}\cdot 5^7\cdot 7^5\cdot 11^3\cdot 13^2\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 10079,\\
C_{48} &= \frac{-1}{17}\cdot 2^{48}\cdot 3^{15}\cdot 5^6\cdot 7^5\cdot 11^4\cdot 13^3\cdot 19^2\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 43\cdot 631\cdot 743,\\
C_{56} &= 2^{52}\cdot 3^{18}\cdot 5^8\cdot 7^8\cdot 11^4\cdot 13^4\cdot 19^2\cdot 23^2\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 43\cdot 47\cdot 6278521,\\
C_{64} &= \frac{-1}{17}\cdot 2^{62}\cdot 3^{21}\cdot 5^{10}\cdot 7^8\cdot 11^5\cdot 13^3\cdot 19^3\cdot 23^2\cdot 29^2\cdot 31\cdot 37\cdot 43\cdot 47\\
&\quad\cdot 53\cdot 59\cdot 4383871061,\\
C_{72} &= \frac{1}{73}\cdot 2^{70}\cdot 3^{24}\cdot 5^{10}\cdot 7^{10}\cdot 11^7\cdot 13^4\cdot 19^3\cdot 23^3\cdot 29^2\cdot 31^2\cdot 37\cdot 43^2\cdot 47\\
&\quad\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 131\cdot 262369,\\
C_{80} &= \frac{-1}{17\cdot 41}\cdot 2^{80}\cdot 3^{27}\cdot 5^{13}\cdot 7^{11}\cdot 11^7\cdot 13^4\cdot 19^4\cdot 23^4\cdot 29^2\cdot 31^2\cdot 37^2\cdot 43\cdot 47\\
&\quad\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 439\cdot 547\cdot 667333,\\
C_{88} &= \frac{1}{89}\cdot 2^{84}\cdot 3^{30}\cdot 5^{14}\cdot 7^{12}\cdot 11^8\cdot 13^5\cdot 19^4\cdot 23^3\cdot 29^2\cdot 31^2\cdot 37^2\cdot 43\cdot 47\\
&\quad\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 79\cdot 83\cdot 1121453\cdot 21825851419,\\
C_{96} &= \frac{-1}{17\cdot 97}\cdot 2^{96}\cdot 3^{33}\cdot 5^{14}\cdot 7^{12}\cdot 11^8\cdot 13^6\cdot 19^4\cdot 23^4\cdot 29^3\cdot 31^3\cdot 37^2\cdot 43^2\cdot 47\\
&\quad\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 79\cdot 83\cdot 139\cdot 20840707\cdot 194526553349,\\
C_{104} &= 2^{104}\cdot 3^{36}\cdot 5^{16}\cdot 7^{14}\cdot 11^9\cdot 13^7\cdot 19^5\cdot 23^4\cdot 29^3\cdot 31^3\cdot 37^2\cdot 43^2\cdot 47^2\\
&\quad\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 79\cdot 83\cdot 1993\cdot 126570133\cdot 4007528953,\\
C_{112} &= \frac{-1}{17\cdot 113}\cdot 2^{113}\cdot 3^{39}\cdot 5^{18}\cdot 7^{16}\cdot 11^9\cdot 13^7\cdot 19^5\cdot 23^4\cdot 29^3\cdot 31^3\cdot 37^2\cdot 43^2\cdot 47^2\\
&\quad\cdot 53^2\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 79\cdot 83\cdot 101\cdot 103\cdot 107\cdot 167\\
&\quad\cdot 708559763954791007179 19,\\
C_{120} &= \frac{1}{41}\cdot 2^{116}\cdot 3^{42}\cdot 5^{18}\cdot 7^{17}\cdot 11^9\cdot 13^8\cdot 19^6\cdot 23^5\cdot 29^4\cdot 31^3\cdot 37^3\cdot 43^2\cdot 47^2\\
&\quad\cdot 53^2\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 79\cdot 83\cdot 101\cdot 103\cdot 107\cdot 109\\
&\quad\cdot 541\cdot 117101\cdot 1595557\cdot 27462441284549.
\end{aligned}
$$

