第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.1-13

リーマン面と代数曲線

吉冨 賢太郎*

1　リーマン面

1.1　定義

まず, 正則性と調和性について復習しておく.

定義 1.1. $\boldsymbol{C}$ (の開集合) 上の複素数値函数 $f = u + iv$ で, 定義されている各点で微分可能なものを正則函数という (ただし, u, v は f の実部・虚部). 正則な 1 対 1 写像を等角写像という. f が正則ならば コーシーリーマンの関係式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

を満たす. さらに, u, v は $\Delta u = \Delta v = 0$ をみたす (ただし, $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$). 一般に, $\Delta u = 0$ を満たす実数値函数を調和函数という. $\overline{u}$ が正則のとき, u は反正則という.

リーマン面とは 1 次元の複素解析多様体であるが, 以下に再定義しておく.

定義 1.2. 位相空間 S において, 次の条件をみたす族 $\mathcal{A}$ のことを S の上の等角構造という.

(i) $\mathcal{A}$ の元 ϕ は S の開集合 U_ϕ から $\boldsymbol{C}$ の開集合への位相同型である.

(ii) $\cup_{\phi\in\mathcal{A}} U_\phi = S$.

(iii) $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$ ならば $\psi \circ \phi^{-1}$ は $\phi(U_\phi \cap U_\psi)$ から $\psi(U_\phi \cap U_\psi)$ への全射等角写像である.

(iv) S の開集合 U_ψ から $\boldsymbol{C}$ の開集合への位相同型 ψ で $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$ であるようなすべての $\phi \in \mathcal{A}$ に対して (iii) をみたすならば $\psi \in \mathcal{A}$ である (極大性).

注: ここでは境界つきリーマン面は除外して考える.

定義 1.3. 連結 *Hausdorff* 空間 S とその上の等角構造 $\mathcal{A}$ からなる対 $R = (S, \mathcal{A})$ のことをリーマン面という. $\mathcal{A}$ の元 ϕ を局所座標 (*local coordinate*), S を基底空間という. ここでは, S は基底空間を表わすのに用い, R と書いたときはリーマン面の構造も含め考えているものとする.

*大阪府立大学 総合教育研究機構

リーマン面 R の基底空間の部分集合 U が連結開集合のとき, U は相対位相で連結 Hausdorff であり, R の等角構造から誘導される等角構造が入る. これを R の領域という.

S がコンパクトのとき $R = (S, \mathcal{A})$ を閉 (closed) リーマン面といい, そうでないとき開 (open) リーマン面という. 射影的で滑らかな完備代数曲線 (complete projective smooth algebraic curve) は閉リーマン面と対応する (cf. §2).

リーマン面は複素 1 次元であるから' 面' である. ただし, ' 面' とはここでは可算基底を持つ連結な二次元位相多様体を言う (リーマン面の基底空間には連結を仮定している).

可算基底とは, 可算個の開集合の族で任意の開集合がこの族の和集合として表わせるようなものを言う. このような基底があるときこの空間は countable (第 2 可算公理をみたす) という.

次が成り立つ.

定理 1.1. *リーマン面は可算基底を持つ. また, リーマン面には三角形分割が存在し, 向きづけ可能である.*

したがって, リーマン面は実際この意味で "面" であり, 向きづけ可能である (したがって, メビウスの帯にはリーマン面の構造は入らないことがわかる). また逆に閉リーマン面について次が成り立つ ([1] 定理 4.9).

定理 1.2. *コンパクト Hausdorff 位相空間 S があるリーマン面 R の基底空間となるためには S が向きづけ可能な閉曲面であることが必要十分である.*

リーマン面の三角形分割より得られる複体のオイラー数を χ とする. すなわち, 三角形の数を n_2, 辺の数を n_1, 頂点の数を n_0 とするとき, $\chi = n_2 - n_1 + n_0$ であたえられるものである. このとき, $\chi = 2 - 2g$ によって定まる g をリーマン面の種数という. コンパクト (可算) 向きづけ可能な 2 次元位相多様体の同相類は種数によって決まる.

リーマン球面の場合は $g = 0$, 楕円曲線は $g = 1$ である. 直感的には "穴の数" となるが, これは標準切断によって説明される (後述 cf.1.6).

リーマン面の例をいくつか (証明なしに) あげる.

例 1.1. 複素平面全体は開リーマン面である. また, 複素平面内の開円板も開リーマン面である. 球面 S^2 は $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ と位相同型であり (cf. [5]), 局所座標の近傍として, $U_0 = \boldsymbol{C}^2, U_\infty = \boldsymbol{C}^2 \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ をとり, $\phi_0(z) = z$, $\phi_\infty(z) = 1/z$ とすることにより等角構造が入る. このようにして得られるリーマン面をリーマン球面と呼び, $\boldsymbol{P}^1$ または $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ で表す.

