第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.61-80

Abel-Jacobi の定理 I

軍司圭一 *

1 Introduction

この稿では Riemann 面の理論において最も基本的な定理と言うべき Abel-Jacobi の定理について概説する．X を種数 g のコンパクト Riemann 面とし，X 上の正則微分形式のなすベクトル空間の基底を $\omega_1, \ldots, \omega_g$ とおく．$\Lambda = \{(\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g) \in \mathbb{C}^g \mid \gamma \in H_1(X, \mathbb{Z})\}$ とおくと Λ は $\mathbb{C}^g$ の lattice であり，$\mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda$ はコンパクト複素 Lie 群となる．この状況の下で，Abel-Jacobi の定理 (Theorem 2.2, 4.2) は $\mathrm{Jac}(X)$ が後に述べる Picard 多様体の性質を満たすこと，すなわち 0 次の因子類群 $\mathrm{Pic}^0(X)$ と群同型であることを主張する．

この定理は古典的であり非常によく知られているが，その証明はそれほど易しくはない．本稿では証明や議論の流れは完全に，D. Mumford の教科書 ([Mum, Chapter II]) に依った．その他にも文献は非常に数多くあり，とても全部は網羅することはできない．代表的なものとしては [Shi, 第六章] や [Lan] などが挙げられるであろう．また本報告集でも紹介されるように，別な切り口からの証明として [Iwa] もあげておく．Mumford の議論の特徴的な点としては，theta 関数を前面に押し出していることがあげられる．とくにその (Riemann 面に引き戻した関数の) 零因子に関する情報を与える Riemann の定理 (定理 6.2) が，議論の一番のキーとなる．

ここではまず，Jacobi 多様体の幾何的な意味を完全に理解してもらうため，蛇足とは思ったが §2 で直線束と因子類群との関係から話を始め，その上で直線束のモジュライとしての Jacobi 多様体への意味づけを与える．§3，§4 で Jacobi 多様体及び次数 0 の因子類群からの周期写像の構成を具体的に与え，その上で Abel-Jacobi の定理の主張を述べる．定理の証明のために曲線の対称積 (§5) や theta 関数 (§6) を準備した後，いよいよ §7 が証明である．

なお代数幾何の知識を持っているものには，Abel-Jacobi の定理は非常に易しく思えるかもしれない．層の完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^\times \to 0$ から誘導される長完全列

$$\cdots \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \xrightarrow{\varphi} H^2(X, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

及び Poincaré 双対性 $H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathbb{Z})$ と Serre の双対定理 $H^1(X, \mathcal{O}_X) \simeq H^0(X, \Omega_X)^*$ より，$\mathrm{Jac}(X) = H^0(X, \Omega_X)^*/H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Pic}^0(X)$ は容易に導

*東京大学大学院数理科学研究科 COE ポスドク， E-mail gunji@ms.u-tokyo.ac.jp

かれるからである．しかし Serre の双対定理の証明は決して易しくはない．別の言い方をすれば，Abel-Jacobi の定理の証明の難しさは，Serre 双対性の定理の証明にあるといってもよい．

最後に一言述べておきたい．Jacobi 多様体は複素多様体としてではなく，代数多様体とみなすことによって初めてその重要性が認識されると思われる．代数幾何的な Jacobi 多様体の重要な性質は，それが元の代数曲線と同じ体上定義されているという点である．すなわち Jacobi 多様体は与えられた体 k 上のアーベル多様体の実例として重要なものであり，逆に言うと，例えば有理数体上定義された Jacobi 多様体以外のアーベル多様体の例を与えることはかなり難しい．その意味では，複素数体上に話を限った本稿は，整数論的な応用という立場から見ればかなり物足りないといえるかもしれない．しかしながら実際には，$\mathrm{Jac}(X)$ の代数的な構成は簡単ではない．構成の基となるのは曲線 X の g 次の対称積 $X^{(g)}$ であるが，$X^{(g)}$ の群構造は Zariski 開集合上でしか定義されない．ここからアーベル多様体を構成する手順はかなり複雑である．代数幾何的な構成の原論文は [Weil] であり，現代的なスキーム論の立場での解説としては [Mil]，[BLR] などがあげられよう．また [Ser] では，特異点を持つようなより一般化された代数曲線に対しても Jacobi 多様体を構成している．興味のある方は是非一度目を通してみてください (筆者も読んでいませんので，是非教えてください)．

2 Jacobi 多様体，Picard 多様体

2.1 直線束

X を種数 g のコンパクトなリーマン面 (あるいは $\mathbb{C}$ 上の代数曲線) とする．X 上の点の形式的な有限和 $\sum n_P P$ を X 上の因子と呼ぶのであった．与えられた因子 D に対して，Riemann-Roch の定理は $L(D) = \{X \text{ 上の有理型関数 } f \mid (f) + D \geq 0\}$，すなわち各点 P で高々 n_P 位の極を持つような関数の成す空間の次元についての情報を与えるものであった (例えば $\deg D > 2g-2$ ならば次元そのものを与える)．この空間 $L(D)$ は，直線束の大域切断とみなすのが自然である．これを以下説明しよう．

X の直線束とは，“局所的に $X \times \mathbb{C}$ となっているような多様体” のことである．今 $X = \bigcup U_\alpha$ なる開被覆及び $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ なる α, β に対して $U_\alpha \cap U_\beta$ 上の零点を持たない正則関数 $g_{\alpha\beta}$ が与えられていて，次の性質を満たすとする:

(1) $g_{\alpha\alpha} = 1$.