これら C_{8n} は ある整数 G_{8n} でもつて，以下のやうに書ける．(von Staudt-Clausen 型の定理．C_{144} まで．)

$$
\begin{aligned}
&C_8 && && && && && && \text{(整数)},\\
&C_{16} = \frac{11}{17} && && && && && && +G_{16},\\
&C_{24} && && && && && && \text{(整数)},\\
&C_{32} = \frac{11\cdot 15}{17} && && && && && && +G_{32},\\
&C_{40} = && \frac{29}{41} && && && && && +G_{40},\\
&C_{48} = \frac{11\cdot 15^2}{17} && && && && && && +G_{48},\\
&C_{56} && && && && && && \text{(整数)},\\
&C_{64} = \frac{11\cdot 15^3}{17} && && && && && && +G_{64},\\
&C_{72} = && && \frac{1}{73} && && && && +G_{72},\\
&C_{80} = \frac{11\cdot 15^4}{17} && +\frac{29\cdot 10^2}{41} && && && && && +G_{80},\\
&C_{88} = && && && \frac{28}{89} && && && +G_{88},\\
&C_{96} = \frac{11\cdot 15^5}{17} && && && && +\frac{94}{97} && && +G_{96},\\
&C_{104} && && && && && && \text{(整数)},\\
&C_{112} = \frac{11\cdot 15^6}{17} && && && && && +\frac{73}{113} && +G_{112},\\
&C_{120} = && \frac{29\cdot 10^3}{41} && && && && && +G_{120}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{18}$ 付 録

18.1. 二項係数間のいくつかの関係式. 曲線 $y^2 = x^5 - 1 \bmod p$ の（4.1.1）でとつた基底に関する Hasse-Witt 行列は，[**Yu**] の冒頭に述べられてゐるやうに，対角行列になり，その $(2,2)$ 成分は，定理 6.1.1 にある

$$A_p = (-1)^{(p-1)/10} \cdot \binom{(p-1)/2}{(p-1)/10} \mod p$$

であることがわかる．ここでは，これが（11.1.4）の値と一致することを示さう．つまり，素数 $p \equiv 1 \bmod 5$ に対して，$p = 10m + 1$ と書くとき

$$\frac{(2m-1)!!}{m!2^m} \equiv (-1)^m \binom{5m}{m} \mod p$$

を示したい．これは

$$\frac{(2m-1)!!}{m!} \equiv (-2)^m \binom{5m}{m} \mod p$$

と同値であるので，こちらを証明する．

$$2(5m),\ \ 2(5m-1), \cdots, 2(5m-(m-1)) \mod p$$

はそれぞれ

$$-1, \quad -3, \cdots, \ -(2m-1) \mod p$$

に一致する．このことから上記の等式が直ちにわかる．

つぎに，定理 3.1.1 の結果から

$$\frac{(5m-3)!!}{m!(-5)^m} \equiv (-1)^m \binom{5m}{m} \mod p$$

が成り立つはずであるが，これも上記のやうに，初等的な推論でわかる．読者には試みられたい．

以上のことは p 進 Γ 函数の性質を使つて示すこともできるが，あへてここでは，初等的な方法を紹介したのである．

18.2. 収束が正当化できてゐないある Eisenstein 型の級数との関連. さて，ここまで述べてきた C_n （や D_n）がなにか L 函数のやうなものと結びつくであらうか. 以下のやうな考察から，そのやうなことを期待することが全くばかばかしいことではないことがおわかりいただけると思ふ.