例 1.2. 複素平面 $\boldsymbol{C}$ の格子 $L = \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2 | m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}\}$ による商空間はトーラス ("一人乗り浮き輪") と見なせ自然にリーマン面の構造が入る. これは, 楕円函数の基本領域であり, 楕円曲線と言われる代数曲線 E の $\boldsymbol{C}$ 値点全体 $E(\boldsymbol{C})$ と同一視される. この同一視 *(同型)* はワイエルシュトラスの $\mathscr{P}$ 函数とその微分によって与えられる.

この他にも, 上半平面の合同部分群による商空間などがある. 一般に既存のリーマン面からリーマン面を構成する方法として, 貼り合わせ, 被覆リーマン面, 等角写像の不連続群 (離散群) による商空間, などの手法がある (cf. [2] pp.46).

1.2 解析写像

リーマン面の間の写像については以下のように定義する.

定義 1.4. 2 つのリーマン面 R, R' の間の写像 $f : R \to R'$ は $z \in R$ のまわりの局所座標 U_ϕ と $f(z) \in R'$ のまわりの局所座標 V_ψ に対して, $\psi(f(\phi^{-1}(x)))$ が $x = 0$ の近傍で正則であるとき解析写像という. 全単射な解析写像を同型写像 (または等角同値) という. R と R' の間に同型写像が存在するとき, R と R' は同型であるといい, $R \cong R'$ と記す.

リーマン面の間の写像の性質を考えるのに, 局所変数 (local parameter) を考えるのが便利である. これは, 後述の解析写像の分岐指数や解析函数の位数を定義するのに便利である.

定義 1.5. リーマン面 R の領域 U から $\boldsymbol{C}$ の領域 U' への全単射解析写像 f が存在するとき, U を R の解析的領域と呼び,

$$f(z) = t = x + iy$$

によって与えられる $t = f(z)$ を U における解析的変数, $(x(z), y(z))$ を解析的座標とよぶ. 特に U が 点 z_0 の近傍で $f(z_0) = 0 \in \boldsymbol{C}$ となるように正規化されているとき, t を z_0 のまわりの局所変数という.

例 1.3. $R = \boldsymbol{P}^1$ の場合, $z_0 \in \boldsymbol{C}$ ならば, $f(z) = z - z_0$, $z_0 = \infty$ ならば $f(z) = 1/z$ とすればこれは $\boldsymbol{P}^1$ の局所座標 *(局所変数)* を与える.

解析写像について次が成り立つ.

定理 1.3. リーマン面 R から R' への写像 f が点 z において解析的であるとする. z と $z' = f(z)$ における局所変数 t, t' を適当にとると z の近傍で

$$t' = f(t) \equiv 0 \qquad or \qquad t' = f(t) = t^n \quad (n \geqq 1)$$

とできる. $t' = t^n$ となるとき, n は局所定数のとりかたによらず, f の z における分岐指数という. $n > 1$ ならば z は分岐点, $n = 1$ ならば不分岐点と呼ばれる.

また, 上の定理から次が言える.

定理 1.4. リーマン面 R の領域 U からリーマン面 R' への解析写像 f に対し, $f(U)$ は一点であるかまたは R' の領域である. 特に f が R の一点 z_0 の近傍で一定の値 $w_0 \in R'$ をとるならば f は U 上で一定, すなわち $f(z) = w_0$ である.

1.3 被覆リーマン面と基本群

定義 1.6. 連結 n 次元多様体 S' から連結 n 次元多様体 S の上への写像 f が次の条件をみたすとき S' を S の被覆多様体, f をその被覆写像 (*covering map*) という. 即ち: S の各点 P に対し ある P の近傍 U が存在して $f^{-1}(U)$ の各連結成分への f への制限は位相同型写像になる.

被覆多様体を $S' \overset{f}{\twoheadrightarrow} S$ などと表わす．2 つの被覆多様体 $S'_1 \overset{f_1}{\twoheadrightarrow} S_1$, $S'_2 \overset{f_2}{\twoheadrightarrow} S_2$ は位相同型 $g' : S'_1 \to S'_2$ と $g : S_1 \to S_2$ が存在して $g' \circ f_2 = f_1 \circ g$ をみたすとき同型であるという．ただし, $S_1 = S_2$ のときは, g としては恒等写像と定める．このときは g' を同型写像と呼ぶ．さらに $S'_1 = S'_2 = S'$, $f'_1 = f'_2 = f'$ のとき, g' は自己同型写像で, これら全体は S' の位相変換群をなす．これを $S' \overset{f}{\twoheadrightarrow} S$ の自己同型群とよび $A(S' \overset{f}{\twoheadrightarrow} S)$ と書く．

任意の位相多様体 S は自明な被覆多様体 $S \overset{\mathrm{Id}_S}{\twoheadrightarrow} S$ をもつ．これ以外に被覆多様体を持たないとき, S は単連結であるという．S の被覆多様体には必ず単連結なものが存在し, 同型を除いて一意的に定まる．その一つを $S^* \overset{f^*}{\twoheadrightarrow} S$ とするとき, $G = A(S^* \overset{f^*}{\twoheadrightarrow} S)$ を S の基本群という．

