第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.15-60

代数曲線の Riemann-Roch の定理

小川 裕之*

§1 代数多様体

§1.1 アフィン代数多様体

(a) k を代数閉体とする.

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(k) = \{(x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_1, \cdots, x_n \in k\}$$

を**アフィン空間** (affine space) という. $\mathbb{A}^1$ を**アフィン直線**, $\mathbb{A}^2$ を**アフィン平面**という. $k[X] = k[X_1, \cdots, X_n]$ を n 変数 k-係数多項式環とする. 変数の組 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ を $\mathbb{A}^n$ の**座標系**という. 多項式 $f(X) \in k[X]$ の変数に, 点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^n$ の座標を代入することで, f の $\boldsymbol{x}$ での値 $f(\boldsymbol{x})$ が定義される. $k[X]$ のイデアル I に対して,

$$V = V(I) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{A}^n \,|\, f(\boldsymbol{x}) = 0 \ \ (\forall f \in I)\}$$

を I によって定まる**アフィン代数的集合** (affine algebraic set) という. $k[X]$ のイデアル

$$I(V) = \{f \in k[X] \,|\, f(\boldsymbol{x}) = 0 \ \ (\forall \boldsymbol{x} \in V)\}$$

を V の**定義イデアル**という. 一般に $I(V(I)) \supset I$ である. 剰余環 $k[V] = k[X]/I(V)$ を V の**座標環** (coordinate ring) という. $f \in k[V]$ の定める写像 $f : V \ni \boldsymbol{x} \longmapsto f(\boldsymbol{x}) \in k$ を V の**多項式函数** (polynomial function) という. $\mathbb{A}^n$ の座標系 $X_1, \cdots, X_n$ で代表される多項式函数を**座標函数** (coordinate function) という.

命題 1.1 (1) 有限個の点からなる $\mathbb{A}^n$ の部分集合も, $\mathbb{A}^n$ 全体もアフィン代数的集合である.

(2) アフィン代数的集合の有限個の和集合も, 任意個の共通部分もアフィン代数的集合である.

定理 1.2 $\mathbb{A}^n$ に, アフィン代数的集合の全体を閉集合系とする位相 (**Zariski 位相**という) が定義できる.

問 1 $\mathbb{A}^n$ の部分空間としてのアフィン代数的集合 V の位相を, 座標環 $k[V]$ を使って定義せよ.

(b) $I(V)$ が素イデアルのとき, V を**アフィン代数多様体** (affine algebraic variety) という. 座標環の商体 $k(V)$ を V の**函数体** (function field) といい, その元を V の**有理函数** (rational function) という. 函数体 $k(V)$ は k 上の有限生成体なので, k 上有限次の超越次数をもつ. $k(V)$ の k 上の超越次数を V の**次元** (dimension) といい, $\dim V$ で表す.

$f_1, \cdots, f_m$ を $I(V)$ の生成系とする. $P \in V$ に対して, $m \times n$ 行列 $(\partial f_i/\partial X_j(P))_{i,j}$ の階数が丁度 $n - \dim V$ であるとき, P を**非特異点** (non-singular point) あるいは**単純点** (simple point) という. 階数が $n - \dim V$ より小さいとき, P を**特異点** (singular point) という.

アフィン代数的集合 V がアフィン代数的集合 V_1 を部分集合として含むとき, $V_1 \subset V$ と書き, V_1 を V のアフィン代数的部分集合という. このとき $I(V_1) \supset I(V)$ となる. V_1 がアフィン代数多様体なら次元 $\dim V_1$ が定まる. アフィン代数多様体 V に含まれるアフィン代数多様体 $V_1 \subset V$ の次元の最大値を V の**次元**とい

*大阪大学大学院 理学研究科

い, $\dim V$ と書く. アフィン代数的集合 V の部分集合 U が**十分に大きい**とは, $V \setminus U$ が V より次元の小さい代数的部分集合に含まれるときをいう.

(c) φ を有理函数とする. $P \in V$ について, 多項式函数 $p,\, q$ で $\varphi = p/q,\, q(P) \neq 0$ となるものが取れるとき, φ は P で**正則** (regular) であるといい, P を φ の**正則点**という. φ の正則点全体の集合を $\mathrm{dom}\,\varphi$ とおき, φ の**定義域**という. φ の正則点 P において φ の値が $\varphi(P) = p(P)/q(P)$ により定まるので, 有理函数はその定義域から $k\ (= \mathbb{A}^1)$ への写像となる. $\varphi(P) = 0$ となるとき P を φ の**零点** (zero) という.

定理 1.3 アフィン代数多様体において, すべての点で正則な有理函数は多項式函数である.

$P \in V$ で正則な有理函数の全体を $k[V]_P$ とおくと, $k[V]_P$ は多項式函数の全体 $k[V]$ を含む整域である. $k[V]_P$ の商体もまた函数体 $k(V)$ なので, 有理函数は P で正則な有理函数の比で表せる. P が $1/\varphi$ の零点であるとき, P を φ の**極** (pole) という.

命題 1.4 $k[V]_P$ は, P を零点にもつ有理函数の全体を唯一つの極大イデアルとする局所環である.

問 2 有理函数の定義域は, 十分に大きい部分集合であることを示せ.

§1.2 射影多様体

(a) $\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b} \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ とする. $\boldsymbol{a} = c\boldsymbol{b}$ なる $c \in k^{\times}$ が取れるとき $\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b}$ と書く. 同値類の全体 $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}/\!\sim$ を $\boldsymbol{n}$ **次元射影空間** (n-projective space) という. $\mathbb{P}^1$ を**射影直線**, $\mathbb{P}^2$ を**射影平面**という. $(x_0,\, x_1,\, \cdots,\, x_n) \in \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ で代表される射影空間の点を連比 $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ で表し, **斉次座標**という. アフィン空間 $\mathbb{A}^{n+1}$ の座標系 $X_0,\, X_1,\, \cdots,\, X_n$ の連比 $X_0 : X_1 : \cdots : X_n$ を $\mathbb{P}^n$ の**斉次座標系**という. 多項式環 $k[X] = k[X_0,\, X_1,\, \cdots,\, X_n]$ の元 $f(X)$ が $f(\lambda X) = \lambda^d f(X)\ (\forall \lambda \in k)$ を満たすとき, f を $\boldsymbol{d}$ **次斉次多項式**という. d を斉次多項式 f の**次数**といい, $\deg f$ と書く. 斉次多項式で生成されたイデアルを**斉次イデアル**という. 斉次イデアル I に対して,

$$V = V(I) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{P}^n \mid f(\boldsymbol{x}) = 0 \ \ \forall f \in I \text{ は斉次多項式 }\}$$

を I によって定まる**射影代数的集合** (projective algebraic set) という.

$$I(V) = (f \in kX \mid f \text{ は斉次},\ f(\boldsymbol{x}) = 0 \ \ (\forall \boldsymbol{x} \in V))$$

を V の**定義イデアル**という. 剰余環 $k[V] = k[X]/I(V)$ を V の**斉次座標環** (homogeneous coordinate ring) という. 定義イデアルが素イデアルのとき, V を**射影多様体** (projective variety) という.

命題 1.5 (1) 有限個の点からなる $\mathbb{P}^n$ の部分集合も, $\mathbb{P}^n$ 全体もアフィン代数的集合である.
(2) 射影代数的集合の有限個の和集合も, 任意個の共通部分もアフィン代数的集合である.

定理 1.6 $\mathbb{P}^n$ に, 射影代数的集合の全体を閉集合系とする位相が定義できる.

問 3 $\mathbb{P}^n$ の部分空間としての射影代数的集合 V の位相を, 斉次座標環 $k[V]$ を使って定義せよ.

(b) $X_0 : X_1 : \cdots : X_n$ を射影空間 $\mathbb{P}^n$ の斉次座標系とする. 斉次イデアル (X_j) によって定まる射影代数的集合 $V(X_j)$ の補集合を U_j とおくと, $U_j = \{[x_0 : \cdots] \in \mathbb{P}^n \mid x_j \neq 0\}$ と表せる. $V(X_j)$ は $\mathbb{P}^{n-1}$ に同型で, U_j は $\mathbb{A}^n$ に同型である. V を射影代数的集合とする. $V_j = V \cap U_j$ はアフィン空間 $(U_j \simeq \mathbb{A}^n)$ に含まれるアフィン代数的集合になる. また $V_j^{\infty} = V \cap V(X_j)$ は射影空間 $(V(X_j) \simeq \mathbb{P}^{n-1})$ に含まれる射影代数的集合で, 集合として $V = V_j \cup V_j^{\infty}$ と書ける. V_j を座標 X_j に関する**アフィン部分集合**といい, V_j^{∞} を**無限遠集合**, V_j^{∞} に属する点を**無限遠点**という.

(c) n 変数 d 次多項式 f に対して

$$\bar{f}(X_0, X_1, \cdots, X_n) = X_0^d f(X_1/X_0, \cdots, X_n/X_0)$$

は d 次斉次多項式で, f の**斉次化**という. V をアフィン代数的集合とし, $I(V)$ をその定義イデアルとする. $I(V)$ の元を斉次化したもので生成される斉次イデアルを $\overline{I(V)}$ とおく. $\overline{I(V)}$ によって定まる射影代数的集合 $\bar{V}$ を V の**射影閉包**という. $\bar{V} \setminus V$ の点を V の**無限遠点**という.

(d) 1 次斉次多項式で生成された斉次イデアルによって定まる代数的集合 $\ell \subset \mathbb{P}^n$ は**超平面**と呼ばれ, $\mathbb{P}^{n-1}$ に同型である. また $U = \mathbb{P}^n \setminus \ell$ はアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ に同型である. $\bar{V} \subset \mathbb{P}^n$ を射影代数的集合とする. 超平面 ℓ で $\bar{V}$ のどの既約成分も含まないものをとり, $U = \mathbb{P}^n \setminus \ell$ とおく. $V = \bar{V} \cap U$ はアフィン空間 $U \simeq \mathbb{A}^n$ に含まれるアフィン代数的集合で, 空ではない. V の射影閉包は $\bar{V}$ に等しい. V を $\bar{V}$ の**アフィン部分集合**といい, $V \cap \ell$ を V の**無限遠集合**, $V \cap \ell$ に属する点を**無限遠点**という. 射影代数的集合 $\bar{V}$ の任意の点 P に対して, P を通らない超平面 ℓ をとることで, P を含むアフィン部分多様体 V が存在する. このとき V を P の**アフィン近傍**という. $\bar{V}$ が射影代数多様体なら, アフィン部分集合 V はアフィン代数多様体になる. このとき V を $\bar{V}$ の**アフィン部分多様体**という. 射影多様体 $\bar{V}$ が ℓ に含まれないなら, $\bar{V}$ はアフィン部分多様体 V の射影閉包である.

問 4 (1) 射影代数的集合 $\bar{V}$ において, 任意のアフィン部分集合は開集合であることを示せ.
(2) 射影閉包は, アフィン代数的集合の射影空間における位相閉包であることを示せ.

§1.3 射影多様体の有理函数

(a) 有理式 $f(X) \in k(X) = k(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ が $f(\lambda X) = \lambda^d f(X)$ $(\lambda \in k)$ を満たすとき, f を ***d* 次斉次有理式**といい, d を f の**次数**という. このとき f は次数の差が d の斉次多項式の比で表すことができる. 特に 0 次斉次有理式 f は, 次数の同じ斉次多項式 p, q で $f = p/q$ と表すことができる.

(b) $\bar{V} \subset \mathbb{P}^n$ を射影多様体とし, $I(\bar{V})$ をその定義イデアルとする. 0 次 $n+1$ 変数斉次有理式 p/q で $q \notin I(\bar{V})$ なるものの全体を $k[X;\bar{V}]_0$ と書く. $p_1/q_1, p_2/q_2 \in k[X;\bar{V}]_0$ が $p_1 q_2 - p_2 q_1 \in I(\bar{V})$ をみたすとき, $p_1/q_1 \sim p_2/q_2$ と定義する. $k(\bar{V}) = k[X;\bar{V}]_0/\sim$ とおき, $\bar{V}$ の**函数体**という. 函数体の元を**有理函数**という. 函数体 $k(\bar{V})$ の k 上の超越次数を $\bar{V}$ の**次元** (dimension) といい $\dim \bar{V}$ で表す.

定理 1.7 射影多様体の有理函数は自然にアフィン部分多様体の有理函数とみなせる. この意味で, 射影多様体の函数体はアフィン部分多様体の函数体に同型で, 射影多様体の次元はアフィン部分多様体の次元に等しい.

(c) φ を $\bar{V}$ の有理函数とする. $P \in \bar{V}$ に対して, 次数の同じ斉次多項式 p, q で $\varphi = p/q$, $q(P) \neq 0$ となるものが取れるとき, φ は P で**正則**であるといい, P を φ の**正則点**という. $\varphi(P) = p(P)/q(P)$ により φ の正則点 P での値が定まる.

命題 1.8 $V \subset \bar{V}$ を $P \in \bar{V}$ のアフィン近傍とする. $\bar{V}$ の有理函数が P で正則であることと, V の有理函数として P で正則であることとは同値である. 従って P で正則な $\bar{V}$ の有理函数の全体は $k[V]_P$ に等しい.

φ の正則点全体の集合を $\operatorname{dom}\varphi$ とおき, φ の**定義域**という. φ の正則点 P において φ の値が定まるので, 有理函数はその定義域から k $(= \mathbb{A}^1)$ への写像となる. $\varphi(P) = 0$ となるとき P を φ の**零点**という. 写像の定義域には含まれない点 $P \in \bar{V} \setminus \operatorname{dom}\varphi$ で, $1/\varphi$ が P で定義され $(1/\varphi)(P) = 0$ となるとき P を φ の**極**という.

定理 1.9 射影代数多様体において, すべての点で正則な有理函数は定数函数である.

(d) $f_1, \cdots, f_m$ を $I(\bar{V})$ の斉次多項式からなる生成系とする. $P \in \bar{V}$ において, $m \times n$ 行列 $(\partial f_i/\partial X_j(P))_{i,j}$ の階数が $n - \dim \bar{V}$ であるとき P を**非特異点**といい, 階数が $n - \dim \bar{V}$ より小さいとき P を**特異点**という.

命題 1.10 P が射影多様体 $\bar{V}$ の特異点であることと, P のアフィン近傍での特異点であることとは同値である.

§1.4 有理写像・正則写像

(a) V をアフィン多様体とする. n 個の有理函数 $f_1, \cdots, f_n$ に対して,

$$\varphi = (f_1, \cdots, f_n) : V \ni P \longmapsto (f_1(P), \cdots, f_n(P)) \in \mathbb{A}^n$$

を V から $\mathbb{A}^n$ への**有理写像**という. φ は $f_1, \cdots, f_n$ の定義域の共通部分で写像として定義される. φ の像がアフィン代数多様体 V_1 に含まれるとき, $\varphi : V \to V_1$ と書き V から V_1 への有理写像という. 函数体の準同型写像

$$\varphi^* : k(V_1) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in k(V)$$

が引き起こされる. φ の像が V_1 の中で十分に大きいなら, φ^* は単射になり, $k(V_1)$ は $k(V)$ の部分体に同型である. 更に $k(V)$ が $\varphi^* k(V_1)$ 上有限次拡大となるとき, その拡大次数を φ の**写像度** (degree) といい $\deg \varphi$ と書く. このとき, 有限次拡大 $k(V)/\varphi^* k(V_1)$ のノルム写像 $N_{k(V)/\varphi^* k(V_1)} : k(V)^\times \to \varphi^* k(V_1)^\times$ に, 中への同型 φ^* の逆写像を合成した

$$\varphi_* = (\varphi^*)^{-1} \circ N_{k(C)/\varphi^* k(C')} : k(C)^\times \to k(C')^\times$$

が定義される. 乗法群の準同型写像 φ_* を φ の**ノルム写像**という.

命題 1.11 (1) φ の像が V_1 の中で十分に大きいなら, φ^* は体の埋め込みで, $\dim V_1 \leq \dim V$ となる.

(2) $\dim V = \dim V_1 = 1$ とする. φ が定数写像でなければ φ^* は単射で, $k(V)/\varphi^* k(V_1)$ は有限次拡大である.

(b) V をアフィン代数的集合とし, $f_0, f_1, \cdots, f_n$ を有理函数とする.

$$\varphi = [f_0 : f_1 : \cdots : f_n] : V \ni P \longmapsto [f_0(P) : f_1(P) : \cdots : f_n(P)] \in \mathbb{P}^n$$

を V から $\mathbb{P}^n$ への有理写像という. $P \in V$ に対して, 有理写像 g を $g f_0, g f_1, \cdots, g f_n$ が P で正則で少なくともひとつ P で零にならないように取れるとき, φ は P で**正則**であるといい, P を φ の**正則点**という. φ の正則点の全体を $\mathrm{dom}\, \varphi$ と書き, φ の**定義域**という. すべての点で正則な有理写像を**正則写像**という. 有理写像 φ の像が射影多様体 $\bar{V}_1$ に含まれるとき, $\varphi : V \to \bar{V}_1$ と書き V から $\bar{V}_1$ への有理写像という.

射影多様体からアフィン空間へ, 射影多様体からアフィン多様体へ, 射影多様体から射影空間へ, 射影多様体から射影多様体への有理写像を同様に定義し, それらについて正則点, 定義域なども同様に定めることができる.

V の有理函数 φ に対して, 有理写像 $[1 : \varphi] : V \to \mathbb{P}^1$ を考える. φ の定義域において $[1 : \varphi]$ は明らかに写像として定義される. また φ の極 P においても $[1 : \varphi](P) = [1/\varphi : 1](P) = [0 : 1]$ だから, $[1 : \varphi]$ は P で正則である.

命題 1.12 (1) 有理函数 φ に対して, $[1 : \varphi]$ の定義域は φ の正則点と極の全体に等しい.

(2) φ が定数函数でないなら, $[1 : \varphi]$ の像は $\mathbb{P}^1$ から有限個の点を除いたものとなる.

(c) $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ を射影多様体とする. 正則写像 $\varphi : \bar{V}_1 \to \bar{V}_2$, $\psi : \bar{V}_2 \to \bar{V}_1$ で, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ が恒等写像であるものが取れるとき, $\bar{V}_1$ と $\bar{V}_2$ は**同型** (isomorphic) であるといい $\bar{V}_1 \simeq \bar{V}_2$ と書く. φ, ψ を**同型写像** (isomorphism) という. アフィン多様体に対しても同様に同型, 同型写像が定義される.

V_1, V_2 をアフィン多様体または射影多様体とする. 像が十分に大きい有理写像 $\varphi : V_1 \to V_2$, $\psi : V_2 \to V_1$ で, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ が殆どの点で恒等写像に等しいとき, φ, ψ を**双有理写像** (birational map) といい, V_1 と

V_2 は**双有理同値** (birational equivalent) という. アフィン多様体 V とその射影閉包 $\bar{V}$ は双有理同値である. またそれらの函数体は同型であった. $\mathbb{A}^n$ の函数体も, $\mathbb{P}^n$ の函数体も, n 個の射影直線の直積 $\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ の函数体も n 変数有理函数体に同型で, $\mathbb{A}^n$, $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$ は双有理同値である.

定理 1.13 双有理同値であるための必要十分条件は, 函数体が同型であることである.

§2 代数曲線

§2.1 射影直線・射影平面

射影空間の中でも 1 次元の射影直線と 2 次元の射影平面をこれからよく使う. アフィン直線, 射影直線は有理函数などの値の属する空間として, アフィン平面, 射影平面は 1 変数代数函数体のモデルとしての平面曲線を描くキャンパスとして.... 特に断らない限り以下の記号を固定して使う.

射影直線 $\mathbb{P}^1$ の斉次座標系 $X_0 : X_1$ を固定し, アフィン直線と同型な部分集合 $U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 \neq 0\}$ をとる. 集合として $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup \{[0:1]\}$ と書ける. アフィン直線 U_0 の座標系として $z = X_1/X_0$ が取れ, $U_0 \subset \mathbb{P}^1$ の点はこの座標で表す. $[0:1]$ は z に関する無限遠点なので ∞ と書く. こうして $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ と書ける. 別のアフィン部分集合 $U_\infty = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_1 \neq 0\}$ の座標として $w = X_0/X_1$ が取れる. U_0 と U_∞ の共通部分 ($U_0 \cap U_\infty = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$) において $w = 1/z$ と書けるので, ∞ の近傍での解析にはアフィン部分空間 U_∞ と座標 $w = 1/z$ を使えばよい.

射影平面 $\mathbb{P}^2$ の斉次座標系 $X:Y:Z$ を固定する. $U = \{[a:b:1] \in \mathbb{P}^2 \mid (a, b) \in \mathbb{A}^2\}$ は $x = X/Z$, $y = Y/Z$ を座標系とするアフィン平面 $\mathbb{A}^2$ と同一視できる. x-座標は $\{[x_0:0:1] \mid x_0 \in \mathbb{A}^1\}$ で, y-座標は $\{[0:y_0:1] \mid y_0 \in \mathbb{A}^1\}$ で表される. $\ell_\infty = \{[a:b:0] \in \mathbb{P}^2 \mid [a:b] \in \mathbb{P}^1\}$ を**無限遠直線**とよぶ. 集合として $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup \ell_\infty$ と書ける.

§2.2 平面曲線・代数曲線

(a) k を代数閉体とする. 1 次元アフィン代数多様体を**アフィン代数曲線** (affine algebraic curve), 1 次元射影多様体を**射影曲線** (projective curve) という. アフィン代数曲線を貼り合わせた, 連結な代数多様体を**代数曲線** (algebraic curve) という. この解説での対象は非特異完備代数曲線なので, 殆どの場合, アフィン平面曲線の非特異完備化を考えれば十分である. 非特異完備化はその手続きに応じていろいろな物が現れるが, 代数曲線ではすべて同型になるので, 結局のところどの手順を選んでも構わない. §2.6 で非特異完備化の具体的な例を与える. そこでは幾つかの平面曲線について, 射影閉包をとり無限遠点などの特異点を具体的に解消してみせる. 正統的な議論とは少し離れてしまい, 十分に満足のいく例ではないかもしれないが, それらを見知っておくことで, 代数曲線により親しく接する機会になればと思います.

(b) 2 変数の多項式 $f(x, y) \in k[x, y]$ に対して, イデアル (f) によって定まるアフィン代数的集合 C を**アフィン平面曲線** (affine plane curve) という. f を C の**定義多項式**, $f = 0$ を**定義方程式**という. 定義多項式が既約のとき C を**既約アフィン平面曲線**という. このとき C は 1 次元アフィン代数多様体である. $f = f_1 f_2 \cdots f_r$ と既約多項式の積に分解するとき, C は $f_1, \cdots, f_r$ のそれぞれで定義された既約アフィン平面曲線 $C_1, \cdots, C_r$ の和集合となる. $C_1, \cdots, C_r$ を C の**既約成分**という. 斉次多項式 $f(X, Y, Z) \in k[X, Y, Z]$ に対して, 斉次イデアル (f) によって定まる射影代数的集合 C を**射影平面曲線** (projective plane curve) という. f を C の**定義多項式**, $F = 0$ を**定義方程式**という. 定義多項式が既約のとき C を**既約射影平面曲線**という. アフィン平面曲線, 射影平面曲線を**平面曲線** (plane curve) という. 平面曲線 C の定義多項式の次数 m を, C の**次数**といい, C を $\boldsymbol{m}$ **次曲線**という. 1 次曲線を**直線**という.

(c) $C : f(x, y) = 0$ をアフィン平面曲線とする. $\partial f/\partial x(P) = \partial f/\partial y(P) = 0$ を満たす $P = (a, b) \in C$ を**特異点**といい, そうでないとき**非特異点**という. 非負整数 $j \geq 0$ に対して, u, v の j 次斉次多項式 $f_P^{(j)}(u, v)$ を

$$f_P^{(j)}(u, v) = (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})^j f(P) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^j}{\partial x^i\, \partial y^{j-i}} f(P)\, u^i\, v^{j-i}$$

で定義する. $f_P^{(r)}(u, v)$ が恒等的に 0 ならない最小の r を P の**重複度** (multiplicity) といい, このとき P を ***r*-重点**という. 特異点は重複度が 2 以上で, 非特異点は重複度が 1 である. r-重点 P において, $f_P^{(r)}(x-a, y-b) = 0$ で定義されるアフィン平面曲線を**接錐** (tangent cone) という. 接錐は重複度を込めて丁度 r 個の直線の和で, それぞれの直線は C に P で接する. r-重特異点 P $(r \geq 2)$ の接錐が異なる r 個の直線の和となる (丁度 r 個の接線が引ける) とき, P を**通常特異点** (ordinary singular point) という. 通常 2 重点を**結節点** (node) という. $P \in C$ が結節点のとき, 平行移動で P をアフィン平面の原点に移し, 2 つの異なる接線を $y = x$, $y = -x$ に移す線形変換により C の定義方程式は $y^2 - x^2 + (x, y \text{ の 3 次以上の項}) = 0$ と書ける. 接線が 1 本しか引けない 2-重点では, 接線を $y = 0$ に移すことで $y^2 + (x, y \text{ の 3 次以上の項}) = 0$ となる. 適当な同型変換で $y^2 - x^3 + (x, y \text{ の 4 次以上の項}) = 0$ となるとき, P を**尖点** (cusp) という.

問 5 $f(x, y)$ を斉次 3 次多項式とする. 既約なアフィン代数曲線 $C : y^2 = f(x, y)$ は尖点をもつことを示せ.

問 6 $F(X, Y, Z)$ を m 次斉次多項式とし, $\overline{C} : F(X, Y, Z) = 0$ を射影平面曲線とする. 次を示せ.

(1) $X\,\dfrac{\partial F}{\partial X}(X, Y, Z) + Y\,\dfrac{\partial F}{\partial Y}(X, Y, Z) + Z\,\dfrac{\partial F}{\partial Z}(X, Y, Z) = m\,F(X, Y, Z)$ が成り立つ.

(2) $P \in \overline{C}$ が特異点であるための必要十分条件は, $\dfrac{\partial F}{\partial X}(P) = \dfrac{\partial F}{\partial Y}(P) = \dfrac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$ である.

(3) $P \in \overline{C}$ が特異点でないとき, P での接線は $X\,\dfrac{\partial F}{\partial X}(P) + Y\,\dfrac{\partial F}{\partial Y}(P) + Z\,\dfrac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$ で与えれらる.

(4) Z-座標が 0 でない $P \in \overline{C}$ が $\overline{C}$ の特異点であることと, $\overline{C} \cap \{Z \neq 0\}$ の特異点であることは同値である.

(d) C を平面曲線とし, $P \in C$ を非特異点とする. P における C の接線 ℓ_P は, P での C との交点数 $I_P(C, \ell_P)$ が 2 以上の直線である. P での交点数が 3 以上になるとき P を**変曲点** (point of inflextion, flex) という. 多項式 $f(x, y)$, 斉次多項式 $F(X, Y, Z)$ に対して,

$$H_f(x, y) = \det\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & f \end{vmatrix} \qquad H_F(X, Y, Z) = \det\begin{vmatrix} F_{XX} & F_{XY} & F_{XZ} \\ F_{YX} & F_{YY} & F_{YZ} \\ F_{ZX} & F_{ZY} & F_{ZZ} \end{vmatrix}$$

とおく. ここで添え字はその変数に関する偏微分を表すものとする. アフィン平面曲線 $C : f(x, y) = 0$ に対して, $H_f(x, y) = 0$ で表されるアフィン平面曲線を C の **Hesse 曲線** (Hessian) という. 射影平面曲線 $\overline{C} : F(X, Y, Z) = 0$ に対して, $H_F(X, Y, Z) = 0$ で表される射影平面曲線を $\overline{C}$ の **Hesse 曲線**という.

定理 2.1 平面曲線の非特異点が変曲点であるための必要十分条件は, Hesse 曲線上にあることである.

問 7 上の定理を示せ.

§2.3 代数函数体

(a) K を体 k の拡大体とする. $y \in K$ が $k(x_1, \cdots, x_r)$ 上代数的であるとき, y は $x_1, \cdots, x_r$ に k 上**代数的従属**であるという. k 上代数的でないとき, $x \in K$ は k 上**超越的** (transcendental) であるという. K の部分集合 S が k 上**代数的独立**であるとは, 任意の $y \in S$ が, y を除く S の有限個の元の組すべてに対して代数的従属でないときをいう. K の部分集合 S が代数的独立で, K が $k(S)$ の代数拡大であるとき, S を k 上の K の**超越基**という. 体 k の拡大 K に対して超越基 S は必ず存在し, S の濃度は一意に定まる. この濃度を K の k 上の**超越次数** (transcendence degree) といい $\operatorname{tr.deg}_k K$ で表す. $K = k(S)$ となる超越基 S が取れるとき, K を k の**純超越拡大**という.

(b) 体 k の超越次数 n の純超越拡大を k 上の $\boldsymbol{n}$ **変数有理函数体** (rational function field) といい, その様な体の有限次代数拡大を k 上の $\boldsymbol{n}$ **変数代数函数体** (algebraic function field) という. また k を K の**係数体**という. K を k 上の 1 変数代数函数体とする. このとき k 上超越的な元 $x \in K$ で K が $k(x)$ 上有限次拡大となるものが取れる. K が $k(x)$ の分離拡大となるとき, x を**分離元**という.

定理 2.2 (F.K.Schmidt) 係数体が完全体の 1 変数代数函数体は, 常に分離元をもつ.

以下, 係数体 k は代数閉体とする. x を 1 変数代数函数体 K の分離元とすると, K は $k(x)$ の単純拡大になる. $K = k(x, y)$ と書ける. K の超越次数は 1 なので, x と y は k 上代数的従属である. 0 でない多項式 $f(X, Y) \in k[X, Y]$ で $f(x, y) = 0$ なるのもが存在する. アフィン平面曲線 $C : f(X, Y) = 0$ をとると, C の函数体 $k(C)$ は K に一致する.

定理 2.3 係数体が代数閉体のとき, 1 変数代数函数体は適当なアフィン平面曲線の函数体になる.

§2.4 局所環と局所助変数

(a) C を代数曲線とする. $P \in C$ で正則な有理函数全体を $k[C]_P$ とし, P を零点にもつものの全体を M_P とおく.

命題 2.4 $k[C]_P$ は, M_P を唯一つの極大イデアルとする局所環である. 特に $P \in C$ が非特異点のとき整閉である.