始めに，Hurwitz の公式

$$\sum_{\lambda\in\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\sqrt{-1},\,\neq 0}\frac{1}{\lambda^{4n}}=\frac{\varpi^{4n}}{(4n)!}2^{4n}E_{4n} \tag{18.2.1}$$

の証明を復習してみる（[**Hu1**] または [**AIK**]，pp.193-198 を参照）. ただし，

$$\varpi=\int_1^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}\,(\,>0)\,.$$

それは 2 種類の展開

$$\begin{aligned}\wp(u)&=\frac{1}{u^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^nE_n}{n}\frac{u^{n-2}}{(n-2)!},\\ \wp(u)&=\frac{1}{u^2}+\sum_{\ell\in\mathbf{Z}\varpi+\mathbf{Z}\varpi\sqrt{-1},\,\neq 0}\left(\frac{1}{(u-\ell)^2}-\frac{1}{\ell^2}\right)\end{aligned} \tag{18.2.2}$$

を等置して両辺から $1/u^2$ を除き，さらに両辺を $4n-2$ 回微分した後，$u=0$ とすれば得られる. これは $1/\sin^2(u)$ の同様な 2 種類の展開から Riemann の zeta 函数の特殊値 $\zeta(2m)$ を Bernoulli 数と円周率で書く公式を得るのと全く同じ手順である.

超楕円曲線の場合でも $x(\boldsymbol{u})$ は各格子点 $\ell=(\ell_1,\ell_2,\cdots,\ell_g)\in\Lambda$（$\subset\mathbf{C}^g$）において Laurent 展開

$$x(\boldsymbol{u})=\frac{1}{(u_g-\ell_g)^2}+\cdots \tag{18.2.3}$$

をもつので，いまのところ数学的には正当化できないものの

$$x(\boldsymbol{u})=\frac{1}{{u_g}^2}+{\sum_{\ell\in\Lambda,\,\neq 0}}^{*}\left(\frac{1}{(u_g-\ell_g)^2}-\frac{1}{{\ell_g}^2}\right) \tag{18.2.4}$$

なる展開が正当化されて（ここで，$*$ は，いまのところ収束を正当化できない和であることを示す），$\wp(u)$ のときと同様に，次の式が示されるのではないだらうか：

> 曲線 $y^2=x^{2g+1}-1$ について
>
> $$\sum_{\lambda\in L,\,\neq 0}{}^{*}\frac{1}{\lambda^{2(2g+1)n}}=\frac{\Omega^{2(2g+1)n}}{(2(2g+1)n)!}C_{2(2g+1)n} \tag{18.2.5}$$

ただし，

$$\Omega=\int_1^\infty\frac{x^{g-1}dx}{y}>0$$

で，L は $\Lambda \subset \mathbf{C}^g$ の第 g 成分 $\mathbf{C}$ への射影を $1/\Omega$ 倍したもの（たとへば $2g+1$ が素数ならば $L = \mathbf{Z}[e^{2\pi i/(2g+1)}]$）である．あるいは

曲線 $y^2 = x^{2g+1} - x$ について

(18.2.6) $$\sum_{\lambda \in L, \neq 0}^{*} \frac{1}{\lambda^{4gn}} = \frac{\Omega^{4gn}}{(4gn)!} C_{4gn}$$

ただし，

$$\Omega = \int_1^\infty \frac{x^{g-1}dx}{y} > 0$$

で，L は $\Lambda \subset \mathbf{C}^g$ の第 g 成分 $\mathbf{C}$ への射影を $1/\Omega$ 倍したものである．

もしこれが示されれば，Hecke の量指標つき L 函数とは異なる新たな L 函数と呼ぶべきものが見つかつたことになる．特に，筆者は以上の考察が，[**I**]，とくに p.240 に書かれてゐることと関係するかもしれないといふ期待をもつてゐる．