P^* を S^* の点とすると, 適当な P^* の近傍 U^* をとると, G の異なる 2 つの元 g, g' に対して $g(U^*) \cap g'(U^*) = \emptyset$ とできる．したがって, G の元は忠実に作用する．また, このような変換群を不連続変換群という．S^* の任意の不連続変換群はある S の S^* に関する基本群となる．S として, G による S^* の商空間 $S^*(G) = G \backslash S^*$ を考えればよい

補題 1.1. *連結多様体 S の単連結被覆多様体を S^* とし, $S^* \overset{f^*}{\twoheadrightarrow} S$ の基本群を G とすれば S^* の点 P^*, Q^* が G に関して同値であるためには, $f^*(P^*) = f^*(Q^*)$ であることが必要十分であり, $Q^* = g(P^*)$ となる $g \in G$ が一意的に存在する．これにより $S^*(G)$ と S は同相になる．また, G_1, G_2 を不連続群とするとき, $S^*(G_1)$ と $S^*(G_2)$ が同相であるためには, G_1, G_2 が共役であることが必要十分である．*

また, G の部分群 H に被覆多様体 $S^*(H)$ が対応し, $S^*(H_1) \cong S^*(H_2) \leftrightarrow H_1$ と H_2が共役などガロア理論と類似のことが成り立つ．

S の上の単連結被覆多様体は, S の道 (曲線) のホモトピー類の全体のなす群を考えることによってうる．すなわち, $I = [t_0, t_1]$ を $\boldsymbol{R}$ の閉区間とする．$\gamma : I \to X$ を X における道とよぶ．$\gamma(t_0)$ を始点, $\gamma(t_1)$ を終点という．また, 始点と終点が同じときループまたは閉曲線といい, そうでないと開曲線という．道 γ, γ' を' つなげたもの' を $\gamma\gamma'$ と書いて積を定義する．点 P_0 を基点とする曲線のホモトピークラス $[\gamma]$ 全体は群をなし, P_0 によらず同型である．これもよく知られた基本群の定義である．基本群の元 $[\gamma]$ に対しその終点を対応させることにより, 被覆多様体 S^* をうる．

次にリーマン面の場合に考えると

定理 1.5. *被覆多様体 $S' \overset{f'}{\twoheadrightarrow} S$ において S があるリーマン面 R の基底空間のとき, S' にも f' が解析写像となるようなリーマン面の構造が入り, リーマン面 R' の基底空間となる．*

このとき, R' を R の被覆リーマン面という．被覆多様体の同型や自己同型群などは位相写像のかわりに解析写像として同様に定義される．このようにして (閉) リーマン面を分類するには単連結リーマン面を考え, その自己同型群の不連続部分群の共役類を求め, その代表系に対応するリーマン面を考えればよいことがわかる．

而して, リーマン面は以下のように分類される．

定理 1.6. *リーマン面 R は以下のいずれかと同型である．それぞれ, 普遍被覆リーマン面が 楕円型, 放物型, 双曲型であるという．*

(1) 複素球面 $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$
(2) 複素平面 $\boldsymbol{C}$ を被覆リーマン面とする以下のもの.
(2-1) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) \setminus \{\infty\}$
(2-2) $\boldsymbol{C} \setminus \{0\} = \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C}) \setminus \{0, \infty\}$
(2-3) $\boldsymbol{C}/L$, L は 2 次元格子群 $\boldsymbol{Z}\omega_1 + \boldsymbol{Z}\omega_2$, $\omega_1/\omega_2 \in \boldsymbol{H}$.
(3) 上半平面 $\boldsymbol{H}$ を合同部分群でわったもの.

注: (2-3) は楕円曲線である.
注: (3) はモジュラー曲線などがその典型的な例である.

上の分類から, 閉リーマン面となるのは, リーマン球面か, 楕円曲線, もしくは, 上半平面の一次分数変換群の離散部分群による商空間 (のコンパクト化) となる. これらの基本領域を考えると, 最初の 2 つについては明白であり, 楕円曲線の場合は格子の内部と接する辺が基本領域となる. この場合, 後述の標準切断はこの 2 本の辺の像である閉曲線によるものである. 一方, (3) の場合も基本領域は 2n 角形になることがわかり, 基本群の元は, この基本領域 Ω の各辺をとなりあう基本領域の接しない 1 辺に写すただ一つの変換によって生成されることがわかる.

上の定理から実際リーマン面が三角形分割可能であることがわかるが, この三角形を貼り合わせてえられる凸多角形が $2g$ 角形になる. ここで, g は種数である. 一般に次が成り立つ.