(2) $g_{\beta\alpha} = g_{\alpha\beta}^{-1}$.

(3) $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$ ($U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上).

このとき $\bigcup (U_\alpha \times \mathbb{C})$ 上に同値関係を次のように入れる: $U_\alpha \times \mathbb{C} \ni (x_\alpha, u_\alpha) \sim (x_\beta, u_\beta) \in U_\beta \times \mathbb{C}$ であるとは $x_\alpha = x_\beta$ かつ $u_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\alpha) u_\beta$. このとき $\mathcal{L} = \bigcup (U_\alpha \times \mathbb{C}) / \sim$ は複素多様体 (あるいは代数多様体) となり，$\pi\colon \mathcal{L} \to X$, $(x_\alpha, u_\alpha) \mapsto x_\alpha$ は well-defined な射影となる．

このようにして作られる $\mathcal{L}$ を X の直線束と呼ぶ．作り方より，直線束は張り合わせ関数 $\{g_{\alpha\beta}\}$ で決まる．2 つの直線束 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ が同型であるための条件は，その張り合わせ関数を $\{g_{\alpha\beta}\}$ 及び $\{g'_{\alpha\beta}\}$ としたとき (必要なら被覆を細分して共通のものをとっておく)，各 U_α 上に零点を持たない正則関数 h_α が存在して $g_{\alpha\beta} = h_\alpha^{-1} g'_{\alpha\beta} h_\beta$ が成り立つことである．

直線束の同型類全体を X の Picard 群と呼び，$\mathrm{Pic}(X)$ で表すことにする．名前のとおりこれには自然に群構造が入る．すなわち $\mathcal{L}$ の張り合わせ関数を $g_{\alpha\beta}$，$\mathcal{M}$ の張り合わせ関数を $h_{\alpha\beta}$ とするときに，張り合わせ関数が $g_{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$ で与えられるような直線束を $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ で表すことにする．この群構造の単位元はすべての g_{ij} が定数関数 1 で あるような直線束であり，これは $X\times\mathbb{C}$ に他ならない．これを自明な直線束といい $\mathcal{O}_X$ で表す．

$\Gamma(X,\mathcal{L}) = \{s\colon X \xrightarrow{\mathrm{hol}} \mathcal{L} \mid \pi\circ s = \mathrm{id}_X\}$ を $\mathcal{L}$ の大域切断と呼ぶ．自明な直線束に対しては $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ は X 上定義された正則関数であり，定数関数全体 $\mathbb{C}$ と等しい．しかし一般の直線束 $\mathcal{L}$ に対しては $\Gamma(X,\mathcal{L})$ はより複雑であり，0 のみになることもありえる．

定義から $\Gamma(X,\mathcal{L}) = \{f_\alpha\colon U_\alpha \xrightarrow{\mathrm{hol}} \mathbb{C} \mid f_\alpha/f_\beta = g_{\alpha\beta}\}$ が分かる．

2.2 因子類群との関係

今 $D = \sum_{i=1}^r n_iP_i$ を X 上の因子とする．X の開被覆 $X = \bigcup_k U_k$ を，各 P_i を含む開集合 U_i が P_j $(j\neq i)$ を含まないように選んでおく．各 k に対して，U_k 上の関数 f_k を以下のように与える: $P_i \in U_i$ のとき f_i は P_i にのみ n_i 位の零点 (または $|n_i|$ 位の極) を持つ有理型関数とし，$P_i \notin U_k$ $(1\le i\le r)$ のときは $f_k = 1$ と定める．このとき $U_i\cap U_j$ 上 $g_{ij} = f_i/f_j$ とおくとこれは張り合わせ関数の性質を満たし，これにより作られる直線束を $\mathcal{O}_X(D)$ と書くことにする．$\mathcal{O}_X(D)$ の同型類は f_i のとり方によらない．実際 f_i を f_iu_i で取り替えると u_i は U_i 上極も零点も持たない関数であり，g_{ij} は $u_ig_{ij}u_j^{-1}$ で置き換えられる．