18.3. Hochschild の公式に類似の等式. ここでは参考の為に 13.2.2 よりも弱い主張ではあるが，より一般に次の等式が成り立つことを証明する．

> **命題 18.3.1.** 素数 p を取り，C の p 元体 $\mathbf{F}_p$ 上の函数体を K をとる．K^p で K に属する元の p 乗冪の全体がなす体を表す．また φ を体拡大 K/K^p の生成元，即ち $K=K^p(\varphi)$ となる元とし，D は K 上の任意の導分とする．このとき，
>
> $$D^{p-1}\varphi = a + b\varphi,\ (a,\, b \in K^p)\,.$$

証明. 体 K は K^p 上の p 次元 vector 空間で，基底として 1，φ，φ^2，$\cdots$，φ^{p-1} が取れる．いま

$$D\varphi = c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2 + \cdots + c_{p-1}\varphi^{p-1},\ (c_j \in K^p)$$

と書いておく．さすれば $D(\varphi^j) = j\varphi^{j-1}D\varphi$ なので

$$D\,[1 \quad \varphi \quad \varphi^2 \quad \cdots \quad \varphi^{p-1}\,] = [1 \quad \varphi \quad \varphi^2 \quad \cdots \quad \varphi^{p-1}\,]\,T.$$

ここに，

$$T = \begin{bmatrix} 0 & c_0 & 2c_{p-1}\varphi^p & 3c_{p-2}\varphi^p & 4c_{p-3}\varphi^p & \cdots & (p-1)c_2\varphi^p \\ 0 & c_1 & 2c_0 & 3c_{p-1}\varphi^p & 4c_{p-2}\varphi^p & \cdots & (p-1)c_3\varphi^p \\ 0 & c_2 & 2c_1 & 3c_0 & 4c_{p-1}\varphi^p & \cdots & (p-1)c_4\varphi^p \\ 0 & c_3 & 2c_2 & 3c_1 & 4c_0 & \cdots & (p-1)c_5\varphi^p \\ 0 & c_4 & 2c_3 & 3c_2 & 4c_1 & \cdots & (p-1)c_6\varphi^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{p-3} & 2c_{p-4} & 3c_{p-5} & 4c_{p-6} & \cdots & (p-1)c_{p-1}\varphi^p \\ 0 & c_{p-2} & 2c_{p-3} & 3c_{p-4} & 4c_{p-5} & \cdots & (p-1)c_0 \\ 0 & c_{p-1} & 2c_{p-2} & 3c_{p-3} & 4c_{p-4} & \cdots & (p-1)c_1 \end{bmatrix}$$

である．18.3.1 を示すのには，次のことが証明されればよい．

> **補題 18.3.2.** 上記の状況で
>
> $$T^{p-1} \mod p$$
>
> の第 1 行と第 1 列を取り除いた $(p-1)\times(p-1)$ 型の行列は scalar 行列になる．

以下に述べる証明は 鈴木浩志氏 によるものである．一般に正方行列 M に対して $M_{i_1,i_2,\cdots,i_j}$ でもつて第 i_1，i_2，$\cdots$，i_j 行と第 i_1，i_2，$\cdots$，i_j 列に関する小行列を表すことにする．また $|\ \ |$ は行列式を取ることを示すものとする．よく知られてゐるやうに p 次正方行列 M の固有多項式は

$$|tI - M| = t^p + \sum_{j=1}^{p}(-1)^{p-j}\left(\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_j\leqq p} |M_{i_1,i_2,\cdots,i_j}|\right)t^{p-j} \tag{18.3.3}$$

と書かれる．以後記号が煩雑になるのを避けるために行列の行や列の番号はすべて mod p で考へるものとする．また

$$S = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & p-1 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} c_1 & c_0 & c_{p-1}\varphi^p & c_{p-2}\varphi^p & c_{p-3}\varphi^p & \cdots & c_2\varphi^p \\ c_2 & c_1 & c_0 & c_{p-1}\varphi^p & c_{p-2}\varphi^p & \cdots & c_3\varphi^p \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & c_{p-1}\varphi^p & \cdots & c_4\varphi^p \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_5\varphi^p \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & \cdots & c_6\varphi^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p-2} & c_{p-3} & c_{p-4} & c_{p-5} & c_{p-6} & \cdots & c_{p-1}\varphi^p \\ c_{p-1} & c_{p-2} & c_{p-3} & c_{p-4} & c_{p-5} & \cdots & c_0 \\ c_0\varphi^{-p} & c_{p-1} & c_{p-2} & c_{p-3} & c_{p-4} & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