定理 1.7. 連結な 2 次元位相多様体は 2 辺ずつ組になった正 $2n$ 角形の辺を次の文字の列に従って同一視したものと同相である.
(1) aa^{-1}
(2) $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_hb_ha_h^{-1}b_h^{-1}$
(3) $a_1a_1a_2a_2\cdots a_ha_h$.
ただし, 向きづけ可能な場合は (1), (2) の場合である.

リーマン面は向きづけ可能であるから, リーマン球面と位相同型でなければ, (2) のような変形で得られることになる. 逆に;

定理 1.8. 球面と同相でない向きづけ可能なリーマン面 R には次の性質を持った単純閉曲線 $\alpha_k, \beta_k, \quad k = 1, \ldots g$ が存在する. すなわち, これらは基点 P_0 を持ち, 任意の 2 つは P_0 以外に共通を持たず, さらに $4g$ 角形から上の (2) の形の接着を行なって得られる面と同相であり, 接着された a_k, b_k に対応する曲線の像が α_k, β_k $(k = 1, \ldots, p)$ となる.

この定理の α_k, β_k を P_0 を基点とする S の標準切断という. なお, 標準切断の交差の仕方は 2 通りあるが, どちらにとるかは [4] を参照されたい. 交点数などの説明もこの稿では割愛する.

標準切断によって基本群は生成される. すなわち次が成り立つ.

定理 1.9. 球面と位相同型ではない向きづけ可能なコンパクトな面 S の点 P_0 を基点とする標準切断を $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ とする. このとき, 基本群 $\pi_1(S, P_0)$ は標準切断のホモト

ピー類 $[\alpha_k], [\beta_k]$ $(k=1,\ldots,g)$ によって生成され基本関係 $\displaystyle\prod_{k=1}^{g}[\alpha_k][\beta_k][\alpha_k]^{-1}[\beta_k]^{-1}=1$ が成り立つ.

前述のように g は種数であり, これを種数の定義とすることができる. 即ち :

定義 1.7. (種数の再定義) 上の標準切断で定まる g を R もしくは基底空間 S の種数という. g は S の位相不変量であるが, さらに, g によって 2 次元位相多様体としての同型類が完全に定まる.

これで種数がいわゆる穴の数であることが幾何的に明確になった. 種数が標準切断や三角形分割によらないことは, Betti 数 ($=2g$) や (調和 or 正則) 微分形式の空間の次元などが種数によって表わされる ($=2g$ or g となる) ことから実際わかる.

このようにして, 閉リーマン面の基底空間の位相不変量である種数が定まるが, 種数 1 以上の面に対してリーマン面の同型類は無限に存在することが知られる. すなわち, 解析構造が入ることによって, リーマン面は確かに"ただの面"でないのである (種数 0 のリーマン面はすべてリーマン球面にリーマン面として同型である).

1.4 解析函数と微分形式

定義 1.8. リーマン面 R に対し, R から $\boldsymbol{P}^1$ への解析写像を解析函数と呼ぶ. 解析函数全体は体をなすがこれを $K(R)$ で表わし, R の解析函数体という. $f\in K(R)$ が $f(z)\neq\infty$ のとき, f は z で正則であるという. すなわち, $z\in U_\phi$ であるような局所座標 ϕ に対して, $f\circ\phi^{-1}$ が点 $\phi(z)$ で正則であることである.

解析函数 (正則函数) と同様に R 上の調和函数も同様に定義される. u が調和函数のとき, コーシーリーマンの関係式を満たすような調和函数 v が定数を除いて定まる. これを共役といい, u^* であらわす.

リーマン面 R 上の正則函数や調和函数についても複素平面上と同様の次のようなことが成り立つ.

定理 1.10 (除去可能性定理). R の点 z に対し, f を $R-\{z\}$ 上の正則 (調和) 函数とする. もし, ある近傍 U で f が $U-\{z\}$ で有界となるものが存在するならば, f は R 上の正則 (調和) 函数に拡張できる.

定理 1.11 (最大値の原理). リーマン面 R 上の正則 (調和) 函数 f の絶対値がある点において最大値をとるならば f が定数値函数である. 特に閉リーマン面上の正則函数は定数しかない.

注: 開リーマン面のときは, 必ず非定値の正則函数が存在する (cf. [2] p.11).

定理 1.12 (一致の定理). リーマン面 R 上の正則函数 f,g が R 上の収束点列 (または集積点を持つ点列) $\{p_n\}$ に対して $f(p_n)=g(p_n)$ をみたすならば, $f=g$ である.

定理 1.13. 正則函数列 $\{f_n\}$ が R 上の函数 f にコンパクト一様収束するならば, f は正則である.