定理 2.5 P が特異点でないとき, $k[C]_P$ は離散付値環である.

(b) P を非特異点とする. 離散付値環 $k[C]_P$ から誘導された $k(C)$ の加法的正規付値を ord_P とおく. 付値体 $k(C)$ の完備化を $k(C)_P$ とおく. 有理函数を含む完備化の元 f に対して $\mathrm{ord}_P(f)$ を f の P での**位数** (order) という. 位数が非負のとき f は P で**正則**であるという. 位数が正のとき P を f の**零点**といい, 位数が負のとき P を f の**極**という. $k[C]_P$ が整閉なので, これらは §1.1 (c), §1.3 (c) の定義と同値になる. P が特異点のときは少し煩雑になる. $k[C]_P$ の整閉包 $k[C]'_P$ は有限個の極大イデアルをもつ環である. 各極大イデアルは, 特異点解消の後に新たに付け加わる非特異点に対応する. 各極大イデアルごとに $k[C]'_P$ に離散付値が定まり, $k(C)$ が離散付値体になる. 以下, 非特異点の場合と同様の議論ができるが, 極大イデアルの選び方で付値など異なることを注意しておく.

(c) 完備付値体 $k(C)_P$ の素元 (位数が丁度 1 の元) を P における**局所助変数** (local parameter) という. P での局所助変数 t_P で $k(C)_P$ の元を Laurent 級数展開することで, $k(C)_P = k((t_P))$ と書ける. $P \in C$ が非特異点のとき局所助変数を P で正則な有理式に表せる有理函数を取ることができる. 特異点 P では一般に $k[C]_P$ が整閉でないので, 局所助変数を P で正則な有理式に表せる有理函数で取ることはできない.

定理 2.6 非特異点での局所助変数 (となる有理函数) は函数体の分離元である. 即ち, $t_P \in k(C)$ を非特異点 $P \in C$ の局所助変数とするとき, $k(C)$ は $k(t_P)$ 上の有限次分離拡大体である.

定理 2.7 代数曲線の函数体は 1 変数代数函数体である. 代数曲線はあるアフィン平面曲線に双有理同値である.

定理 2.8 双有理同値な代数曲線において, それらの非特異完備化は互いに同型である.

問 8 (1) 代数曲線 $C_1 : y^2 = x^2(x+1)$, $C_2 : y^2 = x^3$, $C_3 : y^2 = x^4(x-1)$ に関して, 特異点を求めよ.
(2) 各特異点における局所環が整閉であるかどうか調べ, 整閉包における極大イデアルを求めよ.
(3) それら代数曲線の函数体が有理函数体であることを示せ.

(d)　射影直線における局所環, 局所助変数をまとめておく．射影直線 $\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $X_0 : X_1$ とすると, $\mathbb{P}^1$ の有理函数は X_0, X_1 の 0 次斉次有理式の全体に等しい．0 次斉次有理式は, 分母分子を X_0 の適当なベキで割ることで, $z = X_1/X_0$ の有理式として表せる．函数体 $k(\mathbb{P}^1)$ は有理函数体 $k(z)$ になる．z は $U_0 = \{X_0 \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^1$ の座標系なので, $\mathbb{P}^1$ の函数体は $\mathbb{A}^1$ の函数体に等しい．$a = [1 : a] \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ をとる．有理函数 $f \in k(\mathbb{P}^1) = k(z)$ が a で正則であるためには, 有理式としての f の分母が $z = a$ で零にならなければよい．局所環は $k[\mathbb{P}^1]_a = \{f = p/q \,|\, p,\, q \in k[z],\, q(a) \neq 0\}$ となる．$k[\mathbb{P}^1]_a$ は $u_a = z - a$ を素元とする離散付値環で, u_a で割り切れる回数で付値が定まる．函数体の完備化 $K(\mathbb{P}^1)_a$ は $k((u_a)) = k((z - a))$ で, 有理式を $z = a$ の近傍で Laurent 級数展開することに対応する．

無限遠点 $\infty = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1$ はアフィン部分直線 $U_\infty = \{X_1 \neq 0\} \simeq \mathbb{A}^1$ の点と思い, 座標 $w = X_0/X_1 = 1/z$ を使って上と同様に考えることができる．結論を w でなく z の言葉でまとめる．∞ での局所環 $k[\mathbb{P}^1]_\infty$ は $\{f = p/q \,|\, p,\, q \in k[z],\, \deg p \leq \deg q\}$ に等しく, 次数の差 $\deg q - \deg q$ を $f = p/q$ の付値とする離散付値環をなす．∞ の局所助変数として $u_\infty = 1/z$ がとれ, 函数体の ∞ での完備化は $k((1/z))$ に等しい．

§2.5　Bézout の定理

(a)　斉次多項式 f, g で定義された射影平面曲線をそれぞれ C, D とおく．$m = \deg f$, $n = \deg g$ とし, C, D は共通の既約成分をもたないとする．C と D の両方に属する点 P を, C, D の**交点**という．P を原点として含むアフィン部分平面 $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$ をとる．このアフィン部分平面 $\mathbb{A}^2$ の座標系を x, y とし, $C \cap \mathbb{A}^2$, $D \cap \mathbb{A}^2$ の定義多項式を $f(x, y)$, $g(x, y)$ と書く．形式的ベキ級数環 $k[[x, y]]$ において, 剰余環 $k[[x, y]]/(f, g)$ は有限次元 k 線形空間になる．その次元を P における C と D の**局所交点数**といい, $I_P(C, D)$ $(= \dim_k k[[x, y]]/(f, g))$ とおく．このとき,

定理 2.9 (Bézout)　$$\sum_{P \in C \cap D} I_P(C, D) = mn$$

(b)　C と D の交点 P は $f(P) = 0$, $g(P) = 0$ を満たすので, 連立方程式 $f = g = 0$ の根として得られる．局所交点数は, 少しわかり難いが, 特異点で交わる場合を除いて, 連立方程式における根の重複度と考えてよい．C と D が普通に交わる場合の局所交点数は 1 で, 接する場合は 2 (以上), 接する度合いが増す毎にその値は増えていく．多くの場合に局所交点数は 1 になるので, 大雑把には C と D の交点の個数は mn 個といってもいいだろう．

定理 2.10 (簡易版)　共通の既約成分をもたない 2 つの射影平面曲線は必ず交点をもつ．更にそれら射影平面曲線の次数を m, n とおくとき, 交点の個数は高々 mn 個で, 接するなど特別な場合を除いて丁度 mn 個である．

§2.6　アフィン平面曲線の完備化

(a)　2 次アフィン平面曲線は, 定義方程式が可約であるなら, 2 つの直線の和となり, その交点は特異点になる．アフィン平面上で平行であるならアフィン平面内に交点はもたないが, 射影閉包をとると無限遠点で交わり, 無限遠点を特異点にもつ．既約な 2 次アフィン平面曲線は非特異で, その射影閉包も非特異である．既約な 2 次射影平面曲線は非特異で, 射影直線に同型である．この同型は Bézout の定理を使って具体的に書くことができる．

問 9　アフィン平面内の円, 楕円, 双曲線, 放物線を定義する方程式を与え, それらが特異点をもたないことを確かめよ．それぞれの射影閉包もまた特異点をもたず, すべて同型であることを同型写像を具体的に書いて確かめよ．

(b)　k の標数が 2 でないとする．3 次多項式 $f(x) \in k[x]$ に対して，アフィン平面曲線

$$C : y^2 = f(x)$$

を考える．f が重根をもたないとき，C は非特異アフィン平面曲線である．このとき C を**楕円曲線** (elliptic curve) という．楕円曲線 C の射影閉包は $\overline{C} : Y^2 Z = Z^3 f(X/Z)$ で定義される 3 次射影平面曲線である．無限遠点は $[0:1:0] \in \overline{C}$ の 1 点で，$[0:1:0]$ でも非特異なので，$\overline{C}$ は非特異 3 次射影平面曲線である．

$O = [0:1:0] \in \overline{C}$ とおく．2 点 $P, Q \in \overline{C}$ をとる．Bézout の定理より，P, Q を通る直線 ($P = Q$ のときは P での接線) は第 3 の点 R で C と交わる．R と O を通る直線も R' で C と交わる．ここで $P \oplus Q := R'$ と定める．C は $\oplus$ に関して O を零元とする加法群の構造をもつ．

問 10　(1)　アフィン平面曲線 $C : y^2 = f(x)$ ($\deg f = 3$) が非特異であることと，$f(x) = 0$ が重根をもたないことが同値であることを示せ．C の射影閉包 $\overline{C}$ が無限遠点で非特異であることを示せ．

(2)　$\oplus$ が O を零元とする加法を C の上に定めることを確かめよ．

(3)　P, P', O が同一直線上にあるとき，P と P' の座標の関係を記せ．

(c)　$a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in k$ をとり，3 次アフィン平面曲線

$$C : y^2 + a_1\,x\,y + a_3\,y = x^3 + a_2\,x^2 + a_4\,x + a_6$$

を考える．k の標数が 2 と異なるとき，定義方程式の左辺を y に関して平方完成することで，C はアフィン平面曲線

$$C_1 : y^2 = 4\,x^3 + b_2\,x^2 + 2\,b_4\,x + b_6$$

と同型である．ただし $b_2 = a_1^2 - 4a_2$, $b_4 = 2a_4 + a_1a_3$, $b_6 = a_3^2 + 4a_6$ とおいた．更に $c_4 = b_2^2 - 24b_4$, $c_6 = -b_2^3 + 36b_2b_4 - 216b_6$ とおく．k の標数が 3 と異なるなら，C および C_1 は

$$C_2 : y^2 = x^3 - 27c_4\,x - 54c_6$$

に同型である．C_1 および C_2 を (b) で扱ったもので，C はそれらと同型なアフィン平面曲線である．C の定義方程式を **Weierstrass 方程式**という．C の射影閉包を $\overline{C}$ における無限遠点は $[0:1:0]$ の唯一つの点で，非特異点である．C あるいは $\overline{C}$ が特異点をもたないとき，C を**楕円曲線**という．

$$\Delta = -b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_6b_6 = (c_4^3 - c_6^2)/1728$$
$$b_8 = a_1^2a_6 + 4a_2a_6 - a_1a_3a_4 + a_2a_3^2 - a_4^2$$

とおく．Δ を C の**判別式**という．$\Delta \neq 0$ のとき

$$j = j(C) = c_4^3/\Delta = 1728\,c_4^3/(c_4^3 - c_6^2)$$

とおき，C の ***j*-不変量**という．

定理 2.11　(1)　判別式 Δ は k の標数によらず $a_1, \cdots, a_6$ の式で表される．C の射影閉包 $\overline{C}$ が特異点をもたないことと $\Delta \neq 0$ であることは，k の標数によらず，必要かつ十分である．

(2)　Weierstrass 方程式で定義された楕円曲線 C, C' が同型であるための必要十分条件は $j(C) = j(C')$ である．

少し補足する．本来，**楕円曲線**とは 1 次元アーベル多様体，非特異完備代数曲線で代数的に定義された群演算をもつもののことをいう．(b) の代数曲線には，無限遠点 $O = [0:1:0]$ を零元とする加法が有理写像の形で定義され，1 次元アーベル多様体になるので楕円曲線と呼んだ．Weierstrass 方程式で定義された C に関しても，無限遠点 $O = [0:1:0]$ を零元とする加法が全く同じ手続きで定義される．C も 1 次元アーベル多様体，即ち楕円曲線である．1 次元アーベル多様体としての楕円曲線に同型を考えるなら，単に曲線としての同型ではなく，加法も込めて同型をいうべきである．実際には，代数曲線の同型写像が零元を保つなら加法演算も保たれるので，Weierstrass 方程式で定義された楕円曲線の場合には無限遠点を保つ同型写像を考えればよい．アフィン曲線間の同型写像 (座標変換に過ぎない) と j-不変量の関係を計算したのが，定理の (2) である．j-不変量は楕円曲線の不変量であって，代数曲線の不変量ではないことを注意しておく．

(d) k の標数が 2 でないとする．4 次多項式 $f(x) \in k[x]$ をとる．4 次アフィン曲線 $C : y^2 = f(x)$ は, $f(x) = 0$ が重根をもたないなら非特異である．C の射影閉包 $\overline{C} : Y^2\,Z^2 = Z^4\,f(X/Z)$ は, 無限遠点 $[0\!:\!1\!:\!0]$ を特異点にもつ．3 通りの手順で, C の非特異完備化を構成する．

まずは, 標準的なブローアップを行う．$\overline{C}$ は唯一つの無限遠点 $P_0 = [0\!:\!1\!:\!0]$ を特異点にもつので, P_0 のアフィン近傍を P_0 でブローアップしたアフィン代数曲線 C_0 と C との貼り合わせを作れば良い．4 次式 f を $f(x) = a_0\,x^4 + a_1\,x^3 + a_2\,x^2 + a_3\,x + a_4$ と書く．P_0 を含むアフィン近傍

$$C_0' : z^2 = a_0\,x^4 + a_1\,x^3\,z + a_2\,x^2\,z^2 + a_3\,x\,z^3 + a_4\,z^4$$

をとる．特異点 $(0,\,0) \in C_0'$ を解消したアフィン代数曲線を C_0 とおく．$(0,\,0) \in C_0'$ は 2 つの接線をもつ 2 重点 (結節点) なので, C_0 上の 2 つの点に分かれる．より具体的に C_0 は

$$C_0 : v^2 = a_0 + a_1\,u + a_2\,u^2 + a_3\,u^3 + a_4\,u^4 \quad (= u^4\,f(1/u))$$

で定義されるアフィン平面曲線で, f が重根をもたないので, 非特異である．有理写像

$$\varphi_0 : C \ni (x,\,y) \longmapsto (1/x,\,y/x^2) \in C_0$$

により, C と C_0 は双有理同値になる．φ_0 は, $C \setminus \{(0,\,\pm\sqrt{a_4})\}$ から $C_0 \setminus \{(0,\,\pm\sqrt{a_0})\}$ への同型写像である．φ_0 で C と C_0 を貼り合わせた代数曲線を $\hat{C}$ とおく．このとき $\hat{C}$ は非特異完備代数曲線になる．従って $\hat{C}$ が C の非特異完備化にあたる．$u = 1/x$ より, $\hat{C}$ における C の無限遠点は u-座標が 0 の C_0 の点 $(0 \pm \sqrt{a_0})$ の 2 点である．$(0,\,\sqrt{a_0})$ に対応する無限遠点を P_∞ とし, $(0,\,-\sqrt{a_0})$ に対応する無限遠点を P_∞' とする．このとき P_∞ の u-座標は 0 で v-座標は $\sqrt{a_0}$ である．また P_∞' の u-座標は 0 で v-座標は $-\sqrt{a_0}$ である．$k(C) = k(\hat{C}) = k(C_0) = k(u,\,v)$ なので, C の有理函数の無限遠点での値は, 有理函数を $u,\,v$ で展開し, $u,\,v$-座標の値を代入すれば良い．

アフィン平面の平行移動と, ブローアップを組み合わせて非特異完備化を与える．$f(x) = 0$ の根 $\alpha \in k$ をとる．

$$f(x) = a_0\,(x-\alpha)^4 + a_1\,(x-\alpha)^3 + a_2\,(x-\alpha)^2 + a_3\,(x-\alpha)$$

となる．$f(x) = 0$ は重根をもたないので $a_3 \neq 0$ である．ここで

$$C_\alpha : v^2 = a_3\,u^3 + a_2\,u^2 + a_1\,u + a_0$$

は非特異 3 次アフィン平面曲線, つまり楕円曲線である．有理写像

$$\psi : C \ni (x,\,y) \longmapsto (1/(x-\alpha),\,y/(x-\alpha)^2) \in C_\alpha$$

は, C から C_α への双有理同値を与える．C_α の射影閉包 $\overline{C}_\alpha$ は (b) より非特異射影平面曲線である．ψ の $\overline{C}_\alpha$ への延長を再び ψ と書くと,

$$\psi : C \ni (x,\,y) \longmapsto [x-\alpha\!:\!y\!:\!(x-\alpha)^2] \in \overline{C}_\alpha$$

ψ は C の $\overline{C}_\alpha$ への埋め込みなので, $\overline{C}_\alpha$ は C の非特異完備化である．またこのとき, 射影閉包 $\overline{C}$ における C の無限遠点 $[0\!:\!1\!:\!0]$ は, 2 点 $(0,\,\pm\sqrt{a_0}) \in C_\alpha$ に対応する．

最後のものは, 少し技巧的だが..... 4 次多項式 $f(x)$ の平方根 $\sqrt{f(x)}$ をベキ級数体 $k((1/x))$ で開平する．

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{a_0\,x^4 + a_1\,x^3 + a_2\,x^2 + a_3\,x + a_4} = b_0\,x^2 + b_1\,x + b_2 + b_3/x + \cdots$$

有理函数 $u = y - (b_0\,x^2 + b_1\,x)$, $v = x\,y - (b_0\,x^3 + b_1\,x^2 + b_2\,x)$, $w = x^2\,y - (b_0\,x^4 + b_1\,x^3 + b_2\,x^2 + b_3\,x)$ は,

$$u^2 + 2\,b_0\,w + 2\,b_1\,v - a_4 = 0\ , \quad u\,w - v^2 - b_2\,w + b_3\,v = 0$$

を満たす．どちらも w の 1 次式なので w を消去して, u と v の関係式を得る．

$$2\,b_0\,v^2 + 2\,b_1\,u\,v - a_3\,v = -u^3 + b_2\,u^2 + a_4\,u - a_4\,b_2$$

$a_0 = b_0^2$ に注意して $(u_0,\,v_0) = (-2\,b_0\,u,\,4\,b_0\,v)$ とおくと, $u_0,\,v_0$ は次を満たす．

$$v_0^2 - 2\,b_1\,u_0\,v_0 - 2\,b_0\,a_3\,v_0 = u_0^3 + 2\,b_0\,b_2\,u_0^2 - 4\,a_0\,a_4\,u_0 - 8\,a_0\,a_4\,b_0\,b_2$$

このままでも良いがさらに $(u_2,\,v_2) = (u_1,\,v_1 - b_1\,u_0 - b_0\,a_3) = (-2\,b_0\,u,\,4\,a_0\,v + 2\,b_0\,b_1\,u - b_0\,a_3)$ とおくと,

$$v_2^2 = u_2^3 + a_2\,u_2^2 + (-4\,a_0\,a_4 + a_1\,a_3)\,u_2 + (a_0\,a_3^2 - 4\,a_0\,a_2\,a_4 + a_1^2\,a_4)$$

なる関係式を得る．すべての係数がもともとの C の定義方程式の係数で書けていることを注意しておく．

$$C_\infty : y^2 = x^3 + a_2\,x^2 + (-4\,a_0\,a_4 + a_1\,a_3)\,x + (a_0\,a_3^2 - 4\,a_0\,a_2\,a_4 + a_1^2\,a_4)$$

$$\varphi_\infty : C \ni P \longmapsto (u_2(P),\, v_2(P)) \in C_\infty$$

φ_∞ は C から C_∞ への双有理写像になり, C_∞ の射影閉包 $\overline{C}_\infty$ は C の非特異完備化になる．射影閉包 $\overline{C}$ における C の無限遠点 $[0\!:\!1\!:\!0]$ に対応する点は少し見え難くなっているが, C_∞ の唯一つの無限遠点と $(-2b_0b_2,\, 3b_0^2b_3) \in C_\infty$ の 2 点である．

問 11　(1)　C の非特異完備化 $\hat{C}$, $\overline{C}_\alpha$, $\overline{C}_\infty$ は互いに同型であることを確かめよ．

(2)　$\overline{C}_\alpha$ の加法を, 上の同型写像を通して $\hat{C}$ の上に描くことができる．その演算手続きを図形的に説明せよ．

(3)　$\overline{C}_\infty$ の加法を, 上の同型写像を通して $\hat{C}$ の上に描くことができる．その演算手続きを図形的に説明せよ．

(e)　k の標数が 2 でないとし, (b), (d) を次数に関して一般化したものを扱う．重根をもたない多項式 $f(x) \in k[x]$ に対して, アフィン平面曲線 $C : y^2 = f(x)$ を考える．このとき C は非特異アフィン平面曲線になる．C (の非特異完備化) を**超楕円曲線** (hyperelliptic curve) という．正しくは後で定義する種数によって呼び名が変わる (§3.5, §4.5)．この曲線 C については f の次数 $n = \deg f$ で区別できる．$n \leq 2$ のとき **2 次曲線** (conic), $n = 3,\, 4$ のとき**楕円曲線** (elliptic curve), $n \geq 5$ のとき**超楕円曲線**という．2 次曲線は (a) で, $n = 3$ の楕円曲線は (b) で, $n = 4$ のものは (d) で扱った．以下ここでは $n \geq 5$ の超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ について非特異完備化を構成する．

4 次のときのブローアップと同じ手続きでをとる．$n = \deg f$, $m = [(n+1)/2]$ とおく．n が奇数のとき $n = 2\,m - 1$ で, n が偶数のとき $n = 2\,m$ である．C の射影閉包 $\overline{C}$ は唯一つの無限遠点 $[0\!:\!1\!:\!0]$ を特異点にもつ．その特異点を解消したアフィン代数曲線として,

$$C_0 : v^2 = u^{2m}\, f(1/u)$$

を取ることができる．C が非特異なので (従って f は重根をもたないので), C_0 もまた非特異アフィン平面曲線である．C_0 も超楕円曲線で, 次数は $2\,m$ を超えない．$f(x)$ の定数項が 0 でないなら次数は $2\,m$ で, 0 なら次数は $2\,m-1$ である．有理写像

$$\varphi_0 : C \ni (x,\, y) \longmapsto (1/x,\, y/x^m) \in C_0$$

により, C と C_0 は双有理同値になる．φ_0 で C と C_0 を貼り合わせた代数曲線を $\hat{C}$ とおく．

命題 2.12　$\hat{C}$ は C の非特異完備化で, 無限遠点は, 次数が奇数のとき 1 点で, 次数が偶数のとき 2 点である．

次数 $n = \deg f$ が偶数の超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ において, $f(x) = 0$ の根 $\alpha \in k$ をとる．このとき $f(x) = a_0\,(x-\alpha)^n + a_1\,(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,(x-\alpha)$ と書ける．

$$C' : v^2 = a_{n-1}\,u^{n-1} + \cdots + a_1\,u + a_0$$

とおくと, C' は非特異アフィン平面曲線で, 特に次数が奇数の超楕円曲線である．C を C' は双有理同値で, 貼り合わせ $C \cup C'$ もまた C の非特異完備化である．$C \cup C'$ は C' の非特異完備化でもあるので, C と C' のどちらから始めても同じ非特異完備代数曲線 $C \cup C'$ を扱うことになる．閉体上で扱う限り, 超楕円曲線として $\deg f$ が奇数のものをとり, 無限遠点は唯一つと考えても十分である．

超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ において, 有理写像 $\iota : C \ni (x,\, y) \longmapsto (x,\, -y) \in C$ が定義される．ι は自分自身への同型写像で, 2 回繰り返すと恒等写像になる．ι を**超楕円対合** (hyperelliptic involution) という．C の非特異完備化は, C と双有理同値な超楕円曲線を貼り合せて作ったので, 無限遠点においても超楕円対合が定義される．f が奇数次のとき無限遠点は唯一つで, ι で不変である．f が偶数次のときは無限遠点は 2 つあり, ι で互いに移りあう．無限遠点以外の点で ι で不変なものは, y-座標が 0 となるので, x-座標が $f(x) = 0$

の根になる $n\ (=\deg f)$ 個である. 無限遠点も含めて ι で不変な点は, f が奇数次のときは $n+1$ 個で, f が奇数次のときは n 個である. まとめて $m=[(n+1)/2]$ で表すと, 超楕円曲線 $C: y^2=f(x)$ の超楕円対合で不変な点は丁度 $2m$ 個である.

問 12 (1) アフィン平面曲線 $C: y^2=f_1(x)\,f_2(x)^2$ は $C': v^2=f_1(u)$ に双有理同値であることを示せ.

(2) アフィン平面曲線 $C: y^2=f(x)$ が非特異であることと, $f(x)=0$ が重根をもたないことは同値である.

(f) k の標数が 2 でも 3 でもないとする. $\overline{C}: F(X,Y,Z)=0$ を既約な 3 次射影平面曲線とする.

問 13 $\overline{C}$ が特異点をもつとする. 特異点は丁度 1 つで, $\overline{C}$ は射影直線に双有理同値であることを示せ.

$\overline{C}: F(X,Y,Z)=0$ を非特異 3 次射影平面曲線とし, $H_F(X,Y,Z)=0$ を C の Hesse 曲線とする. F は 3 次斉次多項式なので H_F も 3 次斉次多項式になる.

命題 2.13 C は丁度 9 個の変曲点をもつ.

P_∞ を $\overline{C}$ の変曲点とし, P_∞ での接線を ℓ とおく. 射影平面の斉次座標変換により (新しい斉次座標系を再び $X\!:\!Y\!:\!Z$ と書く), P_∞ を $[0\!:\!1\!:\!0]$ に ℓ を $\{Z=0\}$ に移すことができる. このとき

命題 2.14 $\overline{C}$ は Weierstrass 方程式で定義される射影平面曲線に同型である.

問 14 命題 2.12 を示せ. また, $\overline{C}$ が特異点をもつときにも, 上と同様の手続きで命題 2.12 が成り立つことを示せ.

(g) 簡単のため k の標数は 0 とする. 重根をもたない 4 次多項式 $f(x)\in k[x]$ をとる. アフィン平面曲線

$$C: y^3=f(x)$$

は特異点をもたない. 射影平面における C の射影閉包は

$$\overline{C}: Y^3 Z=f(X/Z)\,Z^4$$

と表される. $\overline{C}$ における C の無限遠点は $[0\!:\!1\!:\!0]$ の 1 点で, 特異点ではない. 従って $\overline{C}$ は非特異射影曲線, つまり C の非特異完備化にあたる.

(h) 少し一般の場合を考える. ここでも簡単のため k の標数は 0 とする. アフィン平面曲線

$$C: y^3=f(x) \qquad (f(x)\in k[x])$$

をとる. C は, f の次数 $\deg f$ が 1 以下なら有理曲線, 2 次なら楕円曲線になり, 3 次のものは (f) で, 4 次のものは (g) で扱った. ここでは $\deg f\geq 5$ とする.

命題 2.15 (1) 多項式 $f_1, f_2, f_3\in k[x]$ で, $f=f_1\,f_2^2\,f_3^3$ を満たし $f_1\,f_2$ は重根をもたないものが存在する.

(2) アフィン平面曲線 $C_1: f_2(x)\,y^3=f_1(x),\ \ C_2: f_1(x)\,y^3=f_2(x)$ は特異点をもたない.

(3) C_1, C_2 は $C: y^3=f(x)$ に双有理同値である.

n_1 次と n_2 次の多項式 $f_1, f_2\in k[x]$ は互いに素で重根をもたないとする. アフィン平面曲線 $C_1: f_2(x)\,y^3=f_1(x)$ の射影閉包を $\overline{C}_1$ とおく. 先に (f) や (g) で扱ったものを省くために, $n_1\geq 5$ または $n_2\geq 1$ とする.

命題 2.16 $s=n_1-n_2-3$ とおく. $\overline{C}_1$ における C_1 の無限遠点は,

(1) $s>0$ のとき, $[0\!:\!1\!:\!0]$ の 1 点で, 特異点である.

(2) $s=0$ のとき, $[0\!:\!1\!:\!0]$ と $[1\!:\!a\!:\!0]$ (a は $a^3=(f_1$ の最高次の係数$)/(f_2$ の最高次の係数$)$ なる k の元) の 4 点で, $[1\!:\!a\!:\!0]$ は非特異点である. $[0\!:\!1\!:\!0]$ は $\deg f_2>1$ のとき特異点で, $n_2=1$ のとき非特異点である.

(3) $s<0$ のとき, $[0\!:\!1\!:\!0]$ と $[1\!:\!0\!:\!0]$ の 2 点で, $[1\!:\!0\!:\!0]$ は特異点である. $[0\!:\!1\!:\!0]$ は $n_2>1$ のとき特異点で, $n_2=1$ のとき非特異点である.

簡単に, 特異点の様子を調べてみる. $s=0$, $s<0$ の場合も本質的に何も変わらないが, 並べて書くと煩雑になるので演習問題として省略し, ここでは $s>0$ の場合のみ述べる. $m=n_1-3$ とおく. (f) や (g) で扱ったものを除くと $m\geq 2$ としてよい.

命題 2.17 $\overline{C}_1$ の唯一つの特異点 $[0:1:0]$ は重複度 m の特異点である. $f_2(x)=\sum b_j\,x^j$ と書くとき接錐の定義方程式は $Z^s\,(\sum j!\,(m-j)!\,b_j\,X^j\,Z^{n_2-j})=0$ である.

問 15 $s\leq 0$ の場合に, 無限遠特異点における接錐を求めよ.

特異点を一つずつ解消していってもいいが, この曲線に対しては双有理同値な 4 つのアフィン代数曲線を貼り合わせればよい. $r=0,\ \pm1$ を $r\equiv n_1-n_2 \bmod 3$ にとる. $r=-1$ のとき $\tilde f_1(x)=x^{n_1+1}\,f_1(1/x)$, $\tilde f_2(x)=x^{n_2}\,f_2(1/x)$ とおき, $r=0,\ 1$ のとき $\tilde f_1(x)=x^{n_1}\,f_1(1/x)$, $\tilde f_2(x)=x^{n_2+1}\,f_2(1/x)$ とおく.

命題 2.18 $C_1:f_2(x)\,y^3=f_1(x)$, $C_2:f_1(x)\,y^3=f_2(x)$, $\tilde C_1:\tilde f_2(x)\,y^3=\tilde f_1(x)$, $\tilde C_2:\tilde f_1(x)\,y^3=\tilde f_2(x)$ は非特異アフィン平面曲線で, 互いに双有理同値である. 双有理写像で貼り合わせた代数曲線 $\hat C_1=C_1\cup C_2\cup\tilde C_1\cup\tilde C_2$ は非特異完備代数曲線で, C_1 の非特異完備化である.