とおく．もちろん $T = PS$ である．このとき $1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leqq p$ に対して

$$|P_{i_1+1,i_2+1,\cdots,i_j+1}| = |P_{i_1,i_2,\cdots,i_j}| \tag{18.3.4}$$

が成り立つことが容易にわかる．また

$$|T_{i_1,i_2,\cdots,i_j}| = (i_1-1)(i_2-1)\cdots(i_j-1)|P_{i_1,i_2,\cdots,i_j}| \tag{18.3.5}$$

である．よつて

$$\begin{aligned} &|tI-T| \\ &= t^p + \sum_{j=1}^{p-1}\left((-1)^{p-j}\sum_{(i_1,\cdots,i_j)}\sum_{b\in\mathbf{F}_p}(b+i_1)\cdots(b+i_j)\right)|P_{i_1,\cdots,i_j}|\,t^j + |T| \end{aligned} \tag{18.3.6}$$

と書かれる．ここで $|T| = 0$ である．また $(i_1,\cdots,i_j)$ は，$1 \leqq k_1 < \cdots < k_j \leqq p$ となる組 $(k_1,\cdots,k_j)$ の全部に同じ数を足すといふ同値関係に関しての同値類の代表を動く．もちろん p を越えたら，p ひいて前に回すものとする．いま p が素数なので，軌道の長さは 1 か p であるが，1 になるのは $j = p$ のときだけである．それゆゑ

$$\sum_{b\in\mathbf{F}_p}(b+i_1)\cdots(b+i_j) = \begin{cases} 0 & (1 \leqq j < p-1 \text{ のとき}) \\ -1 & (j = p-1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{18.3.7}$$

が示されればよい．しかし，これは $\mathbf{F}_p$ の元に関する p 変数基本対称式を考へればすぐにわかる．また $m = p-1$ のときは軌道がひとつだけであり，その代表として $(2,3,\cdots,p)$ がとれることから

$$|tI-T| = t^p - |P_{2,3,\cdots,p}|t. \tag{18.3.8}$$

Cayley-Hamilton の定理より $T^p = |P_{2,3,\cdots,p}|T$ であるが，$|T_{2,3,\cdots,p}| \neq 0$ なので，(18.3.2) が証明された． □

18.4. 残された問題. さらに証明すべき，あるいは調べるべき事柄で思ひつくのは以下のとほり：

(1) 数値例を見る限りでは C_n や D_n の符号変化は Bernoulli 数や Hurwitz 数の場合と全く同様で，交代的であるやうに見える．これの証明.

(2) たとへば曲線 $y^2 = x^5 - 1$ に関して，$p \equiv 1 \mod 5$ のときに，$p - 1 \nmid 10m$ ならば $p \leqq 10m - 1$ であつても m が十分大であれば $p \nmid C_{10m}$ であるか．いひ方を変へると，素数 $p \equiv 1 \bmod 5$ を固定するとき，C_{10m} の分子に p が現はれるやうな m は有限個であるか.

(3) Bernoulli 数や Hurwitz 数 の場合は分子の 2 冪因子が完全に決定されてゐるが，C_n や D_n の場合はどうなつてゐるのであらうか．たとへば，$y^3 = x^5 - 1$（種数 $g = 4$）については $\operatorname{ord}_2 C_{15n} = 12n - 3$ と予想される．

(4) たとへば曲線 $y^2 = x^5 - 1$ の場合の数値例では C_{10m} と D_{10m} の分子の $10m$ 以下の素因子が酷似してゐる（しかし微妙に異なる）．これは何故か.