定義 1.9. R 上の解析函数 f の $z_0 \in R$ における位数を以下のように定義する. z_0 における局所変数を t として, $a_0 = f(z_0) \neq \infty$ のとき、$f(z) - a_0 = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots, a_0 = f(z_0)$ となる. このとき, $a_j \neq 0$ となる最小の j を f の $z = z_0$ における位数といい, $\nu_{z_0}(f)$ で表わす. ただし, 恒等的に 0 のときは ∞ と定める. また, $a_0 = \infty$ のときは, $\dfrac{1}{f(z)} = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \not\equiv 0$ となる. $a_j \neq 0$ となる最小の j を m とするとき, $\nu_{z_0}(f) = -m$ とかき, m 位の極を持つという.

次に微分形式を定義しよう. 微分形式は不変形式とも言い, リーマン面上での積分をする場合に函数のかわりに必要となるものである.

函数のかわりになぜ不変形式を考えるか理由を述べておく. $z = z_0, w = w_0 = \psi(\phi^{-1}(z_0))$ において

$$\frac{d}{dz} f(\phi^{-1}(z)) = \frac{d}{dw} f(\psi^{-1}(w)) \cdot \frac{dw}{dz}$$

が成り立つから, 函数の微分係数は局所座標に依存する. そこで, 代わりに微分形式を考えるのである.

リーマン面 R においてすべての局所座標 $\phi \in \mathcal{A}$ に $\phi(U_\phi)$ で定義された複素数値函数 a_ϕ, b_ϕ を対応させる. この対応 $\omega : \phi \mapsto (a_\phi, b_\phi)$ で, $U_\phi \cap U_\psi \neq \emptyset$ であるような ϕ, ψ に対して

$$a_\phi(z) = a_\psi(\psi(\phi^{-1}(z)))(\psi \circ \phi^{-1})'(z)$$

$$b_\phi(z) = a_\psi(\psi(\phi^{-1}(z)))\overline{(\psi \circ \phi^{-1})'(z)}$$

が成り立つものを 1 位微分形式 (1-form) といい, $\omega = adz + b\overline{dz}$ で表わす. $b_\phi \equiv 0$ となるもの正則微分形式という. すなわち $\omega = adz$ が正則微分である. f が正則函数のとき, $a_\phi(z) = (f \circ \phi^{-1})'(z)$, $b_\phi \equiv 0$ で定義すればこれは 1-form になる. これを f の微分といい, df で表わす. R 上の C^1 級函数に対しても同様に du が定義され, $du = \dfrac{\partial u}{\partial z} dz + \dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} \overline{dz}$ となる. f が正則ならば df も正則微分形式である.

ω を 1-form として, 複素共役 $\overline{\omega}$ を $\phi \mapsto (\overline{b_\phi}, \overline{a_\phi})$ によって定まるものと定義する. $\mathrm{Re}\,\omega = \dfrac{1}{2}(\omega + \overline{\omega})$, $\mathrm{Im}\,\omega = \dfrac{1}{2i}(\omega - \overline{\omega})$ を ω の実部・虚部という. $\overline{\omega} = \overline{b}dz + \overline{a}\overline{dz}$ である. ${}^*\omega = -iadz + ib\overline{dz}$ とおいて, ω の共役という. 1-form ω で 正則微分 ω_1, ω_2 によって $\omega = \omega_1 + \overline{\omega_2}$ とかけるものを調和微分という. u が調和函数ならば $du + i\,{}^*du = 2\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) dz$ も正則微分である.

正則微分 adz の零点と位数は $a = \{a_\phi\}_{\phi \in \mathcal{A}}$ の零点と位数として局所座標のとり方によらず定まる.

また, a が有理型函数であるとき, (すなわち, a_ϕ が有理型函数であるとき), $\omega = adz$ を有理型微分という. ω の極とその位数も同様に定義される. また留数も局所座標に依らない数として同様に定義することができ, ω の z における留数を $\mathrm{Res}(\omega, z)$, $z \in R$ のように

表わす. 複素平面の領域 D 上では有理型函数と有理型微分, 正則函数と正則微分は同一視して考えられる.

有理型函数 f と有理型微分 ω の積 $f\omega$ は有理型微分である. 局所座標での商をはりあわせることによって有理型函数 ω_1/ω_2 が定義される.

例 1.4. $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{C})$ の領域 D で $\infty \in D$ のときを考える. 局所座標として, $U_0 = (D\backslash\{\infty\}, \phi_0 = Id)$ と $U_\infty = (D \setminus \{0\}, \zeta = \phi_\infty : z \mapsto 1/z)$ がとれる. $\omega = a\ dz$ を正則微分とする. $f = a_{\phi_0}$ は正則函数であるが, $U_0 \cap U_\infty$ 上 $f(z) = a_{\phi_0}(z) = a_{\phi_\infty}(\zeta(z))\dfrac{d\zeta}{dz} = -a_{\phi_\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)\dfrac{1}{z^2}$ となり, ∞ におけるローラン展開は $f(z) = \dfrac{c_2}{z^2} + \dfrac{c_3}{z^3} + \cdots$, となる. つまり, 2 位の零点を持つ. 逆に ∞ で 2 位の零点を持つような函数 f に正則微分が対応するのでこれらを同一視することができる.