問 16 双有理写像 $C_1\ni(x,\,y)\longmapsto(x,\,*)\in C_2$, $C_1\ni(x,\,y)\longmapsto(1/x,\,*)\in\tilde C_1$, $C_1\ni(x,\,y)\longmapsto(1/x,\,*)\in\tilde C_2$ を具体的に書き表せ. C_1 の座標函数 $x,\,y$ を非特異完備化 $\hat C_1=C_1\cup C_2\cup\tilde C_1\cup\tilde C_2$ の有理函数に延ばしたとき, 有理写像としての $x,\,y:\hat C\to\mathbb{P}^1$ が全射正則写像であることを確かめよ.

問 17 非特異完備化 $\hat C_1$ における C_1 の無限遠点の個数を求めよ. (上の問いにも関係するが, $\hat C_1\setminus C_1$ には x-座標函数の値が無限大の点だけでなく, 有限の値をとる点もある. それらすべてを "無限遠点" と呼ぶのは少し気が引けるが, x-座標函数の値ごとに "無限遠点" の個数を数えてみよ.)

(i) 簡単のため k の標数は 0 とする. $d>1$ とし, n_1 次と n_2 次の多項式 $f_1,\,f_2\in k[x]$ は互いに素で重根をもたないとする. このとき, アフィン平面曲線

$$C:f_2(x)\,y^d=f_1(x)$$

は特異点をもたない. C の射影閉包を $\overline{C}$ とおく.

命題 2.19 $s=n_1-n_2-d$, $m=n_1-d$ とおく. $s>0$ とする. $\overline{C}$ における C の無限遠点は $[0:1:0]$ の唯一つで, 重複度は m である. $f_2(x)=\sum b_j\,x^j$ と書くとき接錐は $Z^s\,(\sum j!\,(m-j)!\,b_j\,X^j\,Z^{n_2-j})=0$ で定義される.

問 18 $s\leq 0$ のとき, $\overline{C}$ における C の無限遠点を求め, 特異点であるかどうか調べよ. また, 接錐を計算せよ.

$|r|\leq d/2$ を $r\equiv n_1-n_2 \bmod d$ となるようにとる. $r=0,\ \pm1$ のとき, C の非特異完備化は (h) の命題 2.18 と全く同様にできる. $r\neq 0,\ \pm1$ のときは, 簡単ではないが標準的な手続きで特異点を解消することができる. 煩雑になるのと, ここまでで十分に例を挙げたと思うので, 以下は省略する. 冗長になるかもしれないが, $r=-1$ のとき $\tilde f_1(x)=x^{n_1+1}\,f_1(1/x)$, $\tilde f_2(x)=x^{n_2}\,f_2(1/x)$ とおき, $r=0,\ 1$ のとき $\tilde f_1(x)=x^{n_1}\,f_1(1/x)$, $\tilde f_2(x)=x^{n_2+1}\,f_2(1/x)$ とおくと, 命題 2.18 と全く同じ (y のベキ指数のみ異なる) 次の命題が成り立つ.

命題 2.20 $C_1:f_2(x)\,y^d=f_1(x)$, $C_2:f_1(x)\,y^d=f_2(x)$, $\tilde C_1:\tilde f_2(x)\,y^d=\tilde f_1(x)$, $\tilde C_2:\tilde f_1(x)\,y^d=\tilde f_2(x)$ は非特異アフィン平面曲線で, 互いに双有理同値である. 双有理写像で貼り合わせた代数曲線 $\hat C=C_1\cup C_2\cup\tilde C_1\cup\tilde C_2$ は非特異完備代数曲線で, それぞれのアフィン平面曲線の非特異完備化である.

問 19 $r\neq 0,\ \pm1$ とする.

(1) $C:f_2(x)\,y^d=f_1(x)$ の非特異完備化 $\hat C$ を 4 つの非特異アフィン平面曲線の貼り合わせで与えよ.

(2) C の座標函数 $x,\,y$ を $\hat C$ の有理函数に延ばしたとき, $x,\,y:\hat C\to\mathbb{P}^1$ が全射正則写像であることを示せ.

(3) 非特異完備化 $\hat C$ における C の無限遠点の個数を求めよ.

§3 分岐被覆と Riemann-Hurwitz の公式

§3.1 代数曲線の有理写像

(a) C を代数曲線とし, f を有理函数とする. $[1:f]: C \ni P \longmapsto [1:f(P)] \in \mathbb{P}^1$ は C から $\mathbb{P}^1$ への有理写像である. 有理写像 $\varphi = [f:g]: C \to \mathbb{P}^1$ は, f が零写像なら, $\varphi = [0:g] = [0:1] = \infty$ なので, ∞ に値をもつ定数写像である. f が零写像でないなら, f の零点を除いたところで $\varphi = [f:g] = [1:g/f]$ なので, φ は有理函数 g/f に対応する. 従って, C から $\mathbb{P}^1$ への有理写像の全体は, $k(C) \cup \{\infty\}$ に 1 対 1 に対応する.

(b) 代数曲線の非定数有理写像 $\varphi: C \to C'$ はほとんど全射なので, C' の有理函数 $f \in k(C')$ に対して $f \circ \varphi$ は C の有理函数になる. 体の準同型写像 $\varphi^*: k(C') \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in k(C)$ が引き起こされる.

命題 3.1 (1) 非定数有理写像 $\varphi: C \to C'$ に対して, $k(C)$ は $\varphi^* k(C')$ の有限次拡大である.
(2) 体の中への k-同型 $\psi: k(C') \to k(C)$ に対して, $\varphi^* = \psi$ なる有理写像 $\varphi: C \to C'$ が唯一つ存在する.
(3) k を含む $k(C)$ 部分体 K を $[k(C):K] < \infty$ にとる. このとき, 代数曲線 C_0 と有理写像 $\varphi: C \to C_0$ で $\varphi^* k(C_0) = K$ を満たすものが存在する.

(c) C を代数曲線とし, $\varphi: C \to \mathbb{P}^n$ を射影空間への有理写像とする.

定理 3.2 非特異点 $P \in C$ において φ は正則である.

系 3.3 (1) 非特異代数曲線から射影空間への有理写像は, 正則写像である.
(2) 非特異完備代数曲線の間の有理写像は, 定数写像であるか全射である.
(3) 非特異完備代数曲線の間の写像度が 1 の有理写像は同型写像である.

問 20 (1) 非特異点の局所助変数をうまく使って, 定理 3.2 を示せ.
(2) 非特異完備代数曲線は射影空間に射影曲線として埋め込まれることを使って, 系 3.3 を示せ.

(d) C, C' を非特異完備代数曲線とし, $\varphi: C \to C'$ を有理写像とする. φ が定数写像でないとき, 有限次拡大 $k(C)/\varphi^* k(C')$ の拡大次数を φ の**写像度**といい $\deg \varphi$ と書く. φ が非零定数写像のとき $\deg \varphi = 0$ と定義し, 零写像に対して $\deg 0 = -\infty$ とおく. $k(C)/\varphi^* k(C')$ が分離的拡大体のとき φ を**分離的** (separable) といい, $k(C)/\varphi^* k(C')$ が (純) 非分離的拡大体のとき φ を **(純) 非分離的** ((purely) inseparable) という. $k(C)/\varphi^* k(C')$ の分離次数, 非分離次数を φ の**分離次数**, **非分離次数**といい, $\deg_s \varphi$, $\deg_i \varphi$ と書く.

(e) k の標数が $p\ (>0)$ の場合を考える. $q = p^r$ に対して, **q-乗 Frobenius 写像** π を, 体 k 上では体の同型写像 $\pi: k \ni x \longmapsto x^q \in k$ として, 多項式環上では係数への作用 $\pi: k[X] \ni f \longmapsto f^\pi \in k[X]$ として, アフィン空間 $\mathbb{A}^n$, 射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上では各成分への作用として定義する. 代数曲線 C に対して, $I(C)^\pi$ によって定まる代数曲線を C^π とおく. 自然な有理写像 $\pi: C \ni P \to C^\pi$ を, 代数曲線の **q-乗 Frobenius 写像**という.

命題 3.4 拡大 $k(C)/\pi^* k(C^\pi)$ は q 次純非分離的である. 従って π は q 次の純非分理的有理写像である.

命題 3.5 k の標数を $p > 0$ とする. $\varphi: C \to C'$ を非特異代数曲線の非定数有理写像とする. $q = \deg_i \varphi$ とおき, π を q-上 Frobenius 写像とする. このとき, 分離的有理写像 $\psi: C^\pi \to C'$ で $\varphi = \psi \circ \pi$ となるものが存在する.

§3.2 有理写像の分岐点

(a) $\tilde{C}$, C を非特異完備代数曲線とし, $\varphi : \tilde{C} \to C$ を非定数有理写像とする．$P \in \tilde{C}$ とする．$\varphi(P) \in C$ は非特異点なので, 局所助変数 $t_{\varphi(P)} \in k(C)_{\varphi(P)}$ を Q で正則な有理式に表せる有理函数に取ることができる．$e_\varphi(P) = \mathrm{ord}_P(\varphi^* t_{\varphi(P)})$ を P での φ の**分岐指数** (ramification index) という．$k(C)_{\varphi(P)} = k((t_{\varphi(P)}))$ なので, 完備離散付値体 $k(\tilde{C})_P$ の中での $\varphi^* k(C)$ の閉包は $k((\varphi^* t_{\varphi(P)}))$ である．分岐指数は完備体 $k(\tilde{C})_P / k((\varphi^* t_{\varphi(P)}))$ の拡大次数に等しい．分岐指数が 2 以上のとき P を φ の**分岐点** (branch point) といい, φ は P で**分岐する** (ramified) という．分岐指数が 1 のとき P を φ の**不分岐点** (unbranch point) といい, φ は P で**不分岐である** (unramified) という．φ が**不分岐**であるとは, $\tilde{C}$ のすべての点で不分岐なときをいう．$Q \in C$ に対して, $\varphi(P) = Q$ なる $P \in \tilde{C}$ を Q の上にある点という．Q の上のすべての点で $\varphi : \tilde{C} \to C$ が不分岐であるとき φ は Q で**不分岐である**といい, そうでないとき Q で**分岐する**という．分岐点 P での分岐指数が k の標数で割れるとき, **野性的分岐** (wild ramification) といい, k の標数で割れないとき, **順な分岐** (tame ramification) という．

命題 3.6 (1) すべての $Q \in C$ で, $\sum_{P \in \varphi^{-1}(Q)} e_\varphi(P) = \deg \varphi$ が成り立つ．

(2) 有限個の点を除く殆どすべての $Q \in C$ で, $\sharp \varphi^{-1}(Q) = \deg_s \varphi$ が成り立つ．

(3) 非定数有理写像の合成に関して, $e_{\psi \circ \varphi}(P) = e_\varphi(P)\, e_\psi(\varphi(P))$ が成り立つ．

問 21 代数体の拡大における素点の分岐指数と, 非特異完備代数曲線の間の非定数有理写像における曲線上の点の分岐指数は, 全く同等の概念であることを後者を函数体の言葉で書き直すことで説明せよ．代数体の拡大での惰性にあたるものが, 代数曲線の場合に現れないことを説明せよ．

(b) $\varphi : \tilde{C} \to C$ を非特異完備代数曲線の非定数有理写像とする．代数閉体 k 上の 1 変数代数函数体の有限次分離拡大 $k(\tilde{C})/\varphi^* k(C)$ は単純拡大である．$k(\tilde{C})/\varphi^* k(C)$ の生成元の最小多項式 $F(X) \in \varphi^* k(C)[X]$ をとる．

定理 3.7 $F(X)$ を完備離散付値体 $k((\varphi^* u_Q))$ 係数の多項式として既約元分解を $F(X) = F_1(X) \cdots F_r(X)$ とする．このとき $\varphi^{-1}(Q) = \{P_1, \cdots, P_r\}$ で, 適当に並べ替えて $e_\varphi(P_j) = \deg F_j$ となるようにできる．

$P \in \tilde{C}$, $Q = \varphi(P) \in C$ とする．t_P を P での局所助変数とし, $e = e_\varphi(P)$ とおく．Q での局所助変数 $u_Q \in k(C)$ の $k(\tilde{C}) \subset k((t_P))$ への持ち上げは, $\varphi^* u_Q = t_P^e + * t_P^{e+1} + \cdots$ と書ける．t_P^e の項の係数は, t_P か u_Q に織り込んで 1 になるようにした．

命題 3.8 分離的な非零有理函数 $f \in k(\tilde{C})$ に対して, $\mathrm{ord}_P(\varphi^* f) = e_\varphi(P)\, \mathrm{ord}_{\varphi(P)}(f)$ が成り立つ．

定理 3.9 f を非特異完備代数曲線 C の分離的非定数有理函数とする．有理写像 $[1 : f] : C \to \mathbb{P}^1$ に関する $P \in C$ の分岐指数を $e_f(P)$ とおく．P が f の極なら $\mathrm{ord}_P(f) = -e_f(P)$ で, 極でないなら $\mathrm{ord}_P(f - f(P)) = e_f(P)$ である．f のすべての極の位数の和と f のすべての零点の位数の和は一致し, $\sum_P \mathrm{ord}_P(f) = 0$ が成り立つ．

(c) e が k の標数で割れない (野性的分岐でない) なら, $(\varphi^* u_Q)^{1/e} = (t_P^e + * t_P^{e+1} + \cdots)^{1/e} = t_P + * t_P^2 + \cdots \in k((t_P))$ と二項展開できる．右辺は $k(C_1)_P$ の素元なので P での局所助変数になる．それを改めて t_P と置き直せば,

定理 3.10 P での分岐が野性的でないなら, 局所助変数 $t_P \in k(C)_P$ で, $t_P^e = \varphi^* u_Q$ なるものが取れる．

P での分岐が野性的 (分岐指数が k の標数で割り切れる) とする．u_Q の持ち上げの展開 $\varphi^* u_Q = t_P^e + \cdots \in k((t_P))$ に現れる t_P のすべてのベキ指数が k の標数 $p\ (> 0)$ で割り切れるなら, 右辺は t_P のベキ級数の p 乗の形に表せるので, 拡大 $k((t_P))/k((\varphi u_Q))$ は非分離的である．同じことだが, 拡大 $k((t_P))/k((\varphi^* u_Q))$ が分離的なら, $\varphi^* u_Q$ の t_P での展開に p と素なベキ指数の項が現れる．§4.2 で定義する局所微分の言葉での

言うと, 局所微分 $(du_Q)_Q$ の引き戻し $(\varphi^*(du_Q)_Q)_P$ は, $k((t_P))/k((\varphi^*))$ が分離的なら非零で, 非分離的なら零になる.

§3.3 局所助変数の具体的な形

(a) 与えられた代数曲線の特異点を無くし完備なものに取り替えることは重要である. 前節で具体的に計算したようにその様な操作は可能であった. そこでは, 特異点や無限遠点の近傍を双有理写像で非特異なものに貼りかえていく作業を行った. 代数曲線の場合には, 有限回の貼りかえで非特異完備なものに到達し, また非特異完備化された代数曲線は手順によらず同型であった.

双有理写像のもとで函数体は変わらない (体として同型である). 函数体から眺めると, 非特異完備化は与えられた函数体をもつ非特異完備代数曲線が同型を除いて唯一つ存在することを具体的な構成とともに保障する. 特異点であろうと無限遠点であろうと, 局所助変数を与えて, 任意の有理函数の Laurent 級数展開が計算できれば十分であろう. 話しを簡単にする (野性的分岐が現れないようにする) ため, この節で k の標数は 0 とする.

(b) C を代数曲線とし, C の非特異完備化を $\tilde{C}$ とおく. C の非特異点は自然に $\tilde{C}$ の (非特異) 点と思え, C の有理函数もまた $\tilde{C}$ の有理函数と思える. $P \in C$ を非特異点とし, $f \in k(C)$ を分離的非定数有理函数とする. 分離的有理写像 $f : \tilde{C} \to \mathbb{P}^1$ における P の分岐指数を e とおき, $a = f(P) \in \mathbb{P}^1$ とおく. 射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ のアフィン座標系 z をとり, $a \in \mathbb{A}^1$ のとき $u_a = z - a$ とし, $a = \infty$ のとき $u_\infty = 1/z$ とすると, u_a は $a \in \mathbb{P}^1$ の局所助変数である. 定理 3.10 より, $P \in \tilde{C}$ の局所助変数 $t \in k(\tilde{C})_P$ として, $t^e = f^* u_a$ となるものが取れる. ここで $k(C) = k(\tilde{C})$ だから, 局所助変数 t は $P \in C$ における局所助変数と思うことができる. 以上をまとめて

定理 3.11 代数曲線 C の非特異点 $P \in C$ をとる. C の有理函数 f に対し, $a = f(P)$ とおき, 分岐被覆 f における P の分岐指数を e とおく. このとき P の局所助変数 $t \in k(C)_P$ として, P が f の極でないとき $t^e = f - a$ で, P が f の極のとき $t^e = 1/f$ なるものが取れる.

問 22 超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ (f は重根をもたない) に関して, $P_a = (a, *) \in C$ $(a \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1)$ における局所助変数を与えよ. また, 座標函数 x, y をその局所助変数で展開するにはどのようにすればよいか.

(c) 特異点にしろ無限遠点にしろ, 適当なアフィン近傍を取って考えればよい.

m, n を 2 以上の整数とする. k の標数は 0 であったので, m も n も標数で割り切れない. アフィン平面曲線

$$C : y^m = x^n\, f_0(x) \qquad (f_0(x) \in k(x),\ f_0(0) \neq 0,\, \infty)$$

を考える. $P = (0, 0) \in C$ は特異点である. 特異点 $P \in C$ の近傍の様子を知るには, P を除いた近傍を非特異なものに貼りかえればよい. 最も簡単な場合として n が m の倍数のときには, 定義方程式を $(y/x^{n/m})^m = f_0(x)$ と変形できる. $v = y/x^{n/m}$ と置けば, C は P に対応する点で非特異なアフィン平面曲線 $C' : v^m = f_0(x)$ に双有理同値になる. C と C' で x-座標函数は共通なので, P に対応する C' の点は x-座標函数の値が 0 の点になる. このとき v-座標函数の値は $f_0(0)$ の m 乗根だけ現れるので, P に対応する C' の点は丁度 m 個である.

次に易しい $n \equiv 1 \mod m$ のとき, 定義方程式は $(y/x^*)^m = x\, f_0(x)$ と書ける. C は P に対応する点で非特異な $C' : v^m = x\, f_0(x)$ に双有理同値である. この場合も C と C' で x-座標函数は共通なので, P に対応する C' の点は x-座標函数の値が 0 の点になる. v-座標函数の値は 0 なので, P に対応する C' の点は唯一つである.

これら 2 つの場合, C の特異点 P を解消した代数曲線 C' において, 定理 3.10 を有理函数 x に対して使うことができる. P に対応する非特異点での局所助変数 $t \in k(C)_P$ として, 最初の例では $t = x$, 次の例では

$t^m = x$ なるものが取れる. 座標函数 v を局所助変数 t で展開すると, 最初の例では $v = \sqrt[m]{f_0(t)} \in k[[t]]$, 次の例では $v = t\sqrt[m]{f_0(t^m)} \in k[[t]]$ と展開される. $\sqrt[m]{f_0(t^*)}$ は二項展開により t のベキ級数に表すことは簡単で, m 乗根の選び方により m 通りの展開をもつ. $t=0$ での v の値は, 最初の例では $f_0(t)$ の m 乗根の選び方に従って m 個現れ, 次の例では $f_0(t^m)$ の m 乗根の取り方によらず値は 0 である. $P \in C$ に対応する C' の非特異点が, 最初の例では m 個, 次の例ではただ 1 個であったことを, 函数体の言葉で述べたものになっている.

(d) 特異点 $P \in C$ における函数体の解析を特異点解消を経ずに行う. 局所環 $k[C]_P$ の整閉包における極大イデアルごとに, 函数体の完備化と一意化元としての局所助変数が定まる. 結局のところ, 函数体のベキ級数体への稠密な埋め込みを与えればよい. 函数体 $k(C)$ は座標函数 x, y で生成される体で, P での局所環 $k[C]_P$ は, k 上 x, y で生成される環である. $a\,m + b\,n = d$ ($d = \gcd(m, n)$, $a, b \in \mathbb{Z}$) とし $t = x^a\,y^b \in k(C)$ とおく.

$$\begin{aligned} t^m &= (x^a\,y^b)^m = x^{am}\,y^{bm} = x^{am}\,(x^n\,f_0(x))^b = x^{am+bn}\,f_0(x)^b = x^d\,f_0(x)^b \\ t^n &= (x^a\,y^b)^n = x^{an}\,y^{bn} = (y^m/f_0(x))^a\,y^{bn} = y^{am+bn}\,f_0(x)^{-a} = y^d\,f_0(x)^{-a} \end{aligned}$$

従って t は $k[C]_P$ 上整である. $f_0(0) \neq 0, \infty$ なので, 二項展開により $\sqrt[d]{f_0(x)} \in k[[x]]^\times$ となる.

$$t^{m/d} = x\,\sqrt[d]{f_0(x)}^{\,b}\,, \quad t^{n/d} = y\,\zeta\,\sqrt[d]{f_0(x)}^{\,-a} \qquad (\text{ただし } \zeta^d = 1 \text{ とする})$$

と書けるので $x, y \in k[[t]]$ を得る. 座標函数が t で展開されたので, 埋め込み $k(C) = k(x, y) \hookrightarrow k((t))$ が定まる. 完備離散付値体 $k((t))$ の素元 t は $k(C)$ に属するので $k(C)$ は $k((t))$ で稠密である. 稠密な埋め込み $k(C) \hookrightarrow k((t))$ は, y を展開する際に現れた d 乗根 ζ の選び方に依存し, 丁度 d 個現れる. このそれぞれが, 局所環の整閉包における極大イデアルに対応し, C の非特異完備化における P の上の点に対応する. 以上まとめて

定理 3.12 m, n を 2 以上の整数とする. $a\,m + b\,n = d$ ($d = \gcd(m, n)$, $a, b \in \mathbb{Z}$) とし $t = x^a\,y^b \in k(C)$ とおく. このとき t は $P = (0, 0) \in C$ での局所助変数で $\mathrm{ord}_P(x) = m/d$, $\mathrm{ord}_P(y) = n/d$ となる. t による y の展開は丁度 d 通りあり, それぞれに対して函数体のベキ級数体への稠密な埋め込みが定まる. このことは, 非特異完備化により P が局所的に同相な丁度 d 個の非特異点に分かれることを意味する.

問 23 $m, p, q \geq 2$ で $\gcd(m, p, q) = 1$ とする. アフィン平面曲線 $y^m = x^p\,(1-x)^q$ の特異点を求め, 各特異点での局所助変数を与えよ. また, 各特異点での座標函数 x, y の位数を計算し, 非特異完備化したときに幾つの非特異点に分かれるか調べよ.

問 24 超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ (f は重根をもたない) の射影閉包において, 無限遠点の局所助変数を定理 3.12 に従って与えよ. また §2.6 (e) で与えた非特異完備化 $\hat{C} = C \cup C_0$ において, C の無限遠点の局所助変数を与えよ.

問 25 代数曲線 $C : y^d = f(x)$ ($f \in k[x]$, $d \in \mathbb{N}$) の射影閉包を $\overline{C}$ とおく. $P \in \overline{C}$ の局所助変数を与えよ.

§3.4 分岐被覆

(a) 非特異完備代数曲線の非定数有理写像 $\varphi : \tilde{C} \to C$ は全射正則写像である. $\varphi : \tilde{C} \to C$ を**分岐被覆** (branched covering) あるいは単に**被覆** (covering) という. φ を**被覆写像** (covering map) といい, $\tilde{C}$ を**被覆曲線** (covering curve), C を**基礎曲線** (base curve) という. 写像度 $\deg\varphi$ を**被覆次数** (covering degree) あるいは**葉数**という. φ が分離的 ($k(\tilde{C})/\varphi^*k(C)$ が分離拡大) のとき, $\tilde{C}$ は C を重複を込めて $\deg\varphi$ 重に覆っている. φ が分岐点をもたないとき**不分岐被覆** (unbranched covering) という. 被覆 $\varphi : \tilde{C} \to C$ が不分岐であるための必要十分条件は, C のすべての点の上に丁度 $\deg\varphi$ 個ずつ $\tilde{C}$ の点があることである. このとき $\tilde{C}$ は C を丁度 $\deg\varphi$ 重に覆う.

(b) 非特異完備代数曲線 C から自分自身への同型写像を C の**自己同型写像** (automorphism) という．それら全体のなす群を**自己同型群**といい $\mathrm{Aut}(C)$ で表す． 被覆 $\varphi : \tilde{C} \to C$ に対して, $\tilde{C}$ の自己同型 σ で $\varphi \circ \sigma = \varphi$ となるものを φ の**被覆変換** (covering transformation) という．それら全体のなす $\mathrm{Aut}(\tilde{C})$ の部分群を φ の**被覆変換群** (covering transformation gruop) といい G_φ で表す．G_φ は有限群で, その位数は $\deg\varphi$ を超えない. $\sharp G_\varphi = \deg\varphi$ となる被覆 φ を **Galois 被覆**といい, G_φ をその **Galois 群**という.

命題 3.13 $\varphi : \tilde{C} \to C$ が Galois 被覆であることと, 函数体の拡大 $k(\tilde{C})/\varphi^* k(C)$ が Galois 拡大であることとは同値である．更にこのとき G_φ は $\mathrm{Gal}(k(\tilde{C})/\varphi^* \bar{k}(C))$ に同型である.

$\varphi : \tilde{C} \to C$ を Galois 被覆とする．$Q \in C$ の上のすべての点 $P \in \tilde{C}$ で分岐指数 $e_\varphi(P)$ は等しいので, $e_\varphi(Q) = e_\varphi(P)$ を Q での分岐指数とよぶ. 分岐指数は写像度 $\deg\varphi$ の約数になる.

定理 3.14 C を非特異完備代数曲線とし, G を有限群とする．このとき Galois 被覆 $\varphi : \tilde{C} \to C$ で $G_\varphi \simeq G$ となるものが存在する.

問 26 代数体の Galois 拡大における Hilbert の理論を, Galois 被覆に対して考えてみよ. (分解群, 惰性群, 分岐群にあたるものを定義してみよ.)

問 27 $\varphi : \tilde{C} \to C$ を Galois 被覆とする．被覆曲線 $\tilde{C}$ の有理函数 $\tilde{h}$ が Galois 不変 (G_f 不変 : $\forall\sigma \in G_f$ に対して $\sigma^* \tilde{h} = \tilde{h}$) なら, 基礎曲線 C の有理函数 h で $\varphi^* h = \tilde{h}$ となるものが存在することを示せ.

(c) C を非特異完備代数曲線とする． 定数でない有理函数の写像度 (被覆 $C \to \mathbb{P}^1$ の葉数) の最小値 $d = \mathrm{gon}\,(C)$ を C の**最小被覆葉数** (gonality) という．このとき C を d-gonal 曲線という．最小被覆葉数は射影直線 $\mathbb{P}^1$ の被覆としての最小の被覆次数なので, 1-gonal 曲線は射影直線と同型である．C が射影直線の 2 次の被覆であるとき, **超楕円的** (hyperelliptic) という．2-gonal 曲線を**超楕円曲線** (hyperelliptic curve) という．正確には (後で定義する) 種数も勘案し, 種数が 0 の非特異射影曲線を**有理曲線**, 種数が 1 の非特異射影. 曲線を**楕円曲線** (elliptic curve) といい, 種数が 2 以上の 2-gonal 曲線を**超楕円曲線**という．Riemann-Roch の定理の応用で述べるが, 有理曲線は 1-goanl になる (射影直線と同型になる) ので, 2-gonal 曲線の種数は 1 以上である．2-gonal 曲線 C について, $\varphi : C \to \mathbb{P}^1$ を葉数 2 の被覆 (有理函数) とする．函数体 $k(C)$ は有理函数体 $k(\mathbb{P}^1)$ の 2 次 (Galois) 拡大なので, 2 次の被覆は Galois 被覆になる．G_φ の生成元 $\iota : C \to C$ を C の**超楕円対合** (hyperelliptic involution) という.

C を位数 2 の自己同型 ι をもつ非特異射影曲線とする．ι は函数体 $k(C)$ の位数 2 の自己同型写像を引き起こす．その不変体 K に対応する非特異射影曲線を C' とすると, 2 次 Galois 被覆 $C \to C'$ が定まる．K が有理函数体であったなら C' として $\mathbb{P}^1$ がとれ, C は 2-gonal 曲線となる.

§3.5 Riemann 面と Riemann-Hurwitz の公式

(a) $k = \mathbb{C}$ 複素数体の場合を考える．連結な複素 1 次元複素多様体 R を **Riemann 面**という．コンパクトな Riemann 面を**閉 Riemann 面**, コンパクトでない Riemann 面を**開 Riemann 面**という．単位開円板や複素平面 $\mathbb{C}$, 複素上半平面は開 Riemann 面で, Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ や複素トーラス $T = \mathbb{C}/\Lambda$ ($\Lambda \subset \mathbb{C}$ は格子) は閉 Riemann 面である．Riemann 面は向きづけ可能な実 2 次元実解析的多様体で, 距離づけ可能で第二加算公理を満たすので, 三角形分割可能である．Riemann 面の三角形分割における単体の個数の交代和を **Euler 標数**といい $\chi(R)$ と書く．閉 Riemann 面は幾つか穴の開いた閉じた曲面に位相同相である．位相不変量である穴の個数を, 閉 Riemann 面 R の**種数** (genus) といい $g(R)$ と書く.

(b) $\mathbb{C}$ で定義された非特異完備代数曲線 R は, 連結かつコンパクトな複素 1 次元複素多様体, すなわち閉 Riemann 面である．閉 Riemann 面としての種数を R の**種数**といい $g(R)$ で表す．また Euler 標数を $\chi(R)$ で表す．複素射影直線は複素平面 $\mathbb{C}$ を 2 枚貼り合わせた Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ なので, 種数は 0 である.

命題 3.15 (1) 閉 Riemann 面 $\hat{\mathbb{C}}$ の種数は 0 で, Euler 標数は 2 である.
(2) 複素トーラスの種数は 1 で, Euler 標数は 0 である.