文 献

[**Ad1**] A. Adelberg, *Universal higher order Bernoulli numbers and Kummer and related congruences*, J. Number Theory, **84** (2000), 119-135.

[**Ad2**] A. Adelberg, *Kummer congruences for universal Bernoulli numbers and related congruences for poly-Bernoulli numbers*, Int. Math. J., **1** (2002), 53-63.

[**Ad3**] A. Adelberg, *Universal Kummer congruences mod prime powers*, Preprint.

[**AIK**] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, "ベルヌーイ数とゼータ関数", 牧野書店, 2001.

[**Ca1**] L. Carlitz, *The coefficients of the reciprocal of a series*, Duke Math. J., **8** (1941), 689-700.

[**Ca2**] L. Carlitz, *Some properties of Hurwitz series*, Duke Math. J., **16** (1949), 285-295.

[**Ca3**] L. Carlitz, *Congruences for the coefficients of the Jacobi elliptic functions*, Duke Math. J., **16** (1949), 297-302.

[**Ca4**] L. Carlitz, *Congruences for the coefficients of hyperelliptic and related functions*, Duke Math. J., **19** (1952), 329-337.

[**Cl**] F. Clarke, *The universal von Staudt theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **315** (1989), 591-603.

[**Co**] L. Comtet, Advanced Combinatorics, The art of finite and infinite expansions (revised and enlarged edition), D.Reidel Pub. Company, 1974.

[**G**] H. Gunji, *The Hasse invariant and p-division points of an elliptic curve*, Arch. Math., **27** (1976), 148-157.

[**Ho**] T. Honda, *On the theory of commutative formal groups*, J. Math. Soc. japan, **22** (1970), 213-246.

[**Hu1**] A. Hurwitz, *Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatishen Funktionen*, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, (1897), 273-276 (Werke, Bd.II, pp.338-341).

[**Hu2**] A. Hurwitz, *Über die Entwicklungskoeffizienten der lemniskatishen Funktionen*, Math. Ann., **51** (1899), 196-226 (Werke, Bd.II, pp.342-373).

[**I**] 伊吹山知義, *Memoirs on "easy" zeta functions*, 第 9 回 整数論サマースクール 「ゼータ関数」報告集 (2001), 235-248.

[**Ka**] N.M. Katz, *The congruence of Clausen-von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers*, Math. Ann., **216** (1975), 1-4.

[**Ku**] E.E. Kummer, *Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwickelungscoëfficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. für die reine und angew. Math. **41** (1851), 368-372.

[**L**] H. Lang, *Kummersche Kongruenzen für die normierten Entwicklungskoeffizienten der Weierstrasschen $\wp$-Funktionen*, Abh. Math. Sem. Hamburg **33** (1969), 183-196.

[**Ma**] 松村英之, "可換環論", 共立出版, 1980.

[**Mo**] Y. Morita, *A p-adic analogue of the Γ-function*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **22** (1975), 255-266.

[**R**] A.M. Robert, A course in p-adic analysis, GTM 198, Springer Verlag, 2000.

[**V**] H.S. Vandiver, *Certain congruence involving the Bernoulli numbers*, Duke Math. J., **5** (1939), 548-551.

[**Ya1**] 安田正大, 手書きのノート (2004).

[**Ya2**] 安田正大, 手書きのノート (2004).

[**Yu**] N. Yui, *On the Jacobian varieties of hyperelliptic curves over fields of characteristic $p > 2$*, Journ. of Algebra **52** (1978), 378-410.

[**W**] E.T. Whittaker and G.N. Watson, A course of modern analysis , Cambridge Univ. Press, 1927.

Faculty of Humanities and Social Sciences,
Iwate University,
020-8550, Morioka, Japan.
Email : `onishi@iwate-u.ac.jp`