有理型微分のことを Abel 微分ともいう. また, 正則なものを第 1 種微分 (DFK, differential of first kind), 正則でなく 極における留数が 0 のものを第 2 種微分 (DSK), その他を第 3 種微分 (DTK) などとも呼ぶ. ただし, これらの定義は文献や他の講演によって違うので注意されたい.

以下のような問題を考える.

問題 R の疎な点 $p_1, \ldots, p_m$ と各点 p_n における主要部が与えられたときに $\{p_n\}$ 以外で正則で, $\{p_n\}$ で与えられた主要部を持つような有理型 (解析) 函数または有理型微分が存在するか.

これについていくつかの定理を述べておく ([1] pp. 170-171).

定理 1.14. z_1, z_2 を リーマン面 R の異なる 2 点とする. z_1 において 1 位の零点を持ち, z_2 において 1 位の極を持つ解析函数 $f \in K(R)$ が存在する.

定理 1.15. z をリーマン面 R の任意の点とするとき, z において $n(\geq 2)$ 位の極を持ち, 他では正則な R の微分形式 $\omega_{z,m}$ が存在する.

定理 1.14 の応用として次が成り立つ.

定理 1.16. リーマン面 R, R' の基底空間 S, S' の間の写像 $f : S \to S'$ が R' 上の解析函数から R 上の解析函数を誘導するならば, f は解析写像である.

これより, 2 つのリーマン面の同型について次が成り立つ.

定理 1.17. R, R' をリーマン面, S, S' をそれぞれの基底空間とする. $f : S \to S'$ が全単射で f により $f^\# K(R') \ni g' \mapsto g \in K(R)$ を $g(z) = g(f(z))$ で定めるとき, $f^\#$ が同型を与えるならば R, R' は同型である.

また, 閉リーマン面については次が成り立つ.

定理 1.18. R, R' を閉リーマン面とする. $K(R) \cong K(R')$ ならば, $R \cong R'$ である.

すなわち閉リーマン面の場合には 函数体が同型であれば対応するリーマン面も同型である. このことは次節で解説する.

また, 閉リーマン面 R 上では, R の異なる 2 点 z_1, z_2 に対して z_1, z_2 以外で正則で, z_1 に留数 1 の 1 位の極, z_2 に留数 -1 の 1 位の極を持ち, Re ω_{z_1,z_2} は z_1, z_2 の外で完全となるような微分形式 ω_{z_1,z_2} が存在することが知られる. 一方一般のリーマン面上の微分形式について次が知られている ([2] p.121):

定理 1.19. リーマン面 R において, 任意に与えられた有限個の点で, 任意に与えられた局所座標に対し, 任意に与えられた主要部 (ただし, 閉リーマン面のときは留数の和が 0) の極を持ち, 他では正則な有理型微分が存在する.

1.5 その他の微分形式と外微分

定義 1.10. リーマン面 S において, 各局所座標 ϕ に対し $\phi(U_\phi)$ 上の複素数値函数 c_ϕ を対応させる対応 $\Omega : \phi \mapsto c_\phi$ で

$$c_\phi(z) = c_\psi(\psi(\phi^{-1}(z)))|(\psi \circ \phi^{-1})'(z)|^2$$

が $z \in \phi(U_\phi \cap U_\psi)$ に対して成り立つとき, S の 2 位微分形式または 2-*form* という.

2-form Ω を $c|dz|^2$, $cdz\overline{dz}$, $c\ dx\ dy$, $cdx \wedge dy$, $\dfrac{i}{2}cdz \wedge \overline{dz}$ などと表わす.

1-form のなすベクトル空間の外積代数を考えて 2-form は 次数 2 部分加群に属すると考えられる. すなわち, 2-form の表示式の最後の 2 つの $\wedge$ は外積を表わしその意味で等しい. 実際, $dz \wedge \overline{dz} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy$ となる.

一般に 1-form $\omega_j = a_j dz + b_j \overline{dz}$, j = 1, 2 に対して $\omega_1 \wedge \omega_2$ を 2-form $(a_1 b_2 - a_2 b_1) dz \wedge \overline{dz}$ で定義し, ω_1 と ω_2 の外積という.

また, ω の外微分 $d\omega$ を

$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge \overline{dz}.$$

で定義する. これは, $\omega = adz + b\overline{dz}$ のとき $d\omega = da \wedge dz + db \wedge \overline{dz}$ と定義してもよい. ω が正則微分ならば, $d\omega = 0$ である.

1.6 アーベル積分

区分的に解析的な曲線とは, 解析的な曲線 (C^1 級) の有限個の積をいう. 次のような性質で特徴づけられる微分形式が区分的に解析的な曲線 α に対して一意的に定まることが証明される (cf. [2] p.143).