閉曲面の 1 次整係数ホモロジー群の階数 (1 次 Betti 数 $b_1(R)$) は, 種数の 2 倍に等しい. 1 次元複素多様体 R 上の正則微分全体なす複素線形空間の次元は, 種数に等しい. Euler 標数は Betti 数の交代和に等しく,

定理 3.16 $\chi(R) = 2 - 2\,g(R)$

(c) Riemann 面の全射正則写像 $\pi : \tilde{R} \to R$ を**被覆**という. π を**被覆写像**, $\tilde{R}$ を**被覆面**, R を**基礎面**という. $Q \in R$ に対して, $\pi(P) = Q$ なる $P \in \tilde{R}$ を Q の上にある点という. Q の局所円板 (U, φ) ($U \subset R$ は Q の開近傍, $\varphi : U \to \mathbb{C}$ は埋め込み) と, P の開円板 $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ を適当に選んで, $\varphi \circ \pi \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z) = z^{e_P}$ と表すことができる. この自然数 e_P を P における π の**重複度** (multiplicity) あるいは**分岐指数**という. $e_P > 1$ となるとき P を π の**分岐点**とよぶ. 被覆 π が分岐点をもたないとき, φ は**不分岐**であるという. 分岐点の全体は高々加算個の孤立点からなる集合である. $\tilde{R}$ が閉 Riemann 面ならば R も閉 Riemann 面で, 分岐点の個数は有限である. $Q \in R$ の上にある点の個数は有界になるが, より詳しく $Q \in R$ の上にある点の重複度の和は一定である. その数 n_π を R 上の $\tilde{R}$ の**葉数**という.

定理 3.17 (Riemann-Hurwitz) $\chi(\tilde{R}) = n_\pi\, \chi(R) - \sum_{P \in \tilde{R}} (e_P - 1)$

系 3.18 (1) 被覆 $\pi : R \to \hat{\mathbb{C}}$ の葉数が 2 なら, 分岐点の個数は $4 - \chi(R)$ 個である.
(2) 被覆 $\pi : \tilde{R} \to R$ の葉数が 2 以上なら, $\chi(\tilde{R}) \le \chi(R)$ である. $\chi(R)$ が負なら, $\chi(\tilde{R}) < \chi(R)$ である.
(3) 葉数が 2 以上の $\hat{\mathbb{C}}$ の被覆は, 少なくとも 2 点で分岐する.

問 28 すべての分岐点を頂点に含む, 基礎面の三角形分割を, 被覆面の三角形分割に持ち上げることで, Riemann-Hurwitz の公式を示せ. 更にその系 3.18 を示せ.

問 29 $m, p, q \ge 2$ で $\gcd(m, p, q) = 1$ とする. アフィン平面曲線 $C/\mathbb{C} : y^m = x^p\,(1-x)^q$ の非特異完備化を $\hat{C}$ とおく. C の座標函数 x を $\hat{C}$ に延ばした有理函数を再び $x : \hat{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ と書く. 次の問いに答えよ.
(1) $x^*\mathbb{C}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{C}(x)$ を示し, 函数体の拡大次数 $[\mathbb{C}(\hat{C}) : \mathbb{C}(x)]$ を求めよ.
(2) 任意の $a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して $\sum_{P \in x^{-1}(a)} e_x(P) = m$ となることを確かめよ.
(3) 分岐被覆 x の分岐点と分岐指数を求めよ.
(4) $\chi(\hat{C})$ (あるいは $\hat{C}$ の種数) を m, p, q で表せ.
(5) $\chi(\hat{C}) = 2$ (あるいは $g(\hat{C}) = 0$) となる m, p, q を求めよ.
(6) $\chi(\hat{C}) = 0$ (あるいは $g(\hat{C}) = 1$) となる m, p, q を求めよ.

§4 Riemann-Roch の定理

§4.1 因子・因子類

(a) C を代数曲線とする. C のすべての点で生成された自由アーベル群を**因子群** (divisor group) といい $\mathrm{Div}(C)$ と書く. $\mathrm{Div}(C)$ の元を**因子**という. 因子 D は C の有限個の点の $\mathbb{Z}$-係数の形式和

$$D = n_1\, P_1 + \cdots + n_m\, P_m \quad (P_1, \cdots, P_m \text{ は相異なる点})$$

で表される. 係数 $n_1, \cdots, n_m$ が 0 でないとき, 上を因子 D の**被約表示**という. また, すべての C の点を渡る和

$$D = \sum_{P \in C} n_P\, P \quad (n_P \in \mathbb{Z} \text{ で, 有限個の } P \text{ を除いて } n_P = 0)$$

で表すこともできる. $n_P \neq 0$ となる $P \in C$ 全体の集合を D の**台** (support) といい $\mathrm{supp}(D)$ と書く. 因子群の零元はすべての係数が 0 の因子で 0 と書く. $\mathrm{supp}(0)$ は空集合である. 因子 D の係数の和 $\deg(D) = \sum n_P$ を因子 D の**次数**という. $\deg : \mathrm{Div}(C) \to \mathbb{Z}$ は準同型写像で, その核を $\mathrm{Div}^0(C)$ とおく. $P \in C$ に対して $\nu_P : \mathrm{Div}(C) \ni D \longmapsto n_P \in \mathbb{Z}$ とおくと, ν_P も準同型写像である. すべての $P \in C$ に対して $\nu_P(D) \geq 0$ となる因子 D を**整因子** (positeve (or effective) divisor) といい $D \geq 0$ と書く. D_0 を因子 D の**零因子** (zero divisor) といい, D_∞ を**極因子** (polar divisor) という.

(b) C を非特異完備代数曲線とする. C の零でない有理函数 $f \in k(C)^\times$ に対して,

$$\mathrm{div}(f) = \sum_P \mathrm{ord}_P(f)\, P$$

を f の**因子**という. 位数が正の項のみ集めた $\mathrm{div}(f)_0$ を f の**零因子**といい, 位数が負の項のみ集めて符号を変えた $\mathrm{div}(f)_\infty$ を f の**極因子**という. ord_P は加法的付値なので,

$$\mathrm{div} : k(C)^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(C)$$

は準同型写像である. 函数の因子の次数は 0 なので, div の像は $\mathrm{Div}^0(C)$ に含まれる. 因子が 0 の函数は, 零点も極ももたないので, 非零定数函数である. div の核は $k^\times$ に等しい.

有理函数の因子を**主因子** (principal divisor) という. 主因子全体のなす群を**主因子群**といい $\mathrm{Div}^\ell(C)$ と書く. 因子 D_1, D_2 の差が主因子になるとき, D_1 と D_2 は**線形同値** (linearly equivalent) といい, $D_1 \sim D_2$ と書く. $\sim$ は因子全体の上に同値関係を定める. $\sim$ に関する因子の同値類を**因子類** (divisor class) という. 因子 D の属する因子類を $[D]$ と書く. 因子類全体のなす群 $\mathrm{Pic}(C) = \mathrm{Div}(C)/\mathrm{Div}^\ell(C)$ を C の**因子類群** (divisor class group) または **Picard 群**という. 主因子は次数が 0 なので因子類にも自然に次数を定義できる. 次数が 0 の因子類全体のなす群を $\mathrm{Pic}^0(C)$ と書く. 次の完全列を得る.

$$1 \longrightarrow k^\times \longrightarrow k(C)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}^0(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \longrightarrow 0$$

参考までに, 代数体 K における次の完全列との比較すれば, 因子類群は函数体のイデアル類群と言える.

$$1 \longrightarrow O_K^\times \longrightarrow K^\times \longrightarrow I_K \longrightarrow C_K = I_K/P_K \longrightarrow 0$$

因子は (分数) イデアル, 整因子は整イデアル, 主因子は単項イデアルに対応する. 代数体のイデアルは有限生成 (有限個の $K^\times$ の元で生成される) であることに対応して, 整因子は有限個の有理函数の共通零点で表すことができる. 特に 2-gonal 曲線 (楕円曲線, 超楕円曲線) は 2 次体に対応するので, 任意の整因子は 2 個の有理函数の共通零点で表すことができる. 代数曲線の点は代数函数体における加法的離散付値を定め, 代数体の素イデアルもまた代数体における加法的離散付値を定める. **素点**という意味から, 代数曲線の点は代数体の素イデアルに対応する. 本来, 代数多様体の (非特異) 点は座標環の極大イデアルに対応するべきものであるが, 代数閉体上定義された 1 次元の代数曲線の場合には座標環の自明でない素イデアルは極大イデアルになる. 代数体の整数環においても同様である. 以上をひと言でいえば, 非特異代数曲線の座標環も有限次代数体の整数環も **Dedekind 整域**である.

問 30 主因子の全体は因子群の部分群をなすこと, 線形同値は因子群の加法を保つ同値関係を定めることを示せ.

問 31 超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$ (f は重根をもたない) について, 有理函数 x, y, $x - a$, $f'(x)$ の因子を求めよ.

(c) $\varphi : C_1 \to C_2$ を非特異完備代数曲線の間の非定数有理写像とする.

$$C_2 \ni Q \longmapsto \varphi^*(Q) = \sum_{\varphi(P)=Q} e_\varphi(P)\, P \in \mathrm{Div}(C_1)$$

を, $\mathrm{Div}(C_2)$ へ線形に拡張したものを $\varphi^* : \mathrm{Div}(D_2) \to \mathrm{Div}(D_1)$ とおく. また

$$C_1 \ni P \longmapsto \varphi_*(P) = \varphi(P) \in C_2$$

を線形に拡張したものを $\varphi_* : \mathrm{Div}(C_1) \to \mathrm{Div}(C_2)$ とおく.

命題 4.1 非特異完備代数曲線 C の有理函数 f を有理写像 $f: C \to \mathbb{P}^1$ と思うと, f の零因子は $\mathrm{div}(f)_0 = f^*(0)$ で極因子は $\mathrm{div}(f)_\infty = f^*(\infty)$ に等しい. よって $\mathrm{div}(f) = f^*(0-\infty)$ である.

命題 4.2 $\varphi: C_1 \to C_2$ を非特異完備代数曲線の非定数有理写像とする. $D_j \in \mathrm{Div}(C_j)$, $f_j \in k(C_j)^\times$ に対して,

(1) $\deg(\varphi^* D_2) = (\deg\varphi)(\deg(D_2))$ (2) $\varphi^*\mathrm{div}(f_2) = \mathrm{div}(\varphi^* f_2)$

(3) $\deg(\varphi_* D_1) = \deg D_1$ (4) $\varphi_*\mathrm{div}(f_1) = \mathrm{div}(\varphi_* f_1)$

(5) $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$, $(\psi\circ\varphi)_* = \psi_*\circ\varphi_*$ (6) $\varphi_*\circ\varphi^* = \deg\varphi$

定理 4.3 非特異完備代数曲線の非定数有理写像 $\varphi: C_1 \to C_2$ は, 因子類群の準同型写像 $\varphi^*: \mathrm{Pic}^0(C_2) \to \mathrm{Pic}^0(C_1)$ と, $\varphi_*: \mathrm{Pic}^0(C_1) \to \mathrm{Pic}^0(C_2)$ を引き起こす. また $\varphi_*\circ\varphi^*: \mathrm{Pic}^0(C_2) \to \mathrm{Pic}^0(C_2)$ は $\deg(\varphi)$ 倍写像になる.

問 32 命題 4.2 を示せ.

§4.2 局所微分

(a) C を非特異完備代数曲線とする. 函数体の $P \in C$ での完備化 $k(C)_P$ は, P での局所助変数 $t \in k(C)_P$ をとって $k(C)_P = k((t))$ と展開できる. $f = \sum a_i t^i \in k(C)_P$ に対して, 通常のベキ級数の微分 $df/dt = \sum i\, a_i\, t^{i-1}$ を f の t に関する微分という. 微分の線形性や, 積の微分の公式などが成り立つ. $P \in C$ の別の局所助変数 t' に関する f の微分 df/dt' も定義され, 合成関数の微分により $df/dt = (df/dt')(dt'/dt)$ が成り立つ.

(b) $k(C)_P$ の元の組 $(g, f), (g', f')$ が $g\,df/dt = g'\,df'/dt$ を満たすとき, $(g, f) \underset{P}{\sim} (g', f')$ と定義する. $\underset{P}{\sim}$ は ${k(C)_P}^2$ の同値関係をなす. (g, f) で代表される同値類を**局所微分**といい, $(g\,df)_P$ で表す. 局所微分 $(g\,df)_P$ と $h \in k(C)_P$ の積を $f(g\,df)_P = (h\,g\,df)_P$ で定義することができる. ここで

$$(g\,df)_P = (g\,df/dt)\,(dt)_P\ ,\quad g\,df/dt \in k(C)_P$$

となるので, 局所微分の全体は $k(C)_P\,(dt)_P$ に等しい.

定理 4.4 P での局所微分の全体は, $(dt)_P$ で生成される 1 次元 $k(C)_P$ 線形空間をなす.

(c) P の局所助変数 t, t' について $\mathrm{ord}_P(dt'/dt) = 0$ なので, $\mathrm{ord}_P(g\,df/dt)$ は局所助変数の取り方によらない. $\mathrm{ord}_P((g\,df)_P) = \mathrm{ord}_P(g\,df/dt)$ を局所微分の**位数**という. 位数が非負のとき, $(g\,df)_P$ は P で**正則**という. 位数が正のとき P を $(g\,df)_P$ の**零点**, 位数が負のとき P を $(g\,df)_P$ の**極**という. 局所微分 $(g\,df)_P$ の t での展開

$$(g\,df)_P = (g\,df/dt)\,(dt)_P = (\textstyle\sum a_i\,t^i)\,(dt)_P$$

を考える. t^{-1} の展開係数を**留数** (residue) といい $\mathrm{Res}_P((g\,df)_P)$ で表す.

定理 4.5 留数の定義は, 局所助変数 t の取り方によらない.

問 33 上の定理を示せ.

(d) 分離的非零有理函数 $f \in k(C)^\times$ をとり P での局所微分 $(df)_P$ を考える. P の分岐指数 $e = e_f(P)$ が k の標数で割れない (野性的分岐でない) とする. 定理 3.10 より, P での局所助変数 $t_P \in k(C)_P$ で $t_P^e = f^* u_a$ $(a = f(P) \in \mathbb{P}^1)$ なるものが取れる. u_a は $\mathbb{P}^1$ における a での局所助変数で, $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ のアフィン座標 z をとり, $a \in \mathbb{A}^1$ のとき $u_a = z - a$ とおき, $a = \infty$ のとき $u_\infty = 1/z$ とおいた.

$$f = \begin{cases} a + t^e & (a \in \mathbb{A}^1) \\ t^{-e} & (a = \infty) \end{cases} \qquad (df)_P = df/dt\,(dt)_P = \begin{cases} e\,t^{e-1}\,(dt)_P & (a \in \mathbb{A}^1) \\ -e\,t^{-e-1}\,(dt)_P & (a = \infty) \end{cases}$$

定理 4.6　f を分離的非零有理函数とし, P での分岐指数 e は k の標数で割れないとする．このとき $df \neq 0$ で, $(df)_P$ の P での位数は, P が f の極なら $-e-1$ に, 極でないなら $e-1$ に等しい.

問 34　k の標数が 2 でないとする．超楕円曲線 $C : y^2 = f(x)$　(f は重根をもたない) をとる．$P \in C$ において $\mathrm{ord}_P(dx)$, $\mathrm{ord}_P(dy)$ を計算せよ.

§4.3　微分

(a)　C の函数体 $k(C)$ の 2 元の組 (g, f), (g', f') が同値 $(g, f) \sim (g', f')$ であるとは, すべての $P \in C$ に対して局所微分が一致する $((g\,df)_P = (g'\,df)_P)$ ときをいう．(g, f) で代表される同値類を $g\,df$ で表し, C の**微分**という．C の微分の全体を Ω_C とおく．$h \in k(C)$ に対し, $h\,(g\,df) = hg\,df$ で微分と有理函数の積が定義される．すべての P に対して $(g\,df)_P = 0$ のとき $g\,df$ を零微分といい 0 で表す.

定理 4.7　$x \in k(C)$ とする．$dx \neq 0$ となるための必要十分条件は, x が $k(C)$ の分離元 ($k(C)/k(x)$ が分離拡大) となることである．更にこのとき, すべての $P \in C$ に対して局所微分 $(dx)_P$ は零ではない.

定理 4.8　$dx \neq 0$ なる $x \in k(C)$ をとる．このとき C のすべての微分は $y\,dx$ $(y \in k(C))$ なる形に一意的に表される．従って, 微分の全体 Ω_C は 1 次元 $k(C)$ 線形空間をなす.

(b)　$\varphi : C_1 \to C_2$ を非特異完備代数曲線の非定数有理写像とする.

$$\varphi^* : \Omega_{C_2} \ni g\,df \longmapsto \varphi^*(g\,df) = \varphi^*g\,d(\varphi^*f) \in \Omega_{C_1}$$

は k-線形写像である．$k(C_1)$ の部分体としての $k(C_2)$ を係数とする線形空間の線形写像ということもできる．どちらの意味においても,

定理 4.9　$\varphi : C_1 \to C_2$ が分離的ならば, 線形写像 $\varphi^* : \Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1}$ は単射である.

(c)　$y\,dx$ を C の微分とする．$P \in C$ における局所微分 $(y\,dx)_P$ の留数 $\mathrm{Res}_P((y\,dx)_P)$ を $y\,dx$ の P での**留数**といい, $\mathrm{Res}_P(y\,dx)$ と書く.

定理 4.10 (留数定理)　微分 $y\,dx$ の留数は, 有限個の P を除いて 0 である．更に留数の総和は 0 に等しい.

$$\sum_P \mathrm{Res}_P(y\,dx) = 0$$

(d)　$y\,dx$ を代数曲線 C の微分とする．$P \in C$ における局所微分 $(y\,dx)_P$ の位数 $\mathrm{ord}_P((y\,dx)_P)$ を $y\,dx$ の P での**位数**といい, $\mathrm{ord}_P(y\,dx)$ と書く．位数が正のとき P を $y\,dx$ の**零点**, 位数が負のとき P を $y\,dx$ の**極**という．$\mathrm{div}(y\,dx) = \sum_P \mathrm{ord}_P(y\,dx)\,P$ は, 次の定理より C の因子となる．**微分因子**あるいは**標準因子** (canonical divisor) という．定理 4.8 より, 微分因子の全体はひとつの因子類をなす．これを**微分因子類**あるいは**標準因子類**という．極をもたない (C のすべての点で正則な) 微分を**第一種微分**あるいは**正則微分**という．唯一つの点でのみ極をもつ微分を**第二種微分**という．相異なる 2 点でのみ 1 位の極をもつ微分を**第三種微分**という．零微分も第一種微分である．第一種微分 (正則微分) の全体は, k 線形空間をなす．留数定理より, 第二種微分は唯一つの極の位数が丁度 1 位のものは存在しない．微分が丁度 1 位の極をもつためには, 少なくとも 2 点以上で極をもつ必要がある．以下の 3 つの定理は, Riemann-Roch の定理の応用として得られる (§5.2) ものであるが, ここにまとめておく.

定理 4.11　(1)　任意の $P \in C$ と $m \geq 2$ に対して, P で丁度 m 位の極をもつ第二種微分 ω_{mP} が存在する.

(2)　P で高々 m 位の極をもつ第二種微分の全体は, 第一種微分と $\omega_{2P}, \cdots, \omega_{mP}$ の一次結合で表される.

定理 4.12 (1) $P, Q \in C$ で 1 位の極をもち, P, Q での留数がそれぞれ 1, -1 の第三種微分 ω_{PQ} が存在する.

(2) $P, Q \in C$ で高々 1 位の極をもつ第三種微分の全体は, 第一種微分と ω_{PQ} の一次結合で表される.

定理 4.13 代数曲線の零でない微分において, 零点と極の個数は高々有限個である.

(e) 野性的分岐をもたない分離元 $x \in k(C)$ をとる. 定理 4.6 より C のすべての点で, 微分 dx $(\neq 0)$ の位数が計算できる. 有理函数 (写像) が野性的分岐をもたないことを調べるのは面倒に思えるかもしれないが, k の標数が 0 ならすべての有理函数 (写像) は野性的分岐をもたないし, 有理函数 (写像) の写像度が k の標数より小さい場合も野性的分岐をもたないことを注意しておく. 有理函数としての x の極を $Q_1, \cdots, Q_s$ とし, その位数をそれぞれ e'_1 $(= -\mathrm{ord}_{Q_1}(x)), \cdots, e'_s$ とおく. 分岐被覆 $x : C \to \mathbb{P}^1$ の, 極を除く分岐点を $P_1, \cdots, P_r$ とし, 分岐指数をそれぞれ $e_1, \cdots, e_r$ とする. 極の位数はその点での分岐指数に等しいので, 2 位以上の極は分岐点でもある.

命題 4.14 $\mathrm{div}(dx) = \sum_j (e_j - 1) P_j - \sum_i (e'_i + 1) Q_i$ 従って, $\deg \mathrm{div}(dx) = \sum_j (e_j - 1) - \sum_i (e'_i + 1)$

全く同じものであるが, 少し書き換えてみる.

命題 4.15 $\mathrm{div}(dx) = \sum (e_x(P) - 1)\, P - 2\,(x)_\infty$ 従って, $\deg \mathrm{div}(dx) = \sum (e_x(P) - 1) - 2 \deg x$

§4.4 射影直線の微分

射影直線 $\mathbb{P}^1$ のアフィン部分直線 $\mathbb{A}^1$ のアフィン座標 z は函数体 $k(\mathbb{P}^1)$ を生成する. z の極は $\infty \in \mathbb{P}^1$ のみで, 位数は 1 である. 1 次被覆 $z : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ は分岐点をもたない. 特に野性的分岐をもたないので, 命題 4.14 (4.15) より,

$$\mathrm{div}(dz) = -2\,\infty$$

となる. 標準因子の次数は -2 なので, $\mathbb{P}^1$ は零以外に正則な微分 (第一種微分) をもたない. また dz の極は ∞ のみなので dz は第二種微分である. 命題 4.14 より, 分離的な有理函数 f から得られる微分 df の極での位数は -2 以下なので, 第三種微分はこの形では得られない. $z \in k(C)$ は ∞ で 1 位の極をもつ. 任意の $a \in \mathbb{A}^1$ に対して $\mathrm{div}(z - a) = a - \infty$ となる. 従って

$$\mathrm{div}(dz/(z-a)) = \mathrm{div}(dz) - \mathrm{div}(z-a) = -2\,\infty - (a - \infty) = -\infty - a$$

となる. 微分 $dz/(z-a)$ は a, ∞ で 1 位の極をもつ第三種微分である. ∞ の局所助変数 $w = 1/z$ で

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{1}{1/w - a}\,\frac{d(1/w)}{dw}\,dw = \frac{w}{1-aw}\,(-w^{-2})\,dw = (-w^{-1} - a - a^2\,w - a^3\,w^2 - \cdots)\,dw$$

より, ∞ での $dz/(z-a)$ の留数は -1 である. a の局所助変数 $t = z - a$ で展開して

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{1}{t}\,\frac{d(t+a)}{dt}\,dt = t^{-1}\,dt$$

a での $dz/(z-a)$ の留数は 1 である. 以上まとめて,

命題 4.16 (1) 射影直線 $\mathbb{P}^1$ の標準因子の次数は -2 である. 特に $\mathbb{P}^1$ は零でない第一種微分をもたない.

(2) $a \in \mathbb{P}^1$ をとる. $x \in k(\mathbb{P}^1)$ を a を ∞ に移す一次分数変換とする. このとき a でのみ極をもつ第二種微分の全体は dx の $k[x]$ 倍 $(k[x]\,dx)$ に等しい.

(3) 2 点 $a, b \in \mathbb{P}^1$ をとる. $x \in k(\mathbb{P}^1)$ を a を ∞ に b を 0 に移す一次分数変換とする. このとき a と b でのみ 1 位の極をもつ第三種微分は dx/x の定数倍で表される. また $\mathrm{Res}_a(dx/x) = -1$, $\mathrm{Res}_b(dx/x) = 1$ である.

問 35 z を射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$ のアフィン座標とする. 多項式 $f \in k[z] \subset k(x) = k(\mathbb{P}^1)$ に関して, df, $d(\frac{1}{f})$, $\frac{dz}{f}$ を第一種微分, 第二種微分, 第三種微分の和で表せ.

§4.5 $L(D)$ と種数

(a) 非特異完備代数曲線 C の因子 D に対して, 函数体 $k(C)$ の部分集合

$$L(D) = \{f \in k(C)^{\times} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

を考える. $f \in L(D)$ とすると, $P \in C$ に対して $\mathrm{ord}_P(f) + \nu_P(D) \geq 0$ なので $\mathrm{ord}_P(f) \geq -\nu_P(D)$ となる. f は $\nu_P(D) > 0$ となる点 P でのみ, 位数が $\nu_P(D)$ を超えない極をもつ. また $\nu_P(D) < 0$ なら f は P で少なくとも $\nu_P(D)$ 位の零をもたなくてはならない. 例えば $D = P$ のとき, $L(P)$ は P でのみ高々 1 位の極をもつ有理函数の全体で, $L(2\,P)$ は P でのみ高々 2 位の極をもつ有理函数の全体, $L(P-Q)$ は P でのみ高々 1 位の極をもち Q で少なくとも 1 位の零点をもつ有理函数の全体で, $L(P-2Q)$ は P でのみ高々 1 位の極をもち Q で少なくとも 2 位の零点をもつ有理函数の全体である. 函数の因子の次数は 0 なので, 最後のもの ($L(P-2Q)$) に含まれる有理函数は 0 に限る. $L(P-2Q) = 0$ となる. また $L(P-Q)$ に含まれる函数の因子は $Q - P$ に限るので, $L(P-Q)$ に含まれる有理函数の比は定数になる. $L(P-Q)$ の次元は 1 を超えない. 定数函数はすべての点で正則なので $L(P)$ に含まれる. $f \in L(P) \setminus k$ が存在するなら, f は P の外で正則で, P で 1 位の極をもつので, f の写像度は 1 である. 従って f は C から $\mathbb{P}^1$ への同型写像となる.

命題 4.17 $L(P) \supsetneqq k$ なる $P \in C$ が存在するなら, $C \simeq \mathbb{P}^1$ である.

命題 4.18 (1) $L(D)$ は k 線形空間をなす.
 (2) $\deg(D) < 0$ のとき $L(D) = \{0\}$ である.
 (3) $L(0) = k$ である. 従って $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ ($f, g \in k(C)$) ならば $g = c\,f$ ($c \in k$) となる.
 (4) $D_1 \leq D_2$ ならば $L(D_1) \subset L(D_2)$ である.
 (5) $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$ ($f \in k(C)$) ならば $L(D_2) \ni g \longmapsto g\,f \in L(D_1)$ は k 線形空間の同型写像である.
 (6) 商空間 $L(D+P)/L(D)$ は k 線形空間として高々 1 次元である.

定理 4.19 $L(D)$ は有限次元 k 線形空間である.

k 線形空間 $L(D)$ の次元を $\ell(D)$ とおく. 命題 4.18 より $\deg(D) < 0$ のとき $\ell(D) = 0$ である. $\ell(0) = 1$ で, $\ell(D+P) \leq \ell(D) + 1$ が成り立つ. また $\deg(D) = 0$ のとき $\ell(D) \leq 1$ であるが, D が主因子のとき $\ell(D) = 1$ で, そうでないなら $\ell(D) = 0$ である.

定理 4.20 C を非特異完備代数曲線とする. すべての因子 D において $\deg D - \ell(D)$ は上に有界である.

問 36 命題 4.18, 定理 4.19, 定理 4.20 を示せ.

(b) C の微分 ω をとり, C の標準因子のひとつとして $K_C = \mathrm{div}(\omega)$ とおく. 因子 D に対して, 微分の全体 Ω_C の部分集合 $\Omega_C(D) = \{\omega \in \Omega_C \setminus \{0\} \mid \mathrm{div}(\omega) \geq D\} \cup \{0\}$ をとる.

定理 4.21 $L(K_C - D) \ni f \longmapsto f\omega \in \Omega_C(D)$ は k 線形空間の同型写像である.

系 4.22 $\Omega_C(D)$ は有限次元 k 線形空間で, その次元は $\ell(K_C - D)$ に等しい.

第一種微分 (正則微分) 全体のなす k 線形空間 $\Omega_C(0)$ は, 標準因子 K_C の取り方によらず, $L(K_C)$ と同型である. このことからも, すべての標準因子は線形同値で, 微分の全体が 1 次元 $k(C)$ 線形空間をなすことがわかる. $P \in C$ で $m \geq 0$ 位の極をもつ第二種微分の全体 $\Omega_C(-m\,P)$ は $L(K_C + m\,P)$ と同型なので, P でのみ極をもつ第三種微分の全体 $\cup_m \Omega_C(-m\,P)$ は $\cup_m L(K_C + m\,P)$ に同型である. $P, Q \in C$ で高々 1 位の極をもつ第三種微分の全体 $\Omega_C(-P-Q)$ は $L(K_C + P + Q)$ に同型である.

問 37 $\ell(K_C + P) = \ell(K_C)$, $\ell(K_C + P + Q) \leq \ell(K_C) + 1$ となることを示せ.

(c) 第一種微分全体のなす k 線形空間 $\Omega_C(0)$ の次元 $(\ell(K_C))$ を C の**種数** (genus) といい $g(C)$ と書く. $k = \mathbb{C}$ とするとき, ここでの種数 (第一種微分全体の次元) は, 向きづけ可能な閉曲面の位相不変量であるところの穴の個数に一致する. また 命題 4.16 (1) より,

命題 4.23 射影直線の種数は 0 である.

(d) 種数は別の手続きによって定義されることがある. 定理 4.20 より $\deg(D) - \ell(D) + 1$ は上に有界なので, その最大値 g' を C の**種数**という. $r(D) = g' - (\deg(D) - \ell(D) + 1)$ を因子 D の**特異指数**といい, $r(D) = 0$ となる因子を**正常因子**という.

定理 4.24 自然数 m を適当に取れば, $\deg(D) \geq m$ なる任意の因子 D は正常因子となる.

正常因子において $\ell(D) = \deg(D) - g' + 1$ となるので, $L(D)$ の次元 $\ell(D)$ が簡単な式で与えられる. ここでの種数 g' と, 第一種微分全体の次元としての種数 $g(C)$ の関係を見ることは容易ではない. 次節の Riemann-Roch の定理により, 両者が等しい $(g' = g(C))$ ことが示される.

問 38 射影直線の任意の整因子 D に対して $\ell(D) = \deg D + 1$ であることを示せ. 従って, ここでの種数の定義でも, 射影直線の種数は 0 である.

§4.6 Riemann-Roch の定理

定理 4.25 (Riemann-Roch) C を非特異完備代数曲線, K_C を標準因子とする. 次を満たす定数 g が存在する.

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg D - g + 1 \qquad (D \text{ は } C \text{ の任意の因子})$$

系 4.26 (1) $\ell(D) \geq \deg D - g + 1$

(2) $\ell(K_C) = g$

(3) $\deg K_C = 2g - 2$

(4) $\deg D > 2g - 2$ ならば, $\ell(D) = \deg D - g + 1$

系 (2) より定理の g は, 第一種微分全体のなす k 線形空間の次元に等しい. 系 (1) より $\deg D - \ell(D) + 1$ は有界で g を超えず, (4) より $\deg D - \ell(D) + 1 = g$ なる因子 D がある. つまり g は $\deg D - \ell(D) + 1$ の最大値にも等しい. Riemann-Roch の定理の定数 g は C の種数であり, §4.5 (c), (d) で定義した種数は同じ値になることがわかった. また, 系 (4) より定理 4.24 は $m = 2\,g(C) - 1$ に対して成り立つ.

問 39 Riemann-Roch の定理を使って, 系 4.26 を示せ.

問 40 (1) $\ell(D) > 0$ ならば $\deg D \geq 0$ である. さらに $\deg D = 0$ ならば D は主因子である.

(2) $\deg D = 2\,g - 2$ で $\ell(D) \geq g$ ならば D は標準因子である.

(3) $\ell(D) > 0$ で $\ell(K_C - D) > 0$ ならば $\ell(D) - 1 \leq \deg D/2$ である. (Cliford の定理)

§4.7 Riemann-Hurwitz の公式

(a) $\varphi : C_1 \to C_2$ を非特異完備代数曲線の間の分離的な非定数有理写像とする. 線形写像 $\varphi^* : \Omega_{C_2} \to \Omega_{C_1}$ は単射である. $P \in C_1$ を取り, $Q = \varphi(P) \in C_2$ とおく. Q での局所助変数 u_Q の微分 du_Q の引き戻しを, P での局所助変数 t_P と有理函数 f で $\varphi^* du_Q = f\,dt_P$ と表す. $m_\varphi(P) = \mathrm{ord}_P(f)$ を P での φ の**微分指数** (differntial exponent) という. 微分指数は局所助変数 u_Q, t_P に依らない. 因子 $\sum_P m(P)\,P$ を φ の**分岐因子** (ramification divisor) という.

定理 4.27 (1) C_2 の微分 ω に対して, $\mathrm{ord}_P(\varphi^*\omega) \geq e_\varphi(P)\,\mathrm{ord}_Q(\omega) + m_\varphi(P)$ が成り立つ.

(2) P での分岐が野性的なら $m_\varphi(P) \geq e_\varphi(P)$ で, 不分岐または順な分岐のなら $m_\varphi(P) = e_\varphi(P) - 1$ である.

系 4.28 (1) C_2 の第一種微分 ω に対して $\varphi^*\omega$ も C_1 の第一種微分である. 従って $g(C_1) \geq g(C_2)$ が成り立つ.

(2) $C_1 \simeq C_2$ なら $g(C_1) = g(C_2)$ である.

(b) §3 で Riemann 面に関する Riemann-Hurwitz の公式に触れた. 三角形分割を被覆写像で持ち上げることで, Euler 標数の関係式としての Riemann-Hurwitz の公式が得た. Euler 標数が種数で表されるので, Riemann-Hurwitz の公式は種数の関係式に書き換えることもできる. 一般の体における代数曲線の場合, 微分を被覆写像で持ち上げる (定理 4.27) ことで, 標準因子の次数の関係式が得られる. 標準因子の次数を種数で表す (系 4.26 (3)) ことで, Riemann 面のときと全く同じ, 種数の関係式としての Riemann-Hurwitz の公式が得られる.

定理 4.29 (Riemann-Hurwitz) $\varphi : C_1 \to C_2$ を非特異完備代数曲線の分離的な非定数有理写像とする.

$$2\,g(C_1) - 2 \;=\; (2\,g(C_2) - 2)\,\deg\varphi + \sum_{P \in C_1} m_\varphi(P)$$

系 4.30 φ が同型写像でないとき, $g(C_1) \geq g(C_2)$ である. 特に $g(C_2) \geq 2$ のとき $g(C_1) > g(C_2)$ である.

問 41 Riemann-Hurwitz の公式を示せ.

問 42 C を種数が 2 以上の非特異完備代数曲線とする. 有理写像 $\varphi : C \to C$ が, 任意の第一種微分 ω について $\varphi^*\omega = \omega$ となるとき, $\varphi = \mathrm{id}$ であることを示せ.

問 43 自然数 d が k の標数で割り切れないとする. 代数曲線 $C : y^d = f(x)$ (の非特異完備化) の種数を求めよ.

問 44 k の標数が 2 でも 3 でもないとする. 代数曲線 $C : y^2 = x^3 + a\,x + b$ が特異点をもたないとする. 分岐被覆 $x : C \to \mathbb{P}^1$ と $y : C \to \mathbb{P}^1$ に対して Riemann-Hurwitz の公式を使って, C の種数が 1 であることを確かめよ.

§5 Riemann-Roch の定理の応用

§5.1 因子類群と基準写像

(a) C を種数 g の非特異完備代数曲線とする. C の因子 D の属する因子類を $[D]$ で表す. $P_\infty \in C$ に対して,

$$\Phi_{P_\infty} : C \ni P \longmapsto [P - P_\infty] \in \mathrm{Pic}^0(C)$$

を P_∞ を基点とする**基準写像** (canonical map) という. d を正の整数とし, $\mathrm{Sym}^g(C)$ を C の点の d 次の対称積 $C^d/\mathfrak{S}_d$ とする. 次数 d の整因子は対称積 $\mathrm{Sym}^d(C)$ の元と思える. この意味で, d 次対称積 $\mathrm{Sym}^d(C)$ は次数 d の整因子の全体に等しい. 次数 d の因子 D_∞ をとる.

$$\Phi_{D_\infty} : \mathrm{Sym}^d(C) \ni D \longmapsto [D - D_\infty] \in \mathrm{Pic}^0(C)$$

を D_∞ を基点とする**基準写像**という. Riemann-Roch の定理を使って, 次を示す.

定理 5.1 (1) $g=0$ ならば, $\mathrm{Div}^0(C)=\mathrm{Div}^\ell(C)$, $\mathrm{Pic}^0(C)=0$ である.
(2) $g\geq 1$ のとき, $\Phi_{P_\infty}: C\to \mathrm{Pic}^0(C)$ は単射である.
(3) $g\geq 1$ のとき, 次数 g の任意の因子 D_∞ に対して $\Phi_{D_\infty}: \mathrm{Sym}^g(C)\to \mathrm{Pic}^0(C)$ は全射である.

(b) 種数 $g=0$ のとき, 次数が -1 以上の因子 D に対して $\ell(D)=\deg(D)-g+1=\deg(D)+1$ が成り立つ. 次数が 0 の因子 $D\in\mathrm{Div}^0(C)$ に対して, $\ell(-D)=0+1=1>0$ より, 零でない有理函数 $f\in L(-D)$ が取れる. $\mathrm{div}(f)+(-D)\geq 0$ より $\mathrm{div}(f)\geq D$ となる. 両者の次数は 0 なので $\mathrm{div}(f)=D$ を得る. 従って D は主因子である. $\mathrm{Div}^0(C)=\mathrm{Div}^\ell(C)$ なので $\mathrm{Pic}^0(C)=0$ である.

(c) $\Phi_{P_\infty}(P)=\Phi_{P_\infty}(Q)$ なる $P,Q\in C$ をとる. $[P-Q]=[P-P_\infty]-[Q-P_\infty]=\Phi_{P_\infty}(P)-\Phi_{P_\infty}(Q)=0$ より, $\mathrm{div}(f)=P-Q$ となる有理函数 $f\in k(C)^\times$ が存在する. f の極因子は Q なので $f\in L(Q)$ となる. 命題 4.17 より $L(Q)=k$ なので, f は定数函数である. $\mathrm{div}(f)=0$ なので $P=Q$ となる. つまり Φ_{P_∞} は単射である.

(d) D_∞ を次数が g の因子とする. 任意の $D\in\mathrm{Div}^0(C)$ に対して,

$$\ell(D_\infty+D)\geq \deg(D_\infty+D)-g+1=g-g+1$$

となるので, 零でない $f\in L(D_\infty+D)$ が存在する. $D_0=\mathrm{div}(f)+(D_\infty+D)$ は次数が g の整因子なので, $D_0\in\mathrm{Sym}^g(C)$ である. $\Phi_{D_\infty}(D_0)=[D_0-D_\infty]=[\mathrm{div}(f)+D_\infty+D-D_\infty]=[D]$ より, $\Phi_{D_\infty}: \mathrm{Sym}^g(C)\to\mathrm{Pic}^0(C)$ は全射である.

§5.2 第一種, 第二種, 第三種微分

(a) C を種数 g の非特異完備代数曲線とする. C の種数は, 第一種微分全体のなすは有限次元 k 線形空間の次元で定義した. 第二種微分, 第三種微分に関する定理 4.11, 4.12 を証明し, 定理 4.13 の成り立つことを確かめる. $k(C)$ の分離元 x をとり, $K_C=\mathrm{div}(dx)$ とおく.

(b) $P\in C$ で $m\geq 1$ 位の極をもつ第二種微分の全体 $\Omega(-m\,P)$ は, $L(K_C+m\,P)\ni y\longmapsto y\,dx\in\Omega(-m\,P)$ より, $L(K_C+m\,P)$ と同型である.

$$\ell(K_C+m\,P)=\deg(K_C+m\,P)-g+1=2g-2+m-g+1=g+m-1$$

なので, $m\geq 2$ とするとき, $\ell(K_C+m\,P)>\ell(K_C+(m-1)\,P)$ より有理函数 $y_m\in L(K_C+m\,P)\smallsetminus L(K_C+(m-1)P)$ が取れる. 微分 $y_m\,dx$ は P で丁度 m 位の極をもつ第二種微分である.

(c) $P,Q\in C$ でのみ高々 1 位の極をもつ第三種微分の全体 $\Omega_C(-P-Q)$ は, $L(K_C+P+Q)\ni y\longmapsto y\,dx\in\Omega_C(-P-Q)$ より, $L(K_C+P+Q)$ と同型である.

$$\ell(K_C+P+Q)=\deg(K_C+P+Q)-g+1=2g-g+1=g+1>g=\ell(K_C)$$

なので, 有理函数 $y_{PQ}\in L(K_C+P+Q)\smallsetminus L(K_C)$ が取れる. 微分 $y_{PQ}\,dx$ は P,Q で丁度 1 位の極をもつ第三種微分で, 適当に定数倍することで, P での留数を 1 に取れる. 留数定理より Q での留数が -1 になるので, $y_{PQ}\,dx$ は P,Q でそれぞれ留数が $1,-1$ の第三種微分である.

(d) ω を C の任意の微分とする. ω の因子 $\mathrm{div}(\omega)$ の極に現れる点 $P\in C$ とし, その位数を $m=-\mathrm{ord}_P(\omega)$ とする. t を P での局所助変数とする. 定理 4.12 の第二種微分 ω_{jP} は T^{-j} の項から始まる Laurent 級数に展開される. $b_2,\cdots,b_m\in k$ を適当に選んで, $\omega-(b_m\,\omega_{mP}+\cdots+b_2\,\omega_{2P})$ の Laurent 級数展開の t^{-m} の項から t^{-2} の項までを打ち消すように取れる. このとき ω' は P で高々 1 位の極をもつ. これを繰り返して, $\omega'=\omega-($第二種微分の有限和$)$ の極 $P_1,\cdots,P_r$ がすべて 1 位の極とすることができる. P_j における ω' の留数を c_j とおく. 留数定理より $c_1+\cdots+c_r=0$ である. P_j,P_r においてそれぞれ留数 $1,-1$ をもつ第三

種微分を ω_j とし, $\omega'' = \omega' - (c_1\,\omega_1 + \cdots + c_{r-1}\,\omega_{r-1})$ とおく. ω'' は $P_1, \cdots, P_{r-1}$ での留数が 0 なので, $P_1, \cdots, P_{r-1}$ で正則である. P_r での留数も $c_1 + \cdots + c_r = 0$ なので, P_r でも正則である. ω'' は第一種微分である.

§5.3 種数 0 の代数曲線

(a) C を種数 0 の非特異完備代数曲線とする. すべての因子 D に対して $\ell(D) = \deg D + 1$ が成り立つ. $P_\infty \in C$ をとる. $\ell(P_\infty) = 2 > \ell(0) = 1$ より $x \in L(P_\infty) \setminus k$ なる非定数有理函数 x が取れる. x の極因子は P_∞ なので, $\deg(x) = 1$ である. $x : C \to \mathbb{P}^1$ は同型写像になるので $C \simeq \mathbb{P}^1$ である.

(b) x^2 の極因子は $2\,P_\infty$ なので, $L(2\,P_\infty)$ に属する. $\ell(2\,P_\infty) = 3$ より, $L(2\,P_\infty)$ は $1, x, x^2$ を基底にもつ. 同様にして $L(m\,P_\infty)$ は m 次以下の x の多項式の全体に等しい. 従って $\cup_{m\geq 0} L(m\,P_\infty) = k[x]$ が成り立つ.

$a \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ に対して, $x(P_a) = a$ なる $P_a \in C$ をとる. $x(P_\infty) = \infty$ なので, 記号 P_a は $a \in \mathbb{P}^1$ に対して定まる. $a \mapsto P_a$ は同型写像 $x : C \simeq \mathbb{P}^1$ の逆写像にあたるので, $C = \{P_a \,|\, a \in \mathbb{P}^1\}$ である. $x(P_0) = 0$ より P_0 は x の零点である. $\mathrm{div}(x) = P_0 - P_\infty$ なので特に $1/x \in L(P_0)$ である. また $(x-a)(P_a) = x(P_a) - a = 0$ で $x - a \in L(P_\infty)$ なので, $\mathrm{div}(x-a) = P_a - P_\infty$ となる. $1/(x-a) \in L(P_a)$ を得る.

$a \in \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$ に対して $t_a = x - a$ は P_a で 1 位の零点をもつので P_a の局所助変数である. $a = \infty$ のとき $t_a = 1/x$ は P_∞ の局所序変数である. $a \in \mathbb{A}^1$ に対して $u_a = t_a = x - a$ をおき, $a = \infty$ に対して $u_a = 1$ とおく. このとき $a, b \in \mathbb{P}^1$ に対して, $\mathrm{div}(u_b/u_a) = P_b - P_a$ が成り立つ.

有理函数 $f \in k(C)$ をとる. $\mathrm{div}(f) = P_{b_1} + \cdots + P_{b_r} - P_{a_1} - \cdots - P_{a_r}$ と書く. 有理函数 $f_0 = u_{b_1} \cdots u_{b_r}/u_{a_1} \cdots u_{a_r}$ の因子は $\mathrm{div}(f)$ に等しいので f は f_0 の定数倍である. $k(C) = k(x)$ を得る.

(c) C の自己同型写像は, 函数体 $k(C) = k(x)$ の自己同型写像を引き起こす. $k(x)$ の自己同型写像は一次分数変換で表せるので, 結局 $\mathrm{Aut}(C) \simeq \mathrm{Aut}(k(x)/k) \simeq \mathrm{PSL}_2(k)$ が成り立つ.

簡単のため $k = \mathbb{C}$ とする. $\sigma : x \longmapsto 1/x$, $\tau : x \longmapsto (x-1)/x$ によって生成される $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の部分群は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ に同型である. $\mathbb{C}(C) = \mathbb{C}(x)$ における $\mathfrak{S}_3$ の固定体を $K = \mathbb{C}(x)^{\mathfrak{S}_3}$ とおく. K に対応する代数曲線を C_0 とおくと, C_0 の函数体を K に対応させる写像度 6 の有理写像 $C \to C_0$ がとれる. 従って C_0 の種数も 0 でなければならない. $u = x + \tau^* x + \tau^{*2} x \in k(x)$ をとる. u は τ の作用で不変なので $u \in \mathbb{C}(x)^{\langle\tau\rangle}$ となる. $[\mathbb{C}(x) : \mathbb{C}(u)] = 3$ なので $\mathbb{C}(x)^{\langle\tau\rangle} = \mathbb{C}(u)$ となる. $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(u)(x)$ と思うと, x は $\mathbb{C}(u)$ 係数の 3 次多項式

$$X^3 - u\,X^2 + (u-3)\,X + 1 = 0$$

の根となる. この方程式は Shanks の最単純 3 次巡回方程式と呼ばれるもので, 3 次巡回拡大の生成的方程式系である. $u + \sigma^* u$, $u\,\sigma^* u$ は $\mathfrak{S}_3$-不変なので $\mathbb{K} = \mathbb{C}(x)^{\mathfrak{S}_3}$ に属する. $u + \sigma^* u = 3$ (定数) だが, $w = u\,\sigma^* u$ は $\mathbb{C}$ 上超越的で $[\mathbb{C}(x) : \mathbb{C}(w)] = 6$ となる. 従って $\mathbb{K} = \mathbb{C}(w)$ をえる. $\mathbb{C}(x) = \mathbb{C}(w)(x)$ とみれば, x は $\mathbb{C}(w)$ 上

$$X^6 - 3\,X^5 + (w-3)\,X^4 - (2\,w - 11)\,X^3 + (w-3)\,X^2 - 3\,X + 1 = 0$$

で定義される. $\mathfrak{S}_3$-拡大に関する生成的方程式系である. u は $\mathbb{C}(w)$ 上 $U^2 - 3\,U + w = 0$ で定義され, $\mathbb{C}(u)$ 上の x の方程式から u にあたる部分を消去する (終結式を取ればよい) ことでも, 同じ 6 次方程式が得られる.

問 45 $\sigma : x \longmapsto 2/x$, $\tau : x \longmapsto 2\,(x-1)/x$ によって生成される $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の部分群は 4 次二面体群 D_4 に同型である. D_4-拡大 $\mathbb{C}(x)/\mathbb{C}(x)^{D_4}$ の定義方程式を求めよ.

問 46 射影直線 $\mathbb{P}^1$ の 4 点 $\{0, 1, -1, \infty\}$ を置換する一次分数変換全体のなす $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の部分群 G を求め, $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)^G$ の定義方程式を求めよ. G の指数 2 の部分群 H に対して $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)^H$ の定義方程式を求めよ.

§5.4　種数 1 の代数曲線

(a)　C を種数 1 の非特異完備代数曲線とし, $P_\infty \in C$ をとる. $\ell(0) = 1$, $\ell(n\,P_\infty) = n$ $(n \geq 1)$ となる. 従って, $L(0) = L(P_\infty) = k$ で $L(2\,P_\infty) \supsetneqq k$ である. $\ell(2\,P_\infty) = 2$ なので, 非定数有理函数 $x \in L(2\,P_\infty) \smallsetminus k$ が取れ $L(2\,P_\infty)$ は 1, x を基底にもつ. x の極因子は $2\,P_\infty$ に等しい.

$\ell(3\,P_\infty) = 3$ なので, $y \in L(3\,P_\infty) \smallsetminus L(2\,P_\infty)$ が取れ $L(3\,P_\infty)$ は 1, x, y を基底にもつ. y の極因子は $3\,P_\infty$ に等しい. x^2 の極因子は $4\,P_\infty$ なので, $L(4\,P_\infty)$ に含まれる函数として 1, x, y, x^2 が取れる. それぞれの極因子は 0, $2\,P_\infty$, $3\,P_\infty$, $4\,P_\infty$ なので k 上独立である. 1, x, y, x^2 は 4 次元 k 線形空間 $L(4\,P_\infty)$ の基底をなす. $L(5\,P_\infty)$ の基底として 1, x, y, x^2, $x\,y$ が取れ, $L(6\,P_\infty)$ の基底として 1, x, y, x^2, xy, x^3 が取れる. 以下同様にして, $\cup_{m \geq 0} L(m\,P_\infty) = k[x] + k[x]\,y$ となる.

(b)　y^2 の極因子は $6\,P_\infty$ なので $y^2 \in L(6\,P_\infty)$ である. 6 次元 k 線形空間 $L(6\,P_\infty)$ の基底は 1, x, x^2, x^3, y, xy なので, y^2 は それら基底の線形結合で表せる. 適当に並べ替えて $y^2 + a_1\,x\,y + a_3\,y = a_0\,x^3 + a_2\,x^2 + a_4\,x + a_6$ なる a_0, a_1, $\cdots$, $a_6 \in k$ が存在する. 両辺に現れる項で極因子が $6\,P_\infty$ となるのは y^2 と x^3 のみなので, x^3 の係数 a_0 は消えない. 有理函数 x, y は線形空間の基底として選んだものであったので, 適当に (0 でない) 定数倍して取り替えても構わない. x, y をともに a_0 倍すると, 上の線形関係式は x^3 の係数を 1 にすることができる.

(c)　C の有理函数 x, y の関係式に対応する, 3 次アフィン平面曲線

$$E : Y^2 + a_1\,X\,Y + a_3\,Y = X^3 + a_2\,X^2 + a_4\,X + a_6$$

をとる. 一般に, 上の形の方程式を **Weierstrass 方程式**という. 係数の取り方によれば特異点をもつ場合もあるが, 特異点をもたないとき E を Weierstrass 方程式で定義された**楕円曲線**という.

命題 5.2　(1)　C の有理函数 x, y の関係式で定義された E は特異点をもたない. つまり楕円曲線である.

(2)　有理写像 $\varphi : C \ni P \longmapsto (x(P), y(P)) \in E$ は, C から $\bar{E}$ (E の射影閉包) への同型を引き起こす. 従って, 定義方程式 $Y^2 + a_1\,X\,Y + a_3\,Y = X^3 + a_2\,X^2 + a_4\,X + a_6$ を C の (あるいは E の) **Weierstrass 標準形**という.

楕円曲線 E の函数体は座標函数 X, Y で生成される. 上の命題より C の函数体は E の函数体と同型で $\varphi^*X = x$, $\varphi^*Y = y$ なので, $k(C)$ は x, y で生成される. 以上のことをまとめると,

命題 5.3　C を種数が 1 の非特異完備代数曲線とする.

(1)　任意の $P_\infty \in C$ に対して, 極因子が $2\,P_\infty$ の有理函数 x と, $3\,P_\infty$ の有理函数 y が存在する.

(2)　$L(m\,P_\infty)$ の基底として 1, x, $\cdots$, $x^{[m/2]}$, y, xy, $\cdots$, $x^{[(m-3)/2]}y$ が取れる.

(3)　x, y を適当に定数倍して $y^2 + a_1\,x\,y + a_3\,y = x^3 + a_2\,x^2 + a_4\,x + a_6$ なる a_1, $\cdots$, $a_6 \in k$ が取れる.

(4)　C の函数体は k 上 x, y で生成される. つまり $k(C) = k(x, y)$ である.

§5.5　種数 1 の代数曲線の加法

(a)　基準写像 $\varPhi : C \ni P \longmapsto [P - P_\infty] \in \mathrm{Pic}^0(C)$ は, 定理 5.1 (2) より単射で, (3) より全射である. $\varPhi$ を通して, 因子類群 $\mathrm{Pic}^0(C)$ の群構造を C の上に展開することができる. $P, Q \in C$ に対して $\varPhi(P) + \varPhi(Q) = \varPhi(R)$ なる $R \in C$ が取れる. $P \oplus Q := R$ により C の上に演算 $\oplus$ が定義され, C は P_∞ を零元とする加法群の構造をもつ.

$D = P + Q - P_\infty$ とおく. $\deg(D) = 1$ なので $\ell(D) = 1$ である. 零でない $f \in L(D)$ が存在する. $\mathrm{div}(f) + D$ は次数 1 の整因子なので, $\mathrm{div}(f) + D = R$ $(R \in C)$ と書ける. $R - P_\infty \sim D - P_\infty \sim P + Q - 2P_\infty = P - P_\infty + Q - P_\infty$ より, $\varPhi(R) = \varPhi(P) + \varPhi(Q)$ が成り立つ. 加法 $\oplus$ を計算するには $L(P + Q - P_\infty)$ に属する函数を求めればよい.

(b) $L(P+Q-P_\infty)$ に属する函数は P, Q で高々 1 位の極をもつ函数の全体 $L(P+Q)$ に含まれる. $\ell(P+Q)=2$ なので, $L(P+Q)$ の基底となる函数をもとめ, P_∞ で零点となるように係数の組を連立方程式を解く要領で決めればよい. 適当に与えた P, Q に対して $L(P+Q)$ を計算するのは少しコツが要る. 加法の定義を少し見直して, $P\oplus Q=R$ なる R を求める少し異なった手続きを与える.

$x\in L(2P_\infty)\smallsetminus k$ は 2 次の Galois 被覆 $x:C\to\mathbb{P}^1$ である. Galois 群 G_x の生成元を ι とおく. $P\in C$ に対して $P'=\iota(P)$ と書くことにする. $P\in C$ $(P\neq P_\infty)$ とする. 有理函数 $x-x(P)$ は P を零点にもつ. $x(P')=x(P)$ なので P' も $x-x(P)$ の零点である. P が x の分岐点でない $(P'\neq P)$ とき, $\mathrm{div}(x-x(P))=P+P'-2P_\infty$ が成り立つ. P が x の分岐点のとき, P での分岐指数が 2 なので $x-x(P)$ は P で 2 位の零点となる. よって $\mathrm{div}(x-x(P))=2P-2P_\infty$ となる. どちらにせよ $\mathrm{div}(x-x(P))=P+P'-2P_\infty$ となる. $[P'-P_\infty]=-[P-P_\infty]$ なので $\Phi(P')=-\Phi(P)$ を得る. P が x の分岐点のとき $2\Phi(P)=0$ となる. $\Phi(P)+\Phi(Q)=\Phi(R)$ ということは, $\Phi(R')=-\Phi(R)$ なので $\Phi(P)+\Phi(Q)+\Phi(R')=0$ に同等である. このとき $P+Q+R'-3P_\infty\sim 0$ なので $f\in L(3P_\infty)$ で $\mathrm{div}(f)=P+Q+R'-3P_\infty$ となるものが取れる. $L(3P_\infty)$ の基底は $1, x, y$ なので f は x, y の 1 次式である. 同型 $C\simeq\bar{E}$ により C は射影平面に埋め込まれる. このとき x, y はアフィン座標系 X, Y に対応するので, x, y の 1 次方程式 $f=0$ は射影平面内の直線に対応する. この意味で $f=0$ は直線の方程式ということができ, f の零点 P, Q, R' は直線 $f=0$ の上の点といえる.

以上まとめる. $P, Q\in C$ とする. ℓ を P と Q を通る直線とする. $P=Q$ のときは ℓ として P での C の接線をとる. ℓ は C と P, Q, R で交わる. このとき $\Phi(P)+\Phi(Q)=\Phi(R')$ となるので, $P\oplus Q=R'$ である. ここで R' は $x(R')=x(R)$ なので, 直線 $x-x(R)=0$ と C との交点として計算できる.

(c) $x(P)\neq x(Q)$ の場合に $L(P+Q-P_\infty)$ を直接与えてみる. P', Q' を通る直線の方程式を $a+bx+cy=0$ とおくと, $\mathrm{div}(f)>P'+Q'-3P_\infty$ である.

$$\mathrm{div}\left(\frac{a+bx+cy}{(x-x(P))\,(x-x(Q))}\right)>P_\infty-P-Q$$

なので, $h=(a+bx+cy)/(x-x(P))(x-x(Q))\in L(P+Q-P_\infty)$ である. 実際 P が分岐点でないとき, P の局所助変数として $t=x-x(P)$ がとれる. 有理函数 h を t で展開すると

$$h=\frac{a+bx(P)+cy(P)}{x(P)-x(Q)}\,t^{-1}+\cdots$$

P が分岐点のとき, P の局所助変数として $t^2=x-x(P)$ がとれる. $y=y(P)+b_1t+\cdots$ と t で展開すると,

$$h=\frac{cb_1}{x(P)-x(Q)}\,t^{-1}+\cdots$$

どちらの場合も t^{-1} の係数は零でないので, h が P で丁度 1 位の極をもつが局所助変数で計算できる.

問 47 $x(P)=x(Q)$ となる P, Q のすべての組み合わせに対して, $L(P+Q-P_\infty)$ を求めよ.

問 48 基準写像の基点を取り替えることで, C の上に引き起こされる加法演算はどの様に変わるか.

(d) 基準写像の引き戻しにより定義される, 種数 1 の代数曲線上の加法演算は, 基準写像の基点の選び方によって演算としては異なる. 基点は加法の零元なので, 零元を指定することで種数 1 の代数曲線上に加法演算が定義される. これまで少し曖昧に使っていたが, 楕円曲線とは 1 次元アーベル多様体のことで, 種数 1 の代数曲線のことではない. 種数が 0 か 2 以上の代数曲線の上には, 有理写像としての加法演算が定義できないので, 1 次元アーベル多様体となりうる代数曲線は種数が 1 のものに限る. 種数 1 の代数曲線 E には $O\in E$ を零元とする加法演算が定義できるので, 組 (E, O) を**楕円曲線**という. E が Weierestrass 方程式で定義されるときに限り, 無限遠点 $O=[0:1:0]$ を零元とする加法演算を暗黙のうちに仮定し, 単に E を楕円曲線と呼ぶ.