定理 1.20. α を閉リーマン面 R 上の区分的に解析的な曲線とする. α に対して以下の性質を持つ R 上の微分形式 ω'_α が一意的に定まる.

(1) α が閉曲線のとき, ω'_α は R で正則で R 上の任意の閉形式 ω に対し,

$$\int_S (\mathrm{Re}\,\omega'_\alpha) \wedge \omega = 2\pi \int_\alpha \omega.$$

(2) α が開曲線のとき, ω'_α は α の始点 z_0 に留数 i の *1* 位の極, z_1 に留数 $-i$ の *1* 位の極を持ち, $R\setminus\{z_0,z_1\}$ で正則であり, R 上の任意の閉形式 ω に対し, 上の積分等式をみたす.

リーマン面 R 上のなめらかな曲線 γ とこの曲線上で連続な 1-form ω があるとき, ω の γ に沿う積分が定義される (アーベル積分). ω が第 1 種 (第 2 種, 第 3 種) であるにしたがってこのアーベル積分も第 1 種 (第 2 種, 第 3 種) であるという.

区分的になめらかな曲線に対しても積分が定義される. γ を覆う局所座標近傍を考えて γ を分割し, $\displaystyle\int_{\phi_j\circ\gamma}\left(a_{\phi_j}dz+b_{\phi_j}\overline{dz}\right)$ の和とすればよい.

定義 1.11. R 上の 1-*form* ω は R で C^1 級のある函数 u に対して $\omega=du$ となるとき, 完全であるという. また, C^1-級 1-*form* ω は $d\omega=0$ をみたすとき, 閉形式 (*closed form*) であるという.

定理 1.21. R 上の連続な *1-form* に対して以下は同値.
(1) 完全形式である.
(2) 始点・終点が同じ任意の *2* つの曲線 γ_0,γ_1 に対し $\displaystyle\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega$ である.
(3) 区分的になめらかな任意のループ γ に対し $\displaystyle\int_\gamma\omega=0.$

$d(du)=0$ より, 完全形式は閉形式である. 逆は一般には成り立たないが上の定理より 次が成り立つ.

定理 1.22. R が単連結であれば閉形式は完全形式である. すなわち, $d\omega=0$ ならばある C^1-級函数 u があって $\omega=du$ となる. 特に ω が正則 (調和) ならば, 正則 (調和) 函数 f があって $\omega=df$ となる.

完全な ω にたいして, $u(z)=\displaystyle\int_{z_0}^{z}\omega$ で定義すると, $du=\omega$ をみたす.
次のグリーンの定理 (または Stokes の定理) が成り立つ.

定理 1.23. 閉リーマン面 R の C^1 級 1-*form* ω に対し, $\displaystyle\int_R d\omega=0$ が成り立つ.

注: 境界つきの場合は, $\displaystyle\int_S d\omega=\int_{\partial S}\omega$ が成り立つ.
次はリーマン面の Cauchy の積分定理である.

定理 1.24. リーマン面 R の (区分的に) 滑らかな閉曲線 γ が $[\gamma]=0$ をみたすならば, R 上の任意の閉形式 ω に対し, $\displaystyle\int_\gamma\omega=0$ が成り立つ. 特に ω が正則微分形式ならば成り立つ.

Cauchy の積分定理から次の留数定理が成り立つ.

定理 1.25. 閉リーマン面の有理型微分の極は有限個しかなく留数の和は 0 である.

定理 1.26. R を種数 g のリーマン面とし, α_1, β_1, ..., α_g, β_g を R の標準切断とする. R 上の 正則微分 ω_1, ω_2 に対し,

$$\sum_{k=1} g \left\{ \int_{\alpha_k} \omega_1 \int_{\beta_k} \omega_2 - \int_{\alpha_k} \omega_2 \int_{\beta_k} \omega_1 \right\} = 0,$$

$$i \sum_{k=1} g \left\{ \int_{\alpha_k} \omega_1 \int_{\beta_k} \overline{\omega_2} - \int_{\alpha_k} \overline{\omega_2} \int_{\beta_k} \omega_1 \right\} = (\omega_1, \omega_2) = \int_S \omega_1 \wedge {}^*\overline{\omega_2}.$$

閉曲線 γ に対して定まる 1-from ω'_γ を前の通りとする.

定理 1.27. 種数 $g \geqq 1$ の閉リーマン面 R において区分的に解析的な標準切断 α_1, β_1, ..., α_g, β_g に関して次が成り立つ.
(1) ω'_{α_k}, $k = 1$, ..., g は $A(R)$ の基底である.
(2) $A(R) \ni \omega \mapsto {}^t\!\left(\int_{\alpha_1} \omega, \cdots \int_{\alpha_k} \omega \right) \in \boldsymbol{C}^g$ は線型同型である.

このことから, $\int_{\alpha_j} \theta_k = \delta_{jk}$ となる $\theta_1, \ldots, \theta_g$ が存在する. これを正規正則微分という.