§5.6 種数 1 の代数曲線の微分

(a) Riemann-Roch の定理, あるいは種数の定義より, 第一種微分が存在しその全体は 1 次元 k 線形空間をなす. 命題 5.2 で得た, Weierstrass 方程式で定義された楕円曲線 (種数 1 の非特異完備代数曲線) に対して, 第一種, 第二種, 第三種微分を具体的に微分を計算してみる.

$$E : y^2 + a_1\,x\,y + a_3\,y = x^3 + a_2\,x^2 + a_4\,x + a_6$$

とする. $x : E \to \mathbb{P}^1$ は 2 次 Galois 被覆で, Galois 群 G_x の生成元を ι とおく. 簡単のため $\iota(P) = P'$ と書く. $x \circ \iota = x$ なので $x(P') = x(P)$ が成り立つ. $y(P), y(P')$ は y の 2 次方程式 $y^2{+}a_1\,x(P)\,y{+}a_3\,y = x(P)^3{+}\cdots$ の 2 根になるので, $y(P) + y(P') = -a_1\,x(P) - a_3$ となる. $y(P') = -y(P) - a_1\,x(P) - a_3$ なので,

$$\iota : E \ni P = (x,\, y) \longmapsto P' = (x,\, -y - a_1\,x - a_3) \in E$$

と表せる. P が x の分岐点 ($P' = P$) となるとき, $y(P) = y(P')$ なので y の 2 次方程式 $y^2{+}a_1\,x(P)\,y{+}a_3\,y = x(P)^3 + \cdots$ が重根をもつときである. k の標数が 2 と異なるとき, 分岐点 P の x-座標は $(a_1\,x + a_3)^2 - 4(x^3 + a_2\,x^2 + a_4\,x + a_6) = 0$ の根で, y-座標は $y = -(a_1\,x(P) + a_3)/2$ で表される. k の標数が 2 のときは, 分岐点の x-座標は $a_1\,x + a_3 = 0$ を満たす. 以下簡単のため k の標数が 2 と異なるとする. 定義多項式の右辺の y の項を平方の形にまとめると, $(y\ \text{の式})^2 = (x\ \text{の 3 次多項式})$ と書ける. x の分岐点は, この右辺の 3 次方程式の根を x 座標とする 3 点 (P_1, P_2, P_3 とおく) と, $P_\infty = [0:1:0]$ である.

問 49 Riemann-Hurwitz の公式を使って, 2 次被覆 $x : E \to \mathbb{P}^1$ の分岐点の個数が, k の標数が 2 と異なるとき 4 個で, k の標数が 2 のとき 2 個であることを示せ.

(b) 暫く k の標数が 2 と異なる場合を考える. 有理函数 x の極は P_∞ のみで, その位数は 2 である. 被覆 $x : C \to \mathbb{P}^1$ の, 極以外の分岐点は P_1, P_2, P_3 の 3 点で分岐指数はすべて 2 である. §4.2, §4.3 に従って, E の微分 dx の因子を計算すると,

$$(dx) = P_1 + P_2 + P_3 - 3\,P_\infty$$

となる. 標準因子を直接計算することで, 種数が 1 の場合の $\deg \operatorname{div}(dx) = 0 = 2\,g(E) - 2$ が確かめられた.

さて, $y_0 = 2\,y + a_1\,x + a_3 \in L(3\,P_\infty)$ を考える. y_0 は E の定義方程式を y で偏微分したものであるが, E の定義方程式の y を含む項を平方の形にまとめたときに現れる項でもある. y_0 の零点は無限遠点を除く x の分岐点になるので, $\operatorname{div}(y_0) = P_1 + P_2 + P_3 - 3\,P_\infty$ である.

$\omega_E = dx/y_0$ とおく. ω_E を E の**不変微分**あるいは **Néron 微分**という.

$$\operatorname{div}(\omega_E) = \operatorname{div}(dx) - \operatorname{div}(y_0) = 0$$

なので, E の微分因子類は主因子類に等しい. ω_E は極をもたないので E の第一種微分である. 他の第一種微分 ω についても $\operatorname{div}(\omega) = 0$ なので, ω/ω_E は定数函数になる. E の第一種微分の全体は 1 次元 k 線形空間をなす.

$f \in k(E)^\times$ を取ると $\operatorname{div}(f\,\omega_E) = \operatorname{div}(f)$ である. P_∞ でのみ極をもつ第二種微分は, P_∞ でのみ極をもつ有理函数 f をとって $f\,\omega_E$ と表せる. P_∞ でのみ極をもつ有理函数の全体は $\cup_{m\geq 0} L(m\,P_\infty) = k[x] + k[x]\,y$ なので, P_∞ でのみ極をもつ第二種微分の全体は $(k[x] + k[x]\,y)\,\omega_E$ に等しい. 一般の $P \in E$ に対しても同様に P でのみ極をもつ有理函数の全体を求めればよい. $\ell(0) = \ell(P) = 1 < \ell(2\,P) = 2 < \ell(3\,P) = 3$ なので, P でのみ極をもつ有理函数 x_P, y_P で, それぞれの P での位数が丁度 2 と 3 のものが存在する. P_∞ のときと同様に, P でのみ極をもつ第二種微分の全体は $(k[x_P] + k[x_P]\,y_P)\,\omega_E$ となる.

$P, Q \in C$ ($P \neq Q$) で 1 位の極をもつ第三種微分は, $L(P + Q)$ に属する有理函数に ω_E をかければよい. $L(P + Q)$ は §5.5 (c) で作ってあるので, P, Q でのみ 1 位の極をもつ第三種微分の全体は $L(P + Q)\,\omega_E$ で表される. $\ell(P + Q) = 2$ なので, P, Q でのみ 1 位の極をもつ第三種微分の全体は k 線形空間として 2 次元である.

問 50 $P \neq P_\infty$ とする. $x_P = 1/(x - x(P)) \in L(2\,P)$, $y_P = (y_0 - y_0(P'))/(x - x(P))^2 \in L(3\,P)$ を示せ.

(c) k 標数が 3 と異なる (標数が 2 の場合も含む) とする. 写像度 3 の有理函数 y から微分 dy を考える. $x_0 = 3x^2 + 2a_2\,x + a_4 - a_1\,y$ (E の定義方程式を x で偏微分したもの) とおく. 上と同様にして

$\mathrm{div}(dy) = \mathrm{div}(x_0)$ が計算できる．従って dy/x_0 は第一種微分で，(標数が 2 でないとき) ω_E の定数倍である．実際には E の定義方程式の全微分を計算することで $dx/y_0 = dy/x_0$ が示される．標数が 2 のとき $\omega_E = dy/x_0$ で不変微分を定義することができる．

問 51　(1)　k の標数が 2, 3 と異なるとき $dx/y_0 = dy/x_0$ であることを確かめよ．

(2)　不変微分 ω_E は，E の加法に関して不変であることを示せ．

(d)　以上，E の微分についてまとめる．

命題 5.4　E を Weierstrass 方程式で定義された種数 1 の非特異完備代数曲線とする．

(1)　$dx/(2y + a_1 x + a_3)$, $dy/(3x^2 + 2a_2 x + a_4 - a_1 y)$ が E の微分として零でないなら，両者は等しい．

(2)　上の微分を ω_E とおく．このとき $\mathrm{div}(\omega_E) = 0$ である．

(3)　E の第一種微分の全体は $k\,\omega_E$ に等しい．特に第一種微分の全体は 1 次元 k 線形空間をなす．

(4)　x_P, y_P を $P \in E$ でのみ極をもつ有理函数で，それぞれの P での位数が丁度 2, 3 のものとする ($P = P_\infty$ のとき，$x_P = x$, $y_P = y$ と取れる)．このとき P における第二種微分の全体は $(k[x_P] + k[x_P]\,y_P)\,\omega_E$ に等しい．

(5)　$P, Q \in C$ $(P \neq Q)$ でのみ 1 位の極をもつ第三種微分の全体は $L(P+Q)\,\omega_E$ に等しい．特に P, Q でのみ高々 1 位の極をもつ第三種微分の全体は 2 次元 k 線形空間をなす．

§5.7　Weierstrass 点

(a)　C を種数 g の非特異代数曲線とし，$P \in C$ をとる．P の外で正則で，P で n 位の極をもつ函数の全体は $L(n\,P)$ なので，P でのみ極をもつ函数の全体は $\cup_n L(n\,P)$ で与えられる．P で丁度 n 位の極をもつ函数は，$L(n\,P) \setminus L((n-1)\,P)$ に属するので，$\ell(n\,P) > \ell((n-1)\,P)$ のときに限り存在する．種数 $g = 0$ のとき P で任意の位数の極をもつ函数が存在する．種数 $g = 1$ のとき，$n \geq 2$ に対して，P で丁度 n 位の極をもつ函数が存在する．

定理 5.5 (Weierstrass)　C を種数 g が 2 以上 $(g \geq 2)$ の非特異完備代数曲線とし，$P \in C$ とする．

(1)　P でのみ極をもつ有理函数が存在する．

(2)　g 個の異なる自然数 $n_1, \cdots, n_g$ があって，それらと異なる任意の自然数 n に対して，P の外で正則で，P で丁度 n 位の極をもつ有理函数が存在する．

(b)　$\ell((g+1)\,P) \geq g+1-g+1 = 2$ となる．$\ell((g+1)\,P) \geq 2$ なので，定数函数でない $f \in L((g+1)\,P)$ が存在する．f は極をもたねばならないが，f の極因子に台は P だけなので，f は P でのみ極をもつ．

(c)　P でのみ丁度 n 位の極をもつ有理函数は，$\ell(n\,P) > \ell((n-1)\,P)$ のとき存在し，$\ell(n\,P) = \ell((n-1)\,P)$ のとき存在しない．$\ell(n\,P) = n - g + 1$ $(n > 2g-2)$ なので，$n \geq 2g$ に対して $\ell(n\,P) > \ell((n-1)\,P)$ となる．P で丁度 n $(\geq 2g)$ 位の極をもつ有理函数が存在する．

$\ell((2g-1)\,P) = 2g-1-g+1 = g$ なので，

$$1 = \ell(0) \leq \ell(P) \leq \ell(2\,P) \leq \cdots \leq \ell((2g-2)\,P) \leq \ell((2g-1)\,P) = g$$

となる．隣り合う項の差 $\ell(n\,P) - \ell((n-1)\,P)$ は 0 か 1 なので，$2g-1$ 個の隣り合う項の差のうち $g-1$ 個が 1 で g 個が 0 である．$\ell(n\,P) = \ell((n-1)\,P)$ となる n を順に並べた $n_1, \cdots, n_g$ が，定理 5.5 (2) の自然数の組である．

(d)　$\ell(n\,P) = \ell((n-1)\,P)$ となる自然数 n を P の**空隙値** (gap value) といい，小さい順に並べた $\{n_1, \cdots, n_g\}$ $(n_1 < \cdots < n_g)$ を P の **空隙値列** (gap sequence) という．空隙値列は P に固有の数の

集合であるが, 殆どの場合 $\{1, \cdots, g\}$ になる. 空隙値列が $\{1, \cdots, g\}$ と異なる $P \in C$ を **Weierstrass 点**という. 種数 $g = 0$ のとき C のすべての点で空隙値列は空集合で, $g = 1$ のときすべての点で空隙値列は $\{1\}$ である. 種数が 0 か 1 の非特異完備代数曲線は Weierstrass 点をもたない. 以下 C の種数は 2 以上とする.

命題 5.6 C の Weierstrass 点は高々有限個である.

この命題は, 次の Hurwitz の定理でより定量的に示される. 不正確ではあるが, 直観的に Weierstrass 点が有限個であることを描いてみる. 全射な基準写像 $\Phi_{D_\infty} : \mathrm{Sym}^g(C) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ は, 殆どの点で 1 対 1 となる. 単射にならない所は, $\mathrm{Sym}^g(C)$ の (真に小さい) 部分多様体の有限和集合 ($\mathcal{E}$ とおく) で表せる. $\mathrm{Sym}^g(C)$ に C を対角に埋め込んだものを自然に C と同一視すると, Weierstrass 点は C と $\mathcal{E}$ の共通部分に含まれる. また Weierstrass 点でない点が存在するので C は $\mathcal{E}$ に含まれない. Bézout の定理の拡張により C と $\mathcal{E}$ の共通部分は有限集合になるので, Weierstrass 点は高々有限個である.

(e) 以下 k の標数は 0 とする. C の第一種微分全体のなす線形空間の基底 $\omega_1, \cdots, \omega_g$ に対して, **Wronski 行列** (Wronskian) $W(\omega_1, \cdots, \omega_g)$ を定義する. $P \in C$ の局所助変数 t をとり, $\omega_i = f_i\, dz$ と表す. $m = g(g+1)/2$ とおき, $f_i^{(j)}$ を f_i の t に関する j 階微分とする. $W(\omega_1, \cdots, \omega_g)_P = \det(f_i^{(j)})_{i,j}\, (dt)_P^m$ は m 重の局所微分 (局所微分の m 回テンソル積) として意味をもつ. ここで $W(\omega_1, \cdots, \omega_g) = (W(\omega_1, \cdots, \omega_g)_P)$ とおくと, 微分の Wronski 行列が m 重の微分 (微分の m 回テンソル積) として定義される. Wronski 行列 $W(\omega_1, \cdots, \omega_g)$ の因子を W_C とかき, **Weierstrass 因子**とよぶ.

命題 5.7 (1) Weierstrass 因子 W_C は第一種微分の基底の取り方によらない.

(2) $\deg(W_C) = g(g^2 - 1)$ で, $P \in C$ で $\nu_P(W_C) = n_1 + \cdots + n_g - m$ が成り立つ.

(3) W_C は整因子 ($W_C \geq 0$) で, その台集合は Weierstrass 点の全体に等しい.

系 5.8 種数が 2 以上なら Weierstrass 点が存在し, その個数は高々 $g(g^2-1)$ 個である. 個数が丁度 $g(g^2-1)$ 個のとき, 空隙値列はすべて $\{1, 2, \cdots, g-1, g+1\}$ である.

Weierstrass 点の個数の下限も具体的に与えることができる. 函数の積を考えることで, 自然数全体から空隙値列を除いた集合が自然数全体の部分半群になることがわかる. 空隙値は $2g$ より小さいので次の補題より, 空隙値の和は g^2 以下になる.

補題 5.9 $\mathbb{N} - \{n_1, \cdots, n_g\}$ $(1 \leq n_1 < \cdots < n_g < 2g)$ が加法について半群なら, $n_1 + \cdots + n_g \leq g^2$ が成り立つ.

さて Weierstrass 因子の P での位数 $\nu_P(W_C)$ は空隙値の和から $m = g(g+1)/2$ を引いたものであったので, $\nu_P(W_C) \leq g(g-1)/2$ となる. 従って, Weierstrass 点は少なくとも $2g+2$ 個存在する.

定理 5.10 (Hurwitz) Weierstrass 点の個数は $2g+2$ 個以上, $g(g^2-1)$ 個以下である.

殆どの代数曲線で Weierstrass 点の個数は最大値の $g(g^2-1)$ 個となり, 最小値の $2g+2$ 個になるのは超楕円曲線に限る. 種数 $g = 2$ のとき $2g+2 = 6$, $g(g^2-1) = 6$ なので, これらのことは種数が 2 の非特異完備代数曲線は超楕円曲線であることを示唆する. このことは Riemann-Roch の定理を使って, すぐ後で確かめる. (§5.12)

問 52 命題 5.7, 補題 5.9 を示せ.

§5.8 代数曲線の自己同型群

(a) C を種数 g (≥ 2) の非特異完備代数曲線とし, Weierstrass 点の個数を w とおく. C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ は, C から自分自身への同型写像全体のなす群である. 自己同型写像は Weierstrass 点の間の置換を引き起こす.

定理 5.11 k の標数が 2 と異なるとする. 超楕円曲線 C の Weierstrass 点を固定する自己同型写像は, 恒等写像か超楕円対合に限る.

定理 5.12 (Hurwitz) $2g+3$ 個以上の点を固定する自己同型写像 $\varphi : C \to C$ は恒等写像である.

系 5.13 群の準同型写像 $\mathrm{Aut}(C) \to \mathfrak{S}_w$ は, C が超楕円曲線でないとき単射である. C が超楕円曲線のとき, その核は超楕円対合の生成する位数 2 の部分群である.

定理 5.14 種数が 2 以上の非特異完備代数曲線の自己同型群は有限群である.

問 53 次の様にして定理 5.12 を示せ: f を定理 5.12 の自己同型写像とする. $P \in C$ に対して $h \in L((g+1)\,P) \smallsetminus k$ をとる. $h_0 = h - \varphi^* h$ の因子を計算し, $h_0 = 0$ であることを示せ. 従って $f(P) = P$ となることを示せ.

(b) C の自己同型写像は C の函数体 $k(C)$ の自己同型写像を引き起こすので, $\mathrm{Aut}(C)$ は自然に $k(C)$ に作用する. G を $\mathrm{Aut}(C)$ の位数 d の有限部分群とする. $k(C)$ における G-不変体 $k(C)^G$ は $k(C)/k$ の中間体で, $[k(C) : k(C)^G] = \sharp G < \infty$ となる. このとき $\varphi^*(C_G) = k(C)^G$ なる非特異完備代数曲線 C_G と有理写像 $\varphi : C \to C_G$ が存在する. C_G を G による C の**商代数曲線** (quotient curve) という. $\varphi : C \to C_G$ は Galois 群が G に等しい Galois 分岐被覆である. 分岐被覆 φ の分岐点を $P_1, \cdots, P_s \in C_G$ とする. φ は Galois 被覆なので, P_j の上の点における φ の分岐指数 (e_j とおく) はすべて等しく, e_j は φ の写像度 d の約数である. Riemann-Hurwitz の公式

$$2g - 2 \ \geq \ d\,(2\,g(C_G) - 2 + (1 - \frac{1}{e_1}) + \cdots + (1 - \frac{1}{e_s}))$$

を得る. k の標数が 0 ならば, 野性的分岐が現れないので上は常に等号が成り立つ. このとき, 与えられた種数 g (≥ 2) に対して $g(C_G)$, $e_1, \cdots, e_s$ の不定方程式と思って解くと, 自己同型群の上限が得られる.

定理 5.15 (Hurwitz) k の標数は 0 とする. $g \geq 2$ のとき, 自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ の位数は $84\,(g-1)$ を超えない.

問 54 k の標数は 0 とする. 自己同型群の位数は, $84\,(g-1)$, $48\,(g-1)$, $40\,(g-1)$, $\cdots$ となることを示せ. (注) すべての可能性を計算する必要はない. 上記のものを与える分岐指数の組を求め, 可能であれば, 被覆写像を具体的に表して C の定義方程式を与えてみよ.

問 55 k の標数は 0 とする. C の種数が 2 ならば, 自己同型群の位数は 48 を超えないことを示せ. (上の演習問題を考慮すれば, 位数が 84 にならないことを示せばよい)

§5.9 超楕円曲線

(a) 種数 g (≥ 2) の非特異完備代数曲線 C で $\mathbb{P}^1$ への 2 次の分離的被覆 (写像度が 2 の分離的有理函数) をもつものを**超楕円曲線**という. $x : C \to \mathbb{P}^1$ を 2 次の分離的被覆とする. x は C の有理函数であるがその極因子を D とおく. D は 2 次の整因子なので $\ell(D) \leq 2$ である. $L(D)$ は一次独立な有理函数 $1, x$ を含むので, $\ell(D) = 2$ で $1, x$ が基底となる. $m \geq g$ のとき $\ell(m\,D) = \deg(m\,D) - g + 1 = 2m - g + 1$ なので, 特に $\ell(g\,D) = g + 1$ となる. $x^m \in L(m\,D) \smallsetminus L((m-1)\,D)$ $(m \geq 1)$ なので,

$$\ell(0) = 1 < \ell(D) = 2 < \ell(2\,D) < \ell(3\,D) < \cdots < \ell((g-1)\,D) < \ell(g\,D) = g + 1$$

となる. 従って $1 \leq m \leq g$ に対して $\ell(m\,D) = m + 1$ となり $L(m\,D)$ は m 次以下の x の多項式全体に等しい. $\ell((g+1)\,D) = g + 3 = \ell(g\,D) + 2$ なので, $L((g+1)\,D)$ には $g+1$ 次以下の x の多項式全体とは一次独立な有理函数 $y \in L((g+1)\,D)$ がとれる. 以上より,

命題 5.16 $L(m\,D) = \begin{cases} k + k\,x + \cdots + k\,x^m & (1 \leq m \leq g) \\ k + k\,x + \cdots + k\,x^m + k\,y + k\,xy + + \cdots + k\,x^{m-g-1}y & (m \geq g+1) \end{cases}$

さてここで y^2 の極因子は $2(g+1)\,D$ を超えないので $y^2 \in L(2(g+1)\,D)$ となる. $g+1$ 次以下の多項式 $a_1 \in k[x]$ と $2g+2$ 次以下の多項式 $a_2 \in k[x]$ で $y^2 + a_1(x)\,y + a_2(x) = 0$ とかける.

定理 5.17 C は, $C_0 : y^2 + a_1(x)\,y + a_2(x) = 0$ で定義されるアフィン平面曲線の非特異完備化に同型である.

問 56 簡単のため k の標数は 2 と異なるとする.

(1) アフィン平面曲線 $C_0 : y^2 + a_1(x)\,y + a_2(x) = 0$ が特異点をもたない条件を与えよ.

(2) 種数 g の超楕円曲線 C の函数 x, y から作ったアフィン平面曲線 C_0 は非特異であることを示せ.

(b) a_1, $a_2 \in k[x]$ を $\deg a_1 \leq g+1$, $\deg a_2 \leq 2g+2$ とし, アフィン平面曲線 $C : y^2 + a_1(x)\,y + a_2(x) = 0$ が特異点をもたないとする. $\tilde{C} : v^2 + (u^{g+1}a_1(1/u))\,v + u^{2g+2}a_2(1/u) = 0$ とおくと, $\tilde{C}$ も非特異アフィン平面曲線である. 有理写像 $\varphi : C \ni (x,\,y) \longmapsto (1/x,\,y/x^{g+1}) \in \tilde{C}$ は双有理的で, φ で C と $\tilde{C}$ を貼り合わせた代数曲線 $\hat{C} = C \cup \tilde{C}$ は C の非特異完備化である. C の無限遠点は x-座標が ∞ なので, $\tilde{C}$ において u-座標が 0 の点である. $a_1(x)$ の x^{g+1} 次の項の係数を c_1, $a_2(x)$ の x^{2g+2} の項の係数を c_2 とおく. このとき $\tilde{C}$ の u-座標が 0 の点の v-座標は $v^2 + c_1\,v + c_2 = 0$ の根である. k の標数によらず, C の無限遠点は $c_1^2 - 4c_2 = 0$ のとき 1 点で, $c_1^2 - 4c_2 \neq 0$ のとき 2 点である.

2 次 Galois 被覆 $x : C \longmapsto \mathbb{P}^1$ の Galois 群は $\iota : C \ni P = (x,\,y) \longmapsto P' = (x,\,-y-a_1(x)) \in C$ で生成される. ι を**超楕円対合**という. u-座標が 0 の点 $P_\infty = (0,\,v_0) \in \tilde{C}$ は, ι により $P'_\infty = (0,\,-v_0 - c_1) \in \tilde{C}$ に移る.

(c) 少し細かい計算をするために, k の標数は 2 と異なるとする. 超楕円曲線 C は, 重根をもたない多項式 $f(x) \in k[x]$ で $y^2 = f(x)$ で定義することができる. このとき C の無限遠点は, f の次数が奇数のとき 1 点で, f の次数が偶数のとき 2 点である. アフィン部分曲線上の d 個分岐点を $Q_1, \cdots, Q_d$ とおく. これらの点の x-座標 $x(Q_1), \cdots, x(Q_d)$ は $f(x) = 0$ の根であり, 順に $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ と書く. このとき Q_j の局所助変数として $t_j^2 = x - \alpha_j$ ($t_j \in k(C)_P$) がとれる. Q_j において座標函数 y の値は 0 である. 定義方程式の右辺 $f(x)$ を t_j で展開すると, $f(x) = b_1\,t_j^2 + b_2\,{}_j^4 + \cdots$ ($b_1 \neq 0$) と書ける. $y^2 = f(x)$ より $y = \sqrt{b_1}\,t_j + (\text{高次の項})$ と展開される. 最初の項に $\pm$ をつけ忘れているように見えるが, t_j の取り方に $\pm$ の不確定さがあるので, y の展開に $\pm$ をつける必要は無い. ともかく $\mathrm{ord}_{Q_j}(x - \alpha_j) = 2$, $\mathrm{ord}_{Q_j}(y) = 1$ である.

アファイン部分曲線 (x の正則点) 上の点 $P \in C$ をとり, $a = x(P) \in \mathbb{A}^1$ とおく. x-座標の値が a となる点は P と P' である. x-座標の値を明記するときには P, P' をそれぞれ P_a, P'_a と書く. x が P_a で不分岐であるなら P_a の局所助変数として $t_{P_a} = x - a$ がとれる. P_a において y-座標函数の値 $y(P_a)$ は 0 でない. 定義方程式の右辺 $f(x)$ を t_{P_a} で展開すると, $f(x) = b_0 + b_1\,t_{P_a} + \cdots$ ($b_0 \neq 0$) と書ける. $(y(P_\infty))^2 = f(x(P_\infty) = f(a) = b_0$ より, $y = y(P_a) + (\text{高次の項})$ と展開される. 従って $\mathrm{ord}_{P_a}(x - a) = 1$, $\mathrm{ord}_{P_a}(y) = 0$ である.

d が奇数のとき無限遠点 P_∞ は唯一つの点で, u, v-座標で表すと $(0,\,0)$ となる. つまり $x(P_\infty) = (1/u)(P_\infty) = 1/u(P_\infty)$ より P_∞ は函数 x の極で, $(y/x^m)(P_\infty) = u(P_\infty) = 0$ より, y の P_∞ での位数 $\mathrm{ord}_{P_\infty}(y)$ は x^m の P_∞ での位数 $m\,\mathrm{ord}_{P_\infty}(x)$ より大きい. もう少し精密に, P_∞ は 2 次被覆 x の分岐点なので, P_∞ の局所助変数として $t_\infty^2 = 1/x$ ($t_\infty \in k(C)_{P_\infty}$) がとれる. $y^2 = f(x) = a_0\,t_\infty^{-2d} + \cdots$ ($a_0 \neq 0$) より, $y = \sqrt{a_0}\,t_\infty^{-d} + (\text{高次の項})$ となる. 従って $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = -2$, $\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = -d$ である.

d が偶数のとき無限遠点は 2 つあるが, u, v-座標で表すと $(0, \pm\sqrt{a_0})$ と書ける. $(0,\,\sqrt{a_0})$ に対応する無限遠点を P_∞ とし, $(0,\,-\sqrt{a_0})$ に対応する無限遠点を P'_∞ とする. 函数 $u = y/x^m$ は, P_∞ において $\sqrt{a_0}$ を値にもち, P'_∞ において $-\sqrt{a_0}$ を値にもつ. もう少し精密に, P_∞ は 2 次被覆 x の不分岐点なので,

P_∞ の局所助変数として $t_\infty = 1/x$ ($t_\infty \in k(C)_{P_\infty}$) がとれる．$y^2 = f(x) = a_0\, t_\infty^{-d} + \cdots$ ($a_0 \neq 0$) より，$y = \sqrt{a_0}\, t_\infty^{-d/2} +$ (高次の項) となる．従って $\mathrm{ord}_{P_\infty}(x) = -1$, $\mathrm{ord}_{P_\infty}(y) = -d/2$ である．

命題 5.18 (1) $d = \deg f$ が奇数のとき, $\mathrm{div}(x) = P_0 + P_0' - 2\,P_\infty$, $\mathrm{div}(y) = Q_1 + \cdots + Q_d - d\,P_\infty$
(2) $d = \deg f$ が偶数のとき, $\mathrm{div}(x) = P_0 + P_0' - (P_\infty + P_\infty')$, $\mathrm{div}(y) = Q_1 + \cdots + Q_d - (d/2)\,(P_\infty + P_\infty')$

(d) 空隙値列の計算をする．$d = \deg f$ が奇数 (このとき $d = 2g+1$) のとき, 無限遠点 P_∞ は分岐点であった．P_∞ の外で正則な有理函数は, アフィン部分曲線上で正則な有理函数なので, 座標函数で生成された多項式函数 $k[x, y]$ になる．関係式 $y^2 = f(x)$ に注意すれば, $k[x] + k[x]\,y$ と書ける．$y \in L((2g+1)\,P_\infty)$ なので $n \leq 2g$ とすると $L(n\,P_\infty) \subset k[x]$ である．$x \in L(2\,P_\infty)$ なので $L(0) = L(P_\infty) = k$, $L(2\,P_\infty) = L(3\,P_\infty) = k + k\,x$, $\cdots$, $L((2g-2)\,P_\infty) = k + k\,x + \cdots + k\,x^{g-1}$, $L(g\,P_\infty) = k + k\,x + \cdots + k\,x^g$ となる．極因子が $n\,P_\infty$ ($n \geq 2g+1 = d$) の函数として, n が偶数のときは $x^{n/2}$ を, n が奇数のときは $x^{(n-d)/2}y$ をとることができる．従って P_∞ の空隙値列は $\{1, 3, 5, \cdots, 2g-1\}$ である．

$d = \deg f$ が偶数 (このとき $d = 2g+2$) のとき, 無限遠点 P_∞ は分岐点ではない．$L(n\,P_\infty)$ の次元 $\ell(n\,P_\infty)$ を計算したいのだが, 先に $L(n(P_\infty + P_\infty'))$ ($\supset L(n\,P_\infty)$) の次元を計算する．P_∞ と P_∞' の外で正則な有理函数は, アフィン部分曲線の正則な有理函数なので, 座標函数 x, y で生成された多項式函数 $k[x, y]$ である．関係式 y=$f(x)$ により，$k[x] + k[x]\,y$ と書ける．$y \in L((g+1)(P_\infty + P_\infty'))$ より，$L(n\,(P_\infty + P_\infty')) \subset k[x]$ ($n \leq g$) となる．$k[x]$ の元は超楕円対合 ι で不変なので, $k[x]$ の元に対する P_∞ の位数と P_∞' の位数は等しい．従って P_∞' で正則な $k[x]$ の元は P_∞ でも正則である．よって $L(n\,P_\infty) = k$ ($n \geq g$) を得る．空隙値列は丁度 g 個の自然数の組なので, P_∞ の空隙値列は $\{1, 2, 3, \cdots, g\}$ である．C の分岐点での空隙値列は d が奇数の場合の P_∞ の, 不分岐点での空隙値列は d が偶数の場合の P_∞ の空隙値列の計算と同様にできる．

命題 5.19 2 次被覆 x の分岐点 $P \in C$ の空隙値列は $\{1, 3, 5, \cdots, 2g-1\}$ である．その他の点の空隙値列は $\{1, 2, \cdots, g\}$ である．従って超楕円曲線 C の Weierstrass 点は $2g+2$ 個である．

定理 5.11 あるいは系 5.13 より, 超楕円曲線の自己同型写像は超楕円対合と可換である．自己同型群を超楕円対合で割った剰余類群 $\mathrm{RAut}(C) = \mathrm{Aut}(C)/\langle\iota\rangle$ を C の**被約自己同型群** (reduced automorphism group) という．

命題 5.20 被約自己同型群 $\mathrm{RAut}(C)$ は, 自然に射影直線の一次分数変換の部分群になり, また, 対称群 $\mathfrak{S}_{2g+2}$ の部分群に同型である．

(e) k の標数が 2 と異なるとする．C を種数 g (≥ 2) の超楕円曲線で, $x : C \to \mathbb{P}^1$ を射影直線の 2 次被覆とする．(a) で $L(m\,D)$ ($m \geq 1$, D は x の極因子) の基底の計算から, C のアフィン平面曲線としての定義方程式を与えた．超楕円曲線の Weierstrass 点について調べたことを用いると, 定義方程式を次の様に与えることができる．x は 2 次の Galois 被覆なので, 分岐指数は 1 または 2 となる．Riemann-Hurwitz の公式より, 分岐点の個数は $2g+2$ 個である．$a_1, \cdots, a_{2g+2} \in \mathbb{P}^1$ を x の分岐点とする．

定理 5.21 C は $C_0 : y^2 = (x-a_1)\,(x-a_2)\,\cdots\,(x-a_{2g+2})$ に同型である．(右辺の積で $a_j = \infty$ となる項は除く)

§5.10 超楕円曲線の微分

(a) k の標数は 2 と異なるとし, $C : y^2 = f(x)$ を種数 g (≥ 2) の超楕円曲線とする．$f \in k[x]$ は重根をもたず, 次数は $d = 2g+1, 2g+2$ である．微分 dx の因子を計算する．2 次 Galois 被覆 $x : C \to \mathbb{P}^1$ のアファイン部分曲線上の分岐点は $Q_1, \cdots, Q_d$ で, d が奇数のとき無限遠点 P_∞ も分岐点になる．有理函数 x の極は, d が奇数のときは無限遠点 P_∞ 唯一つで位数は -2 である．d が偶数のときは 2 つの無限遠点 P_∞, P_∞' で位数は -1 である．

命題 5.22
$$\mathrm{div}(dx) = \begin{cases} Q_1 + \cdots + Q_d - 3\,P_\infty & (d \text{ は奇数}) \\ Q_1 + \cdots + Q_d - 2\,P_\infty - 2\,P'_\infty & (d \text{ は偶数}) \end{cases}$$

d が奇数 (P_∞ が分岐点) のとき, $Q_{d+1} = P_\infty$ とおく. d が奇数のとき $d+1 = 2g+2$ で, d が偶数のとき $d = 2g+2$ である. 従って d の偶奇によらず $Q_1, \cdots, Q_{2g+2}$ が x のすべての分岐点を表す. また d が奇数のとき $P'_\infty = P_\infty$ なので, 微分 dx の因子を d の偶奇によらない形で表せる.
$$\mathrm{div}(dx) = Q_1 + \cdots + Q_{2g+2} - 2\,P_\infty - 2\,P'_\infty$$

(b) 有理函数 y の因子は $\mathrm{div}(y) = Q_1 + \cdots + Q_{2g+2} - (g+1)\,(P_\infty + P'_\infty)$ なので,
$$\mathrm{div}(\frac{dx}{y}) = (g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)$$
である. また $\mathrm{div}(x) = P_0 + P'_0 - P_\infty - P'_\infty$ なので, $0 \le n \le g-1$ に対して
$$\mathrm{div}(x^n\,\frac{dx}{y}) = n(P_0 + P'_0) + (g-1-n)\,(P_\infty + P'_\infty)$$

命題 5.23 C の第一種微分の全体は, $\dfrac{dx}{y}$, $x\,\dfrac{dx}{y}$, $\cdots$, $x^{g-1}\,\dfrac{dx}{y}$ で生成される g 次元 k-線形空間である.

(c) P_∞ が分岐点 ($P'_\infty = P_\infty$) のとき, P_∞ でのみ極をもつ有理函数の全体は $k[x] + k[x]\,y$ であった. ω を P_∞ でのみ極をもつ微分とすると, $\omega/\dfrac{dx}{y}$ は P_∞ でのみ極をもつ有理函数である. 従って P_∞ でのみ極をもつ第二種微分の全体は $(k[x] + k[x]\,y)\,\dfrac{dx}{y}$ である.

P_∞ が不分岐点 ($P'_\infty \neq P_\infty$) のとき, P_∞ でのみ極をもつ第二種微分 ω をとる. $\mathrm{ord}_{P_\infty}(\omega) = n$ ($n \ge 1$) とおくと, $f_\omega = \omega/\dfrac{dx}{y}$ は極因子が $n\,P_\infty + (g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)$ である. $n = 1$ のとき, f_ω の極因子は $g\,(P_\infty + P'_\infty)$ に含まれる. ところが $L(g\,(P_\infty + P'_\infty)) \subset k[x]$ なので, f_ω の P_∞ の位数と P'_∞ の位数は等しい. 従って P_∞ での位数が丁度 1 の第二種微分は存在しない. このことは留数の計算からすでにわかっていたことだが, 有理函数や微分の因子を具体的に計算することでもわかる. $n = 2$ のとき, f_ω の極因子は $(g+1)\,P_\infty + (g-1)\,P'_\infty$ なので, f_ω は $L((g+1)\,(P_\infty + P'_\infty)) = k + k\,x + \cdots + k\,x^{g+1} + k\,y$ に含まれる. 無限遠点 P_∞ と P'_∞ の区別は $u = 1/x$, $v = y/x^{g+1}$ 座標で $(0, \sqrt{a_0})$ になるのが P_∞ で $(0, -\sqrt{a_0})$ となるが P'_∞ と定めた. 従って P'_∞ の近傍で $y \neq -\sqrt{a_0}\,x^{g+1}$ となる. P'_∞ の局所助変数 $t_\infty = 1/x$ で有理函数 y を Laurent 級数展開すると
$$y = -\sqrt{a_0}\,t_\infty^{-g-1} + b_1\,t_\infty^{-g} + b_2\,t_\infty^{-g+1} + \cdots$$
となる. $f_P = y + \sqrt{a_0}\,t_\infty^{-g-1} - b_1\,t_\infty^{-g}$ とおくと, $h \in L(2\,P_\infty + (g-1)\,(P_\infty + P_\infty))$ なので $f_P\,\dfrac{dx}{y}$ は P_∞ で 2 位の極をもつ第二種微分である. $n \ge 2$ に対して $\ell(n\,P_\infty + (g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)) = g + n - 1$ である. $\ell((g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)) = \ell(P_\infty + (g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)) = g$ なので, どの n (≥ 2) に対しても, P_∞ で丁度 n 位の極をもつ第二種微分が存在する. P_∞ で高々 n 位の極をもつ第二種微分の全体は $g + n - 1$ 次元 k-線形空間をなす.

(d) 異なる 2 点 $P, Q \in C$ をとる. $\ell(P + Q + (g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)) = 2g - g + 1 = g + 1$ である. $\ell((g-1)(P_\infty + P'_\infty)) = g$ より, $f_{PQ} \in L(P + Q + (g-1)\,(P_\infty + P'_\infty)) \smallsetminus L((g-1)\,(P_\infty + P'_\infty))$ がとれる. このとき $\omega_{PQ} = f_{PQ}\,\dfrac{dx}{y}$ は P, Q で高々 1 位の極をもつ第三種微分である. また P, Q で高々 1 位の極をもつ第三種微分の全体は $g + 1$ 次元 k-線形空間をなす.

$p = x(P)$, $q = x(Q)$ とおく. P, Q は分岐点でなく, $p \neq q$, $p \neq \infty$, $q \neq \infty$ の場合に, ω_{PQ} をもう少し具体的に与える. f_{PQ} を与えればよいのだが, $h_{PQ} = f_{PQ}\,(x-p)(x-q)$ とおくと, $\mathrm{div}(h_{PQ}) \ge -P' - Q' + (g+1)(P_\infty + P'_\infty)$ である. h_{PQ} は $L((g+1)\,(P_\infty + P'_\infty)) = k + k\,x + \cdots + k\,x^{g+1} + k\,y$ に属する有理函数で P', Q' を零点にもつものである. P', Q' を通る直線の方程式を $h_{PQ} = a + b\,x + c\,y = 0$ とおく. $f_{PQ} = h_{PQ}/(x-p)(x-q)$ とおくと $f_{PQ} \in L(P + Q - (g-1)(P_\infty + P'_\infty))$ となり, $\omega_{PQ} = f_{PQ}\,\dfrac{dx}{y}$ は P, Q で高々 1 位の極をもつ第三種微分である.

問 57 適当に場合分けして (上に書いたものも含む), P, Q で高々 1 位の極をもつ第三種微分を求めよ. 更に P, Q での留数を計算し, 留数定理が成り立つことを確かめよ.

§5.11 超楕円曲線の因子類群

(a) C を種数 g の超楕円曲線とする．話を簡単にするため, k の標数は 2 と異なるとし, C の無限遠点 P_∞ は Weierstrass 点 $(P'_\infty = P_\infty)$ とする．C は, 次数が $2g+1$ の重根をもたない多項式 $f(x) \in k[x]$ により, $C: y^2 = f(x)$ で定義される．$g\,P_\infty$ に関する基準写像 $\Phi = \Phi_{gP_\infty} : \mathrm{Sym}^g(C) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ は定理 5.1 (3) より全射である.

命題 5.24 Φ は殆ど単射である.

(b) もう少し精密に述べる．$P \in C$ に対して $P \neq P_\infty$ のとき $u_P = x - x(P)$ とおき, $u_{P_\infty} = 1$ とおく．因子 $D = \sum n_P\,P$ に対して, $D' = \sum n_P\,P'$ とおく．また $u_D = \prod u_P^{n_P}$ とおく．D の次数を d とすると,

命題 5.25 $\mathrm{div}(u_D) = D + D' - 2d\,P_\infty$

$D_1,\, D_2 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ とする．$\Phi(D_1) = \Phi(D_2)$ となるための必要十分条件は $\ell(D_1 - D_2) > 0$ である．$L(D_1 - D_2) \ni h \longmapsto h\,u_{D_1} \in L(2g\,P_\infty - D'_1 - D_2)$ より, $\ell(2g\,P_\infty - D'_1 - D_2) = \ell(D_1 - D_2)$ である．$L(2g\,P_\infty - D'_1 - D_2) \subset L(2g\,P_\infty) = k + k\,x + \cdots + k\,x^g \subset k[x]$ なので,

定理 5.26 $D_1,\, D_2 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ が $\Phi(D_1) = \Phi(D_2)$ となるための必要十分条件は, 次数 $2g$ の因子 $D'_1 + D_2$ が超楕円対合で移りあう g 個の点の対に分けることができることである．つまり $D \in \mathrm{Sym}^g(C)$ で $D'_1 + D_2 = D + D'$ と書けることである.

定理 5.27 種数 $g = 2$ のとき, $\Phi = \Phi_{2P_\infty}$ が単射とならないのは $\Phi^{-1}(0) = \{P + P' \mid P \in C\} \simeq \mathbb{P}^1$ である.

(c) 全射 $\Phi : \mathrm{Sym}^g(C) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ を通して, $\mathrm{Pic}^0(C)$ の加法を $\mathrm{Sym}^g(C)$ の上に描く．$D_1,\, D_2 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ とする．$D = 3\,g\,P_\infty - D'_1 - D'_2$ とおくと, D の次数は g である．$\ell(D) \geq \deg D - g + 1 = g - g + 1 = 1 > 0$ なので, 零でない $h \in L(D)$ が存在する．$D_3 = \mathrm{div}(h) + D$ とおくと, D_3 は次数 g の整因子なので $D_3 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ である．$\ell(D) = 1$ ならば h の選び方は定数倍を除いて一意なので D_3 は一意に定まる．$\ell(D) > 1$ ならば $D_3 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ は h の選び方で変わり, 一意に定まらない．どの h, どの D_3 を取っても,

$$\begin{aligned}\Phi(D'_1) + \Phi(D'_2) + \Phi(D_3) &= [D'_1 - g\,P_\infty] + [D'_2 - g\,P_\infty] + [D_3 - g\,P_\infty] \\ &= [D'_1 + D'_2 + D_3 - 3\,g\,P_\infty] = [\mathrm{div}(h)] = 0\end{aligned}$$

なので, $\Phi(D_3) = -\Phi(D'_1) - \Phi(D'_2) = \Phi(D_1) + \Phi(D_2)$ となる．定理 5.15 より, D_3 に現れる $P + P'$ 型の項を $2\,P_\infty$ に置き換えたものを D_4 とおくと, $\Phi(D_4) = \Phi(D_3)$ で, $D_4 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ は h の取り方によらない．従って $D_1,\, D_2 \in \mathrm{Sym}^g(C)$ に対して $D_1 \oplus D_2 = D_4$ とおいて, $\mathrm{Sym}^g(C)$ の上に加法が定まる.

(d) 加法を具体的に計算するには, $L(D)$ $(D = 3\,g\,P_\infty - D'_1 - D'_2)$ に属する零でない有理函数 h を具体的に与えねばならない．$L(D) \subset L(3\,g\,P_\infty)$ なので, $D'_1 + D'_2$ で零となる $h \in L(3\,g\,P_\infty)$ を作ればよい．$L(3\,g\,P_\infty)$ の任意の元は $h_1(x) + h_2(x)\,y$ $(h_1,\, h_2 \in k[x],\, \deg h_1 \leq 3g/2,\, \deg h_2 \leq (g-1)/2)$ と書ける．$D'_1 + D'_2$ で零になるように, $h_1(x) + h_2(x)\,y$ の $2g+1$ 個の係数を決めればよい．最も単純な場合として, $D'_1 + D'_2$ が x-座標がすべて相異なる $2\,g$ 個の点の和 $(P_1 + \cdots + P_{2g})$ のときを考える．$P_1, \cdots, P_{2g}$ で $h_1(x) + h_2(x)\,y = 0$ となれば良いので, $2g$ 個の連立一次方程式を得る．その連立方程式の階数は変数の個数 $(2g+1)$ より小さいので, 自明でない解をもつ．その解を係数として $h = h_1(x) + h_2(x)\,y$ とおけば, 零でない $h \in L(D)$ を得る.

(e) 因子類群はイデアル類群の類似で, 超楕円曲線は 2 次体なので, 種の理論にあたるものを因子類群上に展開できる．超楕円対合が 2 次体としての共役にあたるので, 特異類 (ambig class) には 2 等分点が関係する．実際 $D \in \mathrm{Sym}^g(C)$ とし, $\Phi(D)' = [D - g\,P_\infty]' = [D' - g\,P_\infty] = \Phi(D') = -\Phi(D)$ なので, $\Phi(D)$ が特異類 $(\Phi(D)' = \Phi(D))$ なら $2\Phi(D) = 0$ となる．特異類の全体は $\mathrm{Pic}^0(C)$ の 2 等分点の全体に等しい.

$[P' - P_\infty] = [P_\infty - P] = -[P - P_\infty]$ なので, P が Weierstrass 点なら $2\,[P - P_\infty] = 0$ となる．P_∞ 以外の Weierstrass 点を $Q_1, \cdots, Q_{2g+1}$ とおくと, $[Q_1 - P_\infty], \cdots, [Q_{2g+1} - P_\infty]$ は 2 等分点である．ところで

$\mathrm{div}(y) = Q_1 + \cdots + Q_{2g+1} - (2g+1)\,P_\infty$ なので $[Q_1 - P_\infty] + \cdots + [Q_{2g+1} - P_\infty] = 0$ が成り立つ. $[Q_1 - P_\infty]$, $\cdots$, $[Q_{2g+1} - P_\infty]$ の中から m 個 $(1 \le m \le 2g)$ を選んで和を取ると, $[Q_* - P_\infty] + \cdots + [Q_{**} - P_\infty] = [(Q_* + \cdots + Q_{**}) - m\,P_\infty]$ となる. ここで $L(m\,P_\infty) \subset L(2g\,P_\infty) = k + k\,x + \cdots + k\,x^g$ なので $L(m\,P_\infty)$ に属する函数の Q_j での位数は偶数になる. 従って $(Q_* + \cdots + Q_{**}) - m\,P_\infty$ を因子にもつ有理函数は存在しない. $\langle [Q_1 - P_\infty], \cdots, [Q_{2g} - P_\infty] \rangle$ は位数 2^{2g} の $(2, \cdots, 2)$ 型アーベル群である.

定理 5.28 種数 g (≥ 2) の超楕円曲線 C における特異類の全体は, 因子類群 $\mathrm{Pic}^0(C)$ の 2 等分点の全体に一致し, 位数 2^{2g} の基本アーベル 2-群である. また $Q_1, \cdots, Q_{2g+2}$ を C の Weierstrass 点とするとき, 特異類の全体は $[Q_i - Q_{2g+2}]$ $(1 \le i \le 2g)$ で生成される.

§5.12 種数 2 の代数曲線

(a) C を種数 2 の非特異完備代数曲線とし, K_C をその標準整因子 (標準因子で整因子のもの) とする. $P \in C$ を任意にとる. $\ell(0) = \ell(P) = 1$ で, $m \ge 3$ に対して $\ell(m\,P) = m - 1$ である. $\ell(2\,P)$ は 1 か 2 のいずれかであるが. $\ell(2\,P) = 2$ のとき空隙値列は $\{1, 3\}$ になるので, P は Weierstrass 点である. このとき $L(2\,P)$ に属する非定数有理函数 x が取れる. x の写像度は 2 なので, C は超楕円曲線になる. $\ell(2\,P) = 1$ のとき空隙値列は $\{1, 2\}$ なので, P は Weierstrass 点ではない. しかしこのとき $\ell(P + P') = 2$ となる $P' \in C$ が存在する. $L(P + P')$ に属する 2 次の非定数有理写像がとれるので, この場合も C は超楕円曲線になる.

定理 5.29 種数が 2 の非特異完備代数曲線は, 超楕円曲線である.

(b) 上で述べたことを第一種微分を使って正当化する. C の種数は 2 なので, 第一種微分の全体は 2 次元 k 線形空間をなす. その基底 ω_1, ω_2 をとる. P が ω_1 の零点でないとする. $h = \omega_2/\omega_1$ は非定数有理函数で, $\mathrm{div}(\omega_1)$ を極因子, $\mathrm{div}(\omega_2)$ を零因子にもつ. とくに $h \in L(\mathrm{div}(\omega_1))$ である. $k = L(0) \subset L(\mathrm{div}(\omega_1))$ なので, $L(\mathrm{div}(\omega_1))$ は $k + k\,h$ を部分空間として含む. P は h の極ではないので, $a = h(P) \in k$ となる. $\omega_P = (h - a)\,\omega_1$ とおくと, ω_P は第一種微分で P を零点にもつ. $L(\mathrm{div}(\omega_1) - P) \subsetneqq L(\mathrm{div}(\omega_1))$ なので

命題 5.30 任意の $P \in C$ に対して, P を零点にもつ第一種微分 ω_P が定数倍を除いて唯一つ存在する.

命題 5.31 (1) $\iota : C \ni P \longmapsto P' = \mathrm{div}(\omega_P) - P \in C$ は C の自己同型写像である.

(2) $P \in C$ が Weierstrass 点であることと, ι-不変である $(P' = P)$ は同値である.

(3) 基準写像 $\varPhi_{K_C} : \mathrm{Sym}^2(C) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ は, $\mathrm{Sym}^2(C) \smallsetminus \{$標準整因子$\}$ から $\mathrm{Pic}^0(C) \smallsetminus \{0\}$ への全単射になる.

(4) 標準整因子の全体は $\{P + P' \mid P \in C\}$ に等しい.

(5) $P + P'$ を極因子にもつ非定数有理函数 x が存在し, ι は Galois 被覆 $x : C \to \mathbb{P}^1$ の Galois 群を生成する.

(6) C は超楕円曲線で, ι は超楕円対合である.

(7) C の任意の自己同型写像は ι と可換である.

定理 5.32 種数 2 の非特異完備代数曲線は超楕円的で, $y^2 + a_1(x)\,y + f_2(x) = 0$ $(a_1, a_2 \in k[x], \deg a_1 \le 3, \deg a_2 \le 6)$ で定義されるアフィン平面曲線の非特異完備化に同型である.

問 58 C を種数 2 の非特異完備代数曲線とする. $P \in C$ に対して, $L(m\,(P + P'))$ $(m = 1, \cdots, 5)$ および $L(2\,(P + P') + P)$ の基底を求め, 上の定理の後半を示せ.

(c) C を種数 2 の超楕円曲線とする. 標準整因子 K_C を基底とする基準写像 $\varPhi_{K_C} : \mathrm{Sym}^2(C) \to \mathrm{Pic}^0(C)$ は全射かつ殆ど単射であった. $P + Q \in \mathrm{Sym}^2(C)$ とする. $P + Q - K_C = (P - Q') + (Q + Q' - K_C) \sim P - Q'$ なので $\varPhi_{K_C}(P + Q) = [P - Q']$ と書ける. ここで因子類 $[P - Q']$ は標準整因子 K_C の選び方によらない.

定理 5.33　$\Psi : C \times C \ni (P, Q) \longmapsto [P - Q] \in \mathrm{Pic}^0(C)$ は全射で, $\Psi^{-1}(0) = \{(P, P) \in C \times C\} \simeq C$ を除いて 2 対 1 である.

問 59　種数が偶数の超楕円曲線に対して, 定理 5.33 と同様に因子類群の殆ど 2 次被覆を構成せよ.

§5.13　種数 2 の超楕円曲線の被約自己同型群

定理 5.34　C を種数 2 の超楕円曲線とする. C の被約自己同型群 $\mathrm{RAut}(C)$ は $\mathbb{P}^1$ の自己同型群 (1 次分数変換の全体) の部分群に同型で, さらに Weierstrass 点に注目することで 6 次対称群の部分群に同型である.

簡単のため k の標数は 0 とする. 種数 2 の超楕円曲線 C の被約自己同型群を, 定理 5.29 と定理 5,15 とその後の問いを使って決めることができる. 自己同型群の位数は 48 を超えないので, 被約自己同型群の位数は 24 以下である. Weierstrass 点の個数は 6 個なので, 6 次対称群 $\mathfrak{S}_6$ の部分群で位数が 24 以下のものがその候補になる. また, 2 次の有理写像 $x : C \to \mathbb{P}^1$ に適当な一次分数変換を合成して, C の Weierstrass 点 $P_1, \cdots, P_6$ のうち最初の 3 つを $x(P_1) = 0$, $x(P_2) = 1$, $x(P_3) = \infty$ にすることができる. 以下 $x(P_4) = a$, $x(P_5) = b$, $x(P_6) = c$ とおく. 被約自己同型は一次分数変換で表され, $\{0, 1, \infty, a, b, c\}$ の置換を引き起こす.

$$\tau : z \longmapsto \frac{1}{1 - z}$$

は位数 3 の一次分数変換で, $0, 1, \infty$ をこの順に置換する. $b = \dfrac{1}{1 - a}$, $c = \dfrac{a - 1}{a}$ とおくと, $\tau(a) = b$, $\tau(b) = c$, $\tau(c) = a$ なので, τ は $\{0, 1, \infty, a, \dfrac{1}{1 - a}, \dfrac{a - 1}{a}\}$ の位数 3 の置換を引き起こす. 超楕円曲線

$$C_a : y^2 = x\,(x - 1)\,(x - a)\,(x - \frac{1}{1 - a})\,(x - \frac{a - 1}{a})$$

の被約自己同型群は $\langle\tau\rangle \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を部分群にもつ. また, 位数 2 の一次分数変換

$$\sigma : z \longmapsto \frac{a\,z - a + 1}{z - a}$$

は $\{0, 1, \infty, a, \dfrac{1}{1 - a}, \dfrac{a - 1}{a}\}$ の位数 2 の置換を引き起こす. σ もまた C_a の位数 2 の被約自己同型写像である. $\sigma\tau = \tau^2\sigma$ なので, 被約自己同型群は $\langle\sigma, \tau\rangle \simeq \mathfrak{S}_3$ を部分群にもつ. $a = 2$ とするとき, 位数 2 の一次分数変換

$$\sigma_2 : z \longmapsto \frac{z - 2}{2z - 1}$$

は $\{0, 1, \infty, 2, -1, 1/2\}$ の 2 次の置換を引き起こす. σ_2 と τ は可環で, $(\sigma_2\tau)^5\sigma = \sigma\,(\sigma_2\tau)$ なでの, $\langle\sigma, \tau, \sigma_2\rangle$ は位数 12 の二面体群 D_{12} に同型である.

$$C_2 : y^2 = x\,(x^2 - 1)\,(x - 2)\,(x - 1/2)$$

の被約自己同型群は D_{12} に同型である. $a = \sqrt{-1}$ とする. 位数 4 の一次分数変換

$$\sigma_4 : z \longmapsto \frac{-\sqrt{-1}}{z - 1 - \sqrt{-1}}$$

は $\{0, 1, \infty, \sqrt{-1}, (1 + \sqrt{-1})/2, 1 + \sqrt{-1}\}$ の置換を引き起こし, $\langle\sigma, \tau, \sigma_4\rangle$ は 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ に同型である.

$$C_{\sqrt{-1}} : y^2 = x\,(x - 1)\,(x - \sqrt{-1})\,(x - \frac{1 + \sqrt{-1}}{2})\,(x - 1 - \sqrt{-1})$$

の被約自己同型群は $\mathfrak{S}_4$ に同型である. $\mathfrak{S}_4$ の位数は $4! = 24$ なので, 種数 2 の場合に期待される位数最大のものが得られた. 位数 4 の一次分数変換から始めて同様に計算することで, 被約自己同型群が D_8, $\mathfrak{S}_4$ となる種数 2 の超楕円曲線が得られる.

定理 5.35　$\{1\}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, D_8, $\mathfrak{S}_3$, D_{12}, $\mathfrak{S}_4$ を被約自己同型群にもつ種数 2 の超楕円曲線が存在する. 更に k の標数が 0 のとき, 種数 2 の超楕円曲線の被約自己同型群はそれら 7 つに限る.

問 60　定理 5.35 に現れる群を被約自己同型群にもつ種数 2 の超楕円曲線をみつけよ.

§5.14　種数 2 のモジュラー曲線 $X_0(23)$

(a)　特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は一次分数変換により複素上半平面 $\mathfrak{H}$ に作用する．その作用を $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ まで延ばすことができる． $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 $\Gamma_0(23) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0 \bmod 23\}$ による商 $Y_0(23) = \Gamma_0(23)\backslash\mathfrak{H}$ は開 Riemann 面になる．また $X_0(23) = \Gamma_0(23)\backslash\mathfrak{H}^*$ は閉 Riemann 面の構造をもち, $Y_0(23)$ のコンパクト化になる. 代数的には $Y_0(23)$ は $\mathbb{C}$ 上のアフィン代数曲線で, $X_0(23)$ はその非特異完備化である. $\tau \in \mathfrak{H}^*$ で代表される $X_0(23)$ の点を (τ) で表す. $\Gamma_0(23)\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の点を $X_0(23)$ の**尖点** (cusp) という. $X_0(23)$ は $(i\infty)$ と (0) の 2 点を尖点にもつ. $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の点としては $i\infty$ でなく単に ∞ と書くべきであろうが, 上半平面 $\mathfrak{H}$ から $\infty \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ は虚部が無限大の方向に見えるので $i\infty$ と書いた. $X_0(23)$ を $\Gamma_0(23)$ に関する**モジュラー曲線** (modular curve) という. 幾つか計算する方法があるがともかく $X_0(23)$ の種数は 2 の超楕円曲線である. また $\Gamma_0(23)$ に関する重さ 2 の尖点形式 (cusp form) は, $X_0(23)$ の正則微分に対応する. 古典的だが Dedekind の **η-函数** を使って尖点形式を作る. η-函数は無限積により定義される $\mathfrak{H}$ 上の非零正則函数で, 変換公式を満たす.

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \qquad (q = e^{2\pi i \tau})$$
$$\eta(\tau + 1) = e^{2\pi i/24}\, \eta(\tau)\ , \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\,\tau}\, \eta(\tau)$$

命題 5.36　(1)　$f_{23}(\tau) = \eta(\tau)^2\, \eta(23\tau)^2$ は $\Gamma_0(23)$ に関する重さ 2 の尖点形式である.

(2)　Hecke 作用素 T_2 で移した $f_{23}|T_2(\tau)$ も尖点形式で, $2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$, $2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, \tau$ は, $\Gamma_0(23)$ に関する重さ 2 の尖点形式全体のなす $\mathbb{C}$ 線形空間の基底である.