定義 1.12. θ_k $(k = 1, \ldots, g)$ を正則微分とする. T を (i, j) 成分が $\left(\int_{\beta_j} \theta_i \right)$ であるような行列とすると, $\omega \in A(R)$ に対し, $\left(\int_{\beta_1} \omega, \ldots, \int_{\beta_g} \omega \right) = \left(\int_{\alpha_1} \omega, \ldots, \int_{\alpha_g} \omega \right) T$ がなりたつ. この T を R の標準切断 $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g\}$ に関する周期行列という.

$T = {}^tT$, $\mathrm{Im}\, T$ は正定値である.

2 代数曲線と閉リーマン面

代数曲線の一般論, 基本的な用語などについてはこの稿では略す. [3] に詳しいのでそちらを参照されたい.

2.1 代数函数体

$k = \boldsymbol{C}$ または 一般の体とする.

定義 2.1. k 上の (1 変数) 代数函数体 K とは
(1) K の k 上超越的な元 x があって, $K/k(x)$ は有限次拡大である.
(2) k は K の中で代数的に閉じている.

$K/k(x)$ が有限次分離的であるような x を分離元とよぶ. このとき次が成り立つ.

定理 2.1 (Schmidt). k が完全体ならば, k の上の代数函数体には常に分離元が存在する.

定義 2.2. k の任意の元 α に対し, $\nu_P(\alpha)=0$ となるような K の素因子 *(*付値の同値類*)* P を K の素点あるいは単に点と言う.

定理 2.2. k に含まれない K の任意の元 x に対し, $\nu_P(x)\neq 0$ となる K の素点が少なくとも *2* つ, かつ有限個存在する. したがって特に $x\in K$ が $x\in k \Longleftrightarrow \nu_P(x)=0(\forall P)$ である.

$\nu_P(x)$ を x の P における位数という. $m=\nu_P(x)>0$ のとき x は m 位の零点, $-m=\nu_P(x)<0$ のとき x は m 位の極を持つという.

定理 2.3. K の素点 P の剰余体は k の有限次拡大である. したがって $k=\boldsymbol{C}$ のときは剰余体はすべて $\boldsymbol{C}$ である.

2.2 代数函数体のリーマン面

$\boldsymbol{C}$ 上の代数函数体に対し閉リーマン面が一意的に対応する, というのが代数函数論の重要な主張である.

K を $k=\boldsymbol{C}$ 上の代数函数体とする. P を K の素点, u を K の元とする. u の P における値 $\bar{u}(P)$ を以下のように定める. すなわち $\mathfrak{p}$ を P に対応する局所環の極大イデアルとし, $u\equiv a \mod (\mathfrak{p})$ となる $a\in\boldsymbol{C}$ を u の P における値とする. $\tilde{K}=\{\bar{u}(P)|u\in K\}$ は K と同型になる.

このとき, 次が成り立つ ([1] 定理 4.2).

定理 2.4. K を複素数体上の *1* 変数代数函数体とするとき, K の素点全体 S を基底空間とするリーマン面 R で解析函数体が $\tilde{K}$ と一致するような閉リーマン面が一意的に存在する. これを K に属するリーマン面とよび, $\mathfrak{R}(K)$ と書く. $K(\mathfrak{R}(K))\cong K$ である.

素点の集合 S に解析構造が入り, それによってリーマン面となりその解析函数体が $\tilde{K}$ となるのである. すなわち,

定理 2.5. $\boldsymbol{C}$ 上の代数函数体 K に対し, K の素点を基底空間とするようなリーマン面 R で解析函数体 $K(R)$ が K と同型となるものが一意的に存在する. これを K に対応するリーマン面とよび, $\mathfrak{R}(K)$ で表わす.

2.3 閉リーマン面との対応

上では, 代数函数体, すなわち代数曲線の函数体から出発してリーマン面が構成され, 閉リーマン面となることを見た. 逆に閉リーマン面 R に対し次が成り立つ.

定理 2.6. 閉リーマン面 R 上の解析函数体 $K(R)$ は複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の代数函数体であって, それに対して上の対応で定まる閉リーマン面は R と同型である.

これより, 前節で述べた定理 1.18 が従う.
また, これらの対応についてはガロア理論と類似の性質があることが知られる ([1] pp.222-223). 特に, 代数函数体 K の $\boldsymbol{C}$-自己同型群と $R = R(K)$ の自己同型群は同型となる.

このようにして解析的に定義されたリーマン面と代数的に定義された代数曲線乃至その代数函数体とは密接に関連づけられることが知られる.

参考文献

[1] 岩澤健吉, 代数函数論, 岩波書店

[2] 及川廣太郎, リーマン面, 共立出版社

[3] 小川裕之, Riemann-Roch の定理, SS2007

[4] 軍司圭一, Abel-Jacobi の定理 I, SS2007

[5] 田村一郎, トポロジー, 岩波全書