(b)　$X_0(23)$ の正則微分 $2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ は, アフィン部分曲線 $Y_0(23)$ の上では零点をもたない. $X_0(23)$ の尖点 $(i\infty)$ における局所助変数 $q = e^{2\pi i \tau}$ で $2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ を展開すると,

$$2\pi i\, f_{23}(\tau)\, \frac{d\tau}{dq} = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} + 2q^{14} + 3q^{15} + \cdots$$

なので, $(i\infty)$ で 1 位の零となる. Riemann-Roch の定理より微分因子の次数は 2 なので, もう一つの尖点 (0) でも $2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ は 1 位の零になる. $X_0(23)$ の微分因子として $\mathrm{div}(2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau) = (i\infty) + (0)$ を得る. $(i\infty) + (0)$ は標準整因子だから, $(i\infty)$ と (0) は超楕円対合で移りあう. 一方, $2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, d\tau$ も正則微分だが,

$$2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, \frac{d\tau}{dq} = 1 - q + q^2 - 2q^4 - 3q^5 + q^7 + 2q^8 + 4q^9 - 2q^{10} + 2q^{11} + 3q^{12} + 2q^{13} + \cdots$$

なので $(i\infty)$ を零点にもたない. 従って (0) も零点にもたない. 特に $2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ と $2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, d\tau$ は一次独立である. $K = (i\infty) + (0)$ とおく. $x = 2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, d\tau / 2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ とおくと, x は $L(K)$ に属する非定数函数である. 実際, $(i\infty)$ の局所助変数 q で x を展開すると,

$$x = \frac{2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, d\tau}{2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau} = \frac{f_{23}|T_2(\tau)}{f_{23}(\tau)} = q^{-1} + 1 + 4q + 7q^2 + 13q^3 + 19q^4 + 33q^5 + 47q^6 + 74q^7 + \cdots$$

となるので, x は $(i\infty)$ で丁度 1 位の極をもつ. $X_0(23)$ の有理函数 $y \in L(3\,K)$ をうまく選んで, $X_0(23)$ を $y^2 = (x$ の 6 次多項式$)$ で定義することができる. $X_0(23)$ の正則微分は $\frac{dx}{y}$, $x\,\frac{dx}{y}$ を基底にもつ. ここで $\mathrm{div}(\frac{dx}{y}) = K$ なので, y を適当に定数倍して $\frac{dx}{y} = 2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ とおける. x の選び方から $x\,\frac{dx}{y} = 2\pi i\, f_{23}|T_2(\tau)\, d\tau$ となる. 以上により, 有理函数 y の局所助変数 q による展開が得られる.

$$y = \frac{dx}{2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau} = \frac{q}{f_{23}(\tau)}\,\frac{dx}{dq} = -q^{-3} - 2q^{-2} - q^{-1} + 12 + 67q + 228q^2 + 667q^3 + 1696q^4 + \cdots$$

有理函数 x, y は $y^2 = (x$ の 6 次多項式$)$ なる関係式を満たす. $y^2 - (x$ の 6 次多項式$) = 0$ なので左辺の q-展開の係数が 0 になるように x の多項式の係数を順に決めていけばよい. こうして x, y は

$$y^2 = x^6 - 2x^5 - 23x^4 - 50x^3 - 58x^2 - 32x - 11$$

を満たすことがわかる. よく知られた形に合わせるために x を $x - 1$ に置き換えると,

定理 5.37　$Y_0(23)$ は $y^2 = x^6 - 8x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 10x - 7$ で定義される非特異アフィン平面曲線で, $X_0(23)$ はその非特異完備化である. また $X_0(23)$ の函数体 (**モジュラー函数体** という) $A_0(23)$ は $\mathbb{C}$ 上

x, y で生成される．

問 61　$x = f_{23}|T_2(\tau)/f_{23}(\tau)$, $y = dx/2\pi i\, f_{23}(\tau)\, d\tau$ の q-展開を使って, x の多項式 $f(x)$ で $y^2 - f(x)$ の q-展開が正のベキしか現れないものが取れることを示せ．このとき有理函数として $y^2 - f(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

問 62　Hecke 作用素 T_2 は, 重さ 2 の尖点形式のなす 2 次元 $\mathbb{C}$ 線形空間 ($f_{23}(\tau)$, $f_{23}|T_2(\tau)$ を基底にもつ) の上に線形に作用する．$(f_{23}|T_2)|T_2(\tau) = f_{23}(\tau) - f_{23}|T_2(\tau)$ となることを使って, T_2 に関する固有形式を求めよ．

問 63　$[P_\infty - P'_\infty] \in \mathrm{Pic}^0(X_0(23))$ の 2 倍点, 3 倍点, 4 倍点, $\cdots$ を計算せよ．

§5.15　種数 2 のモジュラー曲線 $X_0(22)$

(a)　前節と同様に, 合同部分群 $\Gamma_0(22)$ に関するモジュラー曲線 $X_0(22) = \Gamma_0(22)\backslash\mathfrak{H}^*$ を考える．閉 Riemann 面 $X_0(22)$ もまた種数が 2 の超楕円曲線である．

$$f_{11}(\tau) = \eta(\tau)^2\, \eta(11\tau)^2 = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 + \cdots$$

は $\Gamma_0(11)$ の重さ 2 の尖点形式なので, $\Gamma_0(22)$ の重さ 2 の尖点形式でもある．

$$f_{22}(\tau) = f_{11}(2\tau) = \eta(2\tau)^2\, \eta(22\tau)^2 = q^2 - 2q^4 - q^6 + 2q^8 + q^{10} + 2q^{12} - 2q^{14} + \cdots$$

もまた $\Gamma_0(22)$ の重さ 2 の尖点形式で, $f_{11}(\tau)$ と一次独立である．

命題 5.38　(1)　$X_0(22)$ の尖点は $(i\,\infty)$, (0), $(1/2)$, $(1/11)$ の 4 点である．

(2)　$X_0(22)$ の微分 $2\pi i\, f_{11}(\tau)\, d\tau$ と $2\pi i\, f_{22}(\tau)\, d\tau$ の因子はそれぞれ $(0) + (1/11)$ と $(i\infty) + (1/2)$ である．

前節と同様に $x = f_{11}(\tau)/f_{22}(\tau)$, $y = dx/2\pi i\, f_{22}(\tau)\, d\tau$ をとおくと, $x \in L(K)$, $y \in L(3\,K)$ $(K = (i\infty) + (1/2))$ で, $y^2 = (x$ の 6 次式$)$ なる代数関係式を満たす．

定理 5.39　$X_0(22)$ は $y^2 = x^6 + 12x^5 + 56x^4 + 148x^3 + 224x^2 + 192x + 64$ で定義される種数 2 の超楕円曲線で, モジュラー函数体 $A_0(22)$ は $\mathbb{C}$ 上 x, y で生成される．$X_0(22)$ の尖点 $(i\infty)$, $(1/2)$ は 2 つの無限遠点に対応し, 残りの尖点 (0), $(1/11)$ はそれぞれ $(0, -8)$, $(0, 8)$ で表される点に対応する．特に $(i\infty)$ の近傍では $y = -x^3 - 6x^2 - 10x - 14 + 22x^{-1} - 88x^{-2} + 374x^{-3} + \cdots$ と $1/x$ の Laurent 級数に展開できる．

問 64　(1)　τ を $\mathfrak{H}^*$ の座標とする．尖点 $(i\infty)$, $(1/11)$, (0), $(1/2) \in X_0(22)$ の局所助変数として, $q = \exp(2\pi i\,\tau)$, $q_{11} = \exp(2\pi i\,(\tau/(1-11\tau))\,/2)$, $q_0 = \exp(2\pi i\,(-1/\tau)\,/22)$, $q_2 = \exp(2\pi i\,(\tau/(1-2\tau))\,/11)$ が取れることを示せ．

(2)　有理函数 x, y を各尖点の局所助変数で展開し, どの展開を使っても同じ代数関係式を満たすことを確かめよ．

(b)　超楕円曲線 $C = X_0(22)$ の超楕円対合は, 定義方程式 $y^2 = x^6 + 12x^5 + 56x^4 + 148x^3 + 224x^2 + 192x + 64$ のアフィン座標系 x, y で $\iota : (x, y) \longmapsto (x, -y)$ と書ける．定義方程式を相反型

$$(y/8)^2 = (x/2)^6 + 6(x/2)^5 + 14(x/2)^4 + 37/2(x/2)^3 + 14(x/2)^2 + 6(x/2) + 1$$

にまとめることができるので, C の Weierstrass 点の x-座標を置換する一次分数変換 $x \longmapsto 4/x$ がある．この一次分数変換は C の自己同型写像 σ, σ' に延びる．

$$\sigma : (x, y) \longmapsto (4/x, -8y/x^3)\ , \quad \sigma' : (x, y) \longmapsto (4/x, 8y/x^3)$$

$\sigma^2 = \mathrm{id}$, $\sigma' = \sigma\iota = \iota\sigma$ なので σ は ι と可換な位数 2 の自己同型写像である．C の自己同型群 $\mathrm{Aut}(C)$ は $(2, 2)$-型群 $\langle\iota, \sigma\rangle$ を部分群にもつ．$\mathrm{Aut}(C)$ の部分群 $\langle\sigma\rangle$, $\langle\sigma\iota\rangle$, $\langle\iota\rangle$ に関する商代数曲線をそれぞれ C_σ, C'_σ,

C_ι とおく. 超楕円対合 ι は 2 次被覆 $x : C \to \mathbb{P}^1$ の被覆変換群の生成元なので, $C_\iota \simeq \mathbb{P}^1$ である. C_σ, C'_σ に対して自然な被覆写像 $f : C \to C_\sigma$, $g : C \to C'_\sigma$ は 2 次 Galois 被覆で, Galois 群はそれぞれ $\langle\sigma\rangle$, $\langle\sigma\iota\rangle$ である. C_σ, C'_σ の種数はともに 2 より小さいが, もし C_σ の種数が 0 (C_σ が $\mathbb{P}^1$ に同型) なら, σ もまた $X_0(22)$ の超楕円対合でなければならない. 種数が 2 以上の超楕円曲線において超楕円対合は唯一つなので, C_σ は $\mathbb{P}^1$ に同型ではない. C_σ の種数は 1 である. 同じく C'_σ の種数も 1 である. 被覆写像 $f : C \to C_\sigma$, $g : C \to C'_\sigma$ が引き起こす, 因子類群の準同型写像

$$\begin{aligned} f^* &: \mathrm{Pic}^0(C_\sigma) \to \mathrm{Pic}^0(C) \qquad & f_* &: \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}^0(C_\sigma) \\ g^* &: \mathrm{Pic}^0(C'_\sigma) \to \mathrm{Pic}^0(C) \qquad & g_* &: \mathrm{Pic}^0(C) \to \mathrm{Pic}^0(C'_\sigma) \end{aligned}$$

をとる. f_*, g_* は明らかに全射で, 合成 $f_* \circ f^*$ は $\mathrm{Pic}^0(C_\sigma)$ の, $g_* \circ g^*$ は $\mathrm{Pic}^0(C'_\sigma)$ の 2-倍写像である. f, g は種数 2 の代数曲線から種数 1 の代数曲線への 2 次被覆なので, 丁度 2 点が分岐する. $P_1 \in C$ を f の分岐点とすると, $G_f = \langle\sigma\rangle$ なので $\sigma(P_1) = P_1$ となる. $\sigma(P'_1) = \sigma(\iota(P_1)) = \sigma\iota(P_1) = \iota\,\sigma(P_1) = \iota(\sigma(P_1)) = \iota(P_1) = P'_1$ なので, もう一つの分岐点は P'_1 である. 同様にして g の分岐点を P_2, $P'_2 \in C$ とおくことができる. 実際 P_1, $P'_1 = (-2, \pm 4\sqrt{-2})$ で, P_2, $P'_2 = (2, \pm 44\sqrt{2})$ である.

命題 5.40 (1) $P \in C$ に対して $f(\sigma\iota(P)) = f(P')$, $g(\sigma(P)) = g(P')$ が成り立つ.

(2) $\ker f^* = \langle f_*[P_2 - P'_2]\rangle$, $\ker g^* = \langle g_*[P_1 - P'_1]\rangle$ でともに位数 2 の巡回群をなす.

(3) $f_* \circ g^*$, $g_* \circ f^*$ は零写像である.

定理 5.41 $\varphi = (f_*, g_*) : \mathrm{Pic}^0(C) \ni [D] \longmapsto (f_*[D], g_*[D]) \in \mathrm{Pic}^2(C_\sigma) \times \mathrm{Pic}^0(C'_\sigma)$
$\psi = f^* + g^* : \mathrm{Pic}^0(C_\sigma) \times \mathrm{Pic}^0(C'_\sigma) \ni ([D_1], [D_2]) \longmapsto f^*[D_1] + g^*[D_2] \in \mathrm{Pic}^0(C)$
とおくと, $\psi \circ \varphi$ は $\mathrm{Pic}^0(C_\sigma) \times \mathrm{Pic}^0(C'_\sigma)$ の, $\varphi \circ \psi$ は $\mathrm{Pic}^0(C)$ の 2-倍写像である.

(c) 商代数曲線 C_σ の函数体 $\mathbb{C}(C_\sigma)$ はモジュラー函数体 $A_0(22) = \mathbb{C}(x, y)$ の $\langle\sigma\rangle$-不変体である. $\sigma(x) = 4/x$, $\sigma(y) = -8\,y/x^3$ より, $w = x + 4/x$, $z = y\,(x-2)/x^2$ は σ-不変である. $A_0(22) \supset A_0(22)^{\langle\sigma\rangle} = \mathbb{C}(C_\sigma) \supset \mathbb{C}(w, z)$ で, $[A_0(22) : \mathbb{C}(C_\sigma)] = [A_0(22) : \mathbb{C}(w, z)] = 2$ なので $\mathbb{C}(C_\sigma) = \mathbb{C}(w, z)$ を得る. 従って C_σ は

$$z^2 = (w-4)\,(w^3 + 12\,w^2 + 44\,w + 52)$$

で定義されるアフィン平面曲線と双有理同値で, その非特異完備化に一致する. §2.6 (d) の 2 つ目に従うと, C_σ は

$$v_1^2 = u_1^3 + 188\,u_1^2 + 11616\,u_1 + 234256$$

で定義される楕円曲線になる. ただし $u_1 = 484/(w-4)^2 = 484\,x/(x-2)^2$, $v_1 = 484\,z_1/(w-4)^2 = 484\,y/(x-2)^3$ とおいた. 楕円曲線において, 無限遠点を動かさない同型変換で, 少し雑な言い方だが, 係数ができるだけ小さくなるようにすることができる. こうして得られる楕円曲線の定義方程式を**極小 Weierstrass 方程式**という. 今の場合 $u = 121\,x/(x-2)^2 + 16$, $v = (121\,y/(x-2)^3 - 1)/2$ とおくと, 有理写像

$$f = (u, v) : X_0(22) \ni P \longmapsto (u(P), v(P)) \in \mathbb{P}^2$$

の像は Weierstrass 方程式 $v^2 + v = u^3 - u^2 - 10\,u - 20$ で定義される楕円曲線で, C_σ に同型である. この方程式は, モジュラー曲線 $X_0(11)$ の定義方程式と同じ物なので, C_σ は $X_0(11)$ と同型であることがわかる. u, v を尖点 $i\infty \in X_0(22)$ の局所助変数 $q = e^{2\pi i\tau}$ で展開すると,

$$\begin{aligned} u &= 16 + 121\,q + 726\,q^2 + 3751\,q^3 + 18150\,q^4 + 83853\,q^5 + 375826\,q^6 + 1647294\,q^7 + \cdots \\ v &= -61 - 726\,q - 5687\,q^2 - 37147\,q^3 - 216711\,q^4 - 1175273\,q^5 - 6050968\,q^6 - 29973878\,q^7 - \cdots \end{aligned}$$

となる. 従って C_σ の不変微分 $\omega = du/(2v+1)$ は

$$\omega = (-q + q^3 + 2\,q^4 - q^5 + 2\,q^7 - 4\,q^8 + 2\,q^9 - q^{11} - 2\,q^{12} - 4\,q^{13} + q^{15} + 4\,q^{16} + 2\,q^{17} + \cdots)\,\frac{dq}{q}$$

と q で展開される. $\Gamma_0(11)$ に関する重さ 2 の尖点形式 $f_{11}(\tau) = \eta(\tau)^2\,\eta(11\tau)^2$ の q-展開係数と比較すると偶数次の項が食い違っている. もう少しよく観察すると,

$$\omega = -2\pi i\,(f_{11}(\tau) + 2\,f_{22}(\tau))\,d\tau$$

が成り立ちそうで, 実際容易に示せる. モジュラー曲線 $X_0(11)$ と同型と言うなら, 不変微分が尖点形式 f_{11} に対応すべきなのだが. どうしてこの様なずれが生じたのであろうか.

C_σ と $X_0(11)$ との同型は, 単に同じ Weierstrass 方程式で定義された代数曲線だったからで, モジュラー函数体として $\mathbb{C}(u, v)$ $(\subset A_0(22))$ と $A_0(11)$ が一致したわけではない. $(\Gamma_0(11):\Gamma_0(22)) = 3$ なので, $A_0(11)$ は $A_0(22)$ の 3 次部分体になり, u, v は $A_0(11)$ に含まれない. モジュラー函数 u, v の level は 22 で 11 ではない. 一方, 尖点形式 $f_{11} + 2\, f_{22}$ は, $\Gamma_0(22)$ に関する重さ 2 の Hecke 固有形式である. Atkin-Lehner 対合 W_2, W_{11} に関しても, $f_{11}|W_2 = 2\, f_{22}$, $f_{22}|W_2 = 1/2\, f_{11}$, $f_{11}|W_{11} = -f_{11}$, $f_{22}|W_{11} = -f_{22}$ なので,

$$(f_{11} + 2\, f_{22})|W_2 = f_{11} + 2\, f_{22}\ , \quad (f_{11} + 2\, f_{22})|W_{11} = -(f_{11} + 2\, f_{22})$$

となる. C_σ には, 有理写像 $f : X_0(22) \to C_\sigma \subset \mathbb{P}^2$ を通して, モジュラー媒介変数表示 (modular parametrization) が与えられる. 楕円曲線 C_σ の不変微分はこの表示の下で, $\Gamma_0(22)$ に関する重さ 2 の Hecke 固有尖点形式 $f_{11}+2\, f_{22}$ に対応する. level 22 のモジュラー函数で媒介変数表示された C_σ の不変微分には, Atkin-Lehner 対合 W_2 の固有形式ではない level 11 の f_{11} よりも, level 22 の $f_{11} + 2\, f_{22}$ が対応するほうが自然であろう.

問 65 $W_2=\begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 22 & 2 \end{pmatrix}$, $W_{11}=\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$ とおく. $f|W_2(\tau) = \dfrac{2}{(22\tau + 2)^2}\, f(W_2\tau)$, $f|W_{11}(\tau) = \dfrac{11}{(22\tau + 11)^2}\, f(W_{11}\tau)$ で Atkin-Lehner 対合を定義する. η-函数の変換公式を使って, $f_{11}|W_2$, $f_{11}|W_{11}$, $f_{22}|W_2$, $f_{22}|W_{11}$ を計算せよ.

問 66 (1) $f = (u, v) : X_0(22) \to C_\sigma$ において, C_σ の無限遠点の逆像を求めよ.

(2) 尖点 $(i\infty)$, $(1/2)$, (0), $(1/11) \in X_0(22)$ の f による像を求めよ.

(3) 楕円曲線 C_σ の加法で $f((i\infty)) \in C_\sigma$ は 5 倍すると零元になることを示せ.

(4) $\mathrm{Pic}^0(X_0(22))$ において, 因子類 $[(i\infty) - (1/2)]$ は何倍かすると 0 になることを示せ.

問 67 (1) w, z の q-展開を計算し, z を $1/w$ の Laurent 級数に展開せよ.

(2) $s = (z + w^2 + 4w)/2$, $t = z\,(w + 2)/2 + w^3/2 + 3w^3 - w - 16$ とおく. s, t の q-展開を計算せよ.

(3) s, t の満たす代数関係式を求め, C_σ が $X_0(11)$ に同型であることを確かめよ.

(4) s, t による C_σ の定義方程式に関する不変微分を, 尖点形式 f_{11}, f_{22} で表せ.

問 68 商代数曲線 $C'_\sigma = X_0(22)/\langle\sigma\iota\rangle$ について, 上と同様の計算をしてみよ.

(1) $u = x/(x + 2)^2$, $v = (y/(x + 2)^3 - 1)/2 \in \mathbb{C}(X_0(22))$ は $\sigma\iota$ 不変であることを示せ.

(2) u, v を $X_0(22)$ の尖点 $(i\infty)$ の局所助変数 q に関する Laurent 級数に展開せよ.

(3) $\mathbb{C}(C'_\sigma) = A_0(22)^{\langle\sigma\iota\rangle} = \mathbb{C}(u, v)$ を示し, u, v の満たす代数関係式を求めよ.

(4) 上で求めた代数関係式で定義された楕円曲線としての C_σ について, 不変微分を q で展開せよ.

(5) C'_σ の不変微分を尖点形式 f_{11}, f_{22} で表せ.

(d) 上の被覆 $f : X_0(22) \to C_\sigma$ は, 尖点 $(i\infty) \in X_0(22)$ が C_σ の無限遠点に移るように作ってはいなかった. C_σ の座標を射影平面内で取り替えて $(i\infty)$ の像を無限遠点にすることができるが, 初めから $(i\infty)$ の像が (Weierstrass 方程式に関する) 無限遠点 (加法の零元) になるように, 被覆 $X_0(22) \to C_\sigma$ を作ってみる. このことにより, $(i\infty) \in X_0(22)$ の局所助変数 q の C_σ における意味がより直接的に見えるようになるであろう. 以下 $L(*)$ が多数出てくる. どの代数曲線上の有理函数か区別するために, 単に $L(*)$ と書くと $X_0(22)$ の有理函数からなるもの, $L_\sigma(*)$ と書くことで C_σ の有理函数からなるものを表すことにする.

有理写像 $f = (u, v) : X_0(22) \to C_\sigma \in \mathbb{P}^2$ を, 尖点 $(i\infty) \in X_0(22)$ が C_σ の零元 (Weierstrass 方程式での無限遠点) に移るものとする. 有理函数 $u, v \in A_0(22)$ で $(i\infty) \in X_0(22)$ の像が無限遠点に移るものを作ればよい. f は Galois 被覆なので, u, v は Galois 不変である. 従って $u_0, v_0 \in \mathbb{C}(C_\sigma)$ で $f^*u_0 = u$, $f^*v_0 = v$ となるものが取れる. u_0, v_0 を座標函数とする C_σ の定義方程式が Weierstrass 方程式になるためには, $\infty_\sigma \in C_\sigma$ を適当に選んで $u_0 \in L_\sigma(2\,\infty_\sigma)$, $v_0 \in L_\sigma(3\,\infty_\sigma)$ となればよい. このとき ∞_σ が無限遠点に相当する. 尖点 $(i\infty) \in X_0(22)$ は ∞_σ に移されるので, $(1/11) = \sigma(i\infty)$ もまた ∞_σ に移される.

$D_\sigma = f^*\infty_\sigma = (i\infty) + (1/11) \in \mathrm{Div}(X_0(22))$ とおく．D_σ は σ 不変なので，σ^* は $L(m\,D_\sigma)$ $(m \in \mathbb{Z})$ に作用する．$L(m\,D_\sigma)^\pm = \{h \in L(m\,D_\sigma)\,|\,\sigma^* h = \pm h\}$ とおくと，$L(m\,D_\sigma) = L(m\,D_\sigma)^+ \oplus L(m\,D_\sigma)^-$ と直和分解する．m を自然数とする．$h_0 \in L_\sigma(m\,\infty_\sigma)$ に対して，

$$\mathrm{div}(f^*h_0) = f^*\mathrm{div}(h_0) \geq f^*(-m\,\infty_\sigma) = -m\,D_\sigma$$

となり，f^*h_0 は σ 不変なので，線形写像 $L_\sigma(m\,\infty_\sigma) \ni h_0 \longmapsto f^*h_0 \in L(m\,D_\sigma)^+$ が定まる．そもそも $f^* : \mathbb{C}(C_\sigma) \to A_0(22)$ は単射なので，$L_\sigma(m\,\infty_\sigma)$ への制限も単射である．C_σ の種数は 1 なので $\ell_\sigma(m\,\infty) = m$ が成り立つ．以上より $\dim L(m\,D_\sigma)^+ = m$ $(m \in \mathbb{N})$ を得る．また $\ell(m\,D_\sigma) = 2\,m-1$ なので $\dim L(m\,D_\sigma)^- = m-1$ となる．

$\dim L(m\,D_\sigma)^+ = m$ より，$u \in L(2\,D_\sigma)^+ \setminus \mathbb{C}$, $v \in L(3\,D_\sigma)^+ \setminus L(2\,D_\sigma)^+$ が存在する．このとき，有理写像

$$f = (u,\, v) : X_0(22) \ni P \longmapsto (u(P),\, v(P)) \in C_\sigma \subset \mathbb{P}^2$$

が目的の 2 次被覆である．基礎曲線は Weierstrass 方程式で定義される非特異射影平面曲線 C_σ で，尖点 $(i\infty) \in X_0(22)$ は零元 (無限遠点 ∞_σ) にうつる．$(i\infty)$ において f は不分岐なので，$\infty_\sigma \in C_\sigma$ の局所助変数 q_0 で $f^*q_0 = q$ となるものが存在する．つまり，f は完備離散付値体の同型 $A_0(22)_{(i\infty)} \simeq \mathbb{C}(C_\sigma)_{\infty_\sigma}$ を引き起こす．この同型により局所体を同一視すれば，q は $\infty_\sigma \in C_\sigma$ の局所助変数となる．

(e) 上の手続きを具体的に実行してみる．$K_\infty = (i\infty) + (1/2)$, $K_0 = (0) + (1/11)$, $D_\sigma = (i\infty) + (1/11) \in \mathrm{Div}(X_0(22))$ とおく．(a) で，$x = f_{11}(\tau)/f_{22}(\tau)$, $y = dx/2\pi i\, f_{22}(\tau)\,d\tau \in A_0(22)$ と取ると，$x \in L(K)$, $y \in L(3\,K)$, $A_0(22) = \mathbb{C}(x,\, y)$ を満たす．$X_0(22)$ は $y^2 = x^6 + 12\,x^5 + 56\,x^4 + 148\,x^3 + 224\,x^2 + 192\,x + 64$ で定義される種数 2 の超楕円曲線で，尖点 $(i\infty)$, $(1/2)$ はその無限遠点にあたる．尖点 $(i\infty)$ の局所助変数 q で展開することで，y の $1/x$ に関する Laurent 級数展開 $(y = -x^3 - 6\,x^2 - 10\,x - 14 + 22\,x^{-1} - 88\,x^{-2} + 374\,x^{-3} + \cdots)$ を得た．η-函数の変換公式などを使って，$(1/2) \in X_0(22)$ の近傍でも y を $1/x$ で展開することができるが，$(i\infty)$ と $(1/2)$ が超楕円対合で移りあう無限遠点であることと，$1/x$ が無限遠点の局所助変数であることに注意すれば，直ちに

$$y = x^3 + 6\,x^2 + 10\,x + 14 - 22\,x^{-1} + 88\,x^{-2} - 374\,x^{-3} - \cdots$$

が言える．$v_1 = y - (x^3 + 6\,x^2 + 10\,x)$ とおく．$v_1 \in K(3\,K)$ だが $\mathrm{ord}_{(1/2)}(v_0) \geq 0$ なので，$v_1 \in L(3\,(i\infty))$ である．$\ell(3\,(i\infty)) = 3 - 2 + 1 = 2$ より，$L(3\,(i\infty)) = \mathbb{C} + \mathbb{C}\,v_1$ となる．$\sigma^*(i\infty) = (1/11)$ なので，$\sigma^* v_1 \in L(3\,(1/11))$, $L(3\,(1/11)) = \mathbb{C} + \mathbb{C}\,\sigma^* v_1$ となる．ここで $v = -(v_1 + \sigma^* v_1)/2$ とおくと，$v \in L(3\,D_\sigma)^+ \setminus L(2\,D_\sigma)^+$ となる．

有理函数 $x\,\sigma^* v_1$ を $(1/2)$ の近傍で展開すると

$$x\,\sigma^* v_1 = -8\,x - 88 - 176\,x^{-1} - 176\,x^{-2} + 176\,x^{-3} + 704\,x^{-4} - 2992\,x^{-5} + \cdots$$

となる．$u_1 = x\,\sigma^* v_1 + 8\,x$ とおくと，$L((i\infty) + 2\,(1/11)) = \mathbb{C} + \mathbb{C}\,u_1$ が従う．さらに $L(2\,(i\infty) + (1/11)) = \mathbb{C} + \mathbb{C}\sigma^* u_1$ なので $L(2\,D_\sigma) = \mathbb{C} + \mathbb{C}\,u_1 + \mathbb{C}\,\sigma^* u_1$ を得る．ここで $u = -(u_1 + \sigma^* u_1)/8$ とおくと，$u \in L(2\,D_\sigma)^+ \setminus \mathbb{C}$ を満たす．

以上で具体的に作った $u \in L(2\,D_\sigma)^+ \setminus \mathbb{C}$, $v \in L(3\,D_\sigma)^+ \setminus L(2\,D_\sigma)^+$ を使って，有理写像

$$f = (u,\, v) : X_0(22) \ni P \longmapsto (u(P),\, v(P)) \in C_\sigma \subset \mathbb{P}^2$$

を定義する．f は尖点 $(i\infty) \in X_0(22)$ を C_σ の無限遠点にうつす 2 次被覆で，f の像としての $C_\sigma \subset \mathbb{P}^2$ は

$$C_\sigma : v^2 + 17\,v = u^3 - 19\,u^2 + 110\,u - 284$$

で定義される．$(i\infty) \in X_0(22)$ の局所助変数 q により，座標函数 u, v と不変微分 $\omega = du/(2v + 17)$ は

$$u = 1/q^2 + 7 + q + 2\,q^2 + q^3 + 3\,q^4 - 3\,q^5 - 6\,q^7 + 2\,q^8 + 6\,q^9 + \cdots$$
$$v = 1/q^3 + 1/q - 7 - 2\,q + 2\,q^2 - 4\,q^3 + 6\,q^5 + 10\,q^6 - 7\,q^7 + 8\,q^8 + 2\,q^9 \cdots$$
$$\omega = (-q + q^3 + 2\,q^4 - q^5 + 2\,q^7 - 4\,q^8 + 2\,q^9 - q^{11} - 2\,q^{12} - 4\,q^{13} + q^{15} + 4\,q^{16} + 2\,q^{17} + \cdots)\,\frac{dq}{q}$$

と展開される．この場合もやはり $\omega = -2\pi i\,(f_{11}(\tau) + 2\,f_{22}(\tau))\,d\tau$ となる．C_σ のモジュラー媒介変数表示 u, v の与え方は少し面倒であったが，q-展開係数がちょっと驚くほど小さくなっていることを注意しておく．

問 69　上で得た $C_\sigma \subset \mathbb{P}^2$ の定義方程式から, C_σ は $X_0(11) : y^2 + y = x^3 - x^2 - 10\,x - 20$ に楕円曲線として同型であることを示せ. また C_σ の座標関数 u, v を, 尖点 $(1/11) \in X_0(22)$ の局所助変数 q_{11} で展開せよ.

問 70　(1)　尖点 $(0) \in X_0(22)$ を C_σ の無限遠点にうつす 2 次被覆 $f_0 = (u_0, v_0) : X_0(22) \to C_\sigma$ を与えよ.

(2)　座標函数 u_0, v_0 を $(0) \in X_0(22)$ の局所助変数 q_0 で展開せよ.

(3)　尖点 $(i\infty) \in X_0(22)$ を C'_σ の無限遠点にうつす 2 次被覆 $g = (u, v) : X_0(22) \to C'_\sigma$ を与えよ.

(4)　座標函数 u, v, 不変微分 ω を $(i\infty) \in X_0(22)$ の局所助変数 $q = \exp(2\pi i\,\tau)$ で展開せよ.

(5)　尖点 $(0) \in X_0(22)$ に対して, (3), (2) と同じことを試みよ.