これにより X の因子全体のなす群 $\mathrm{Div}(X)$ から $\mathrm{Pic}(X)$ への写像 φ が与えられるが，作り方から φ は群準同型になる．X 上の関数 f により与えられる因子 (f) 全体のなす群を $\mathrm{Div}^\ell(X)$ と書くとき，実は $\ker\varphi = \mathrm{Div}^\ell(X)$ が成り立つ．以下それを説明しよう．$D = \sum n_iP_i = (f)$ と仮定する．このとき U_i 上 P_i にのみ極または零点を持つような関数として $f|U_i$ を選ぶことができる．よって張り合わせ関数は $g_{ij} = f/f = 1$ となり，$\varphi(D) = \mathcal{O}_X$ である．逆に $\varphi(D) = \mathcal{O}_X$ なる $D = \sum n_iP_i$ をとる．U_i 上 P_i で n_i 位の極または零点をとる関数を f_i としたとき，仮定から U_i 上零点を持たない正則関数 h_i が存在して，$f_i/f_j = h_i^{-1}1h_j$ が成り立つ．すなわち f_ih_i たちは $U_i\cap U_j$ 上等しいので，互いに張り合って X 上の有理型関数 f を定める．このとき $(f) = \sum n_iP_i$ が成り立ち，$\ker\varphi = \mathrm{Div}^\ell(X)$ が分かる．

以上の考察から，φ は単射 $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^\ell(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ を誘導する．実はこれは全射になることが知られており，これによって $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^\ell(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ が導かれる．すなわち X の因子類群 (因子全体の線形同値類) は，X 上の直線束の同値類のなす群と同型である．

注意　上で述べたことは，層の完全列 $0 \to \mathcal{O}_X^\times \to \mathcal{K}_X^\times \to \mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times \to 0$ より誘導される

完全列

$$H^0(X,\mathcal{K}_X^\times) \to H^0(X,\mathcal{K}_X^\times/\mathcal{O}_X^\times) \to H^1(X,\mathcal{O}_X^\times) \to H^1(X,\mathcal{K}_X^\times) = 0$$

の帰結である．ここに $\mathcal{K}_X^\times$ で X 上の 0 でない有理型関数のなす層を表す．

$D = \sum n_i P_i \in \mathrm{Div}(X)$ に対して，P_i の近傍 U_i で定義された関数 f_i で，P_i にのみ n_i 位の零点 (または $|n_i|$ 位の極) を取るものを選んでおく．このときすでに述べたように $\Gamma(X,\mathcal{O}_X(D)) = \{h_\alpha \colon U_\alpha \xrightarrow{\mathrm{hol}} \mathbb{C} \mid h_\alpha/h_\beta = f_\alpha/f_\beta\}$ である．よって $h_\alpha f_\alpha^{-1}$ たちは貼り合わさって X 上の有理型関数 ψ を定める．このとき $(\psi)+D \geq 0$ が成り立ち，これによって

$$\Gamma(X,\mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\sim} L(D), \quad (h_i)_i \longmapsto \psi = (h_i f_i^{-1})_i$$

が分かる．すなわち $L(D)$ は D から定まる直線束の大域切断のなす空間と同型である．以上をまとめると次が成り立つ．

定理 2.1 (1) アーベル群の同型，$\mathrm{Div}(X)/\mathrm{Div}^\ell(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$, $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ が成り立つ．

(2) 各 $D \in \mathrm{Div}(X)$ に対して，$\Gamma(X,\mathcal{L}) \simeq L(D)$ が成り立つ．特に $\Gamma(X,\mathcal{L})$ は有限次 $\mathbb{C}$-ベクトル空間になる．

2.3 Picard 多様体としての Jacobi 多様体

コンパクトリーマン面 X 上に直線束はどのくらいあるのか，言い換えれば $\mathrm{Pic}(X)$ の構造がどうなっているのかを調べることは興味ある問題である．重要なのは $\mathrm{Pic}(X)$ には代数多様体 (あるいは射影的な複素多様体) の構造が入るという事実である．直線束たちの群演算により $\mathrm{Pic}(X)$ にも群構造が入り，すなわち $\mathrm{Pic}(X)$ は代数群になる．

$\mathrm{Pic}(X)$ 自体はやや “大きすぎる” 代数群であるため，もう少し細かく分けて調べるほうがよい．$\mathrm{Pic}(X)$ の元はすべて $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ の形をしており，因子 D は線形同値をのぞいて一意的に定まる．因子の次数は線形同値で不変であるから，これによって直線束の次数 $\deg\mathcal{L}$ が定まる．$\mathrm{Pic}^n(X)$ で次数が n であるような $\mathrm{Pic}(X)$ の元からなる部分集合を表すことにする．

このとき $\mathrm{Pic}^0(X)$ は部分群であり，$\mathrm{Pic}(X) = \coprod_n \mathrm{Pic}^n(X)$ と分解される．また X 上の点 P をとったとき $\mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Pic}^n(X)$, $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(nP)$ は全単射であるから，我々の目的は $\mathrm{Pic}^0(X) \simeq \mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{Div}^\ell(X)$ を調べることに帰着される．ただし $\mathrm{Div}^0(X)$ で次数 0 の因子からなる群を表す．

さてこの稿の一番の目的は，以下の定理について解説することである．

定理 2.2 X を種数 g のコンパクトリーマン面とする．このとき $\mathbb{C}^g$ の中にある格子 Λ が存在して，$\mathrm{Pic}^0(X)$ は g-次元複素トーラス $\mathbb{C}^g/\Lambda$ と群同型となる．

言い換えれば $\mathrm{Pic}^0(X)$ のパラメーター空間として，複素トーラス $\mathbb{C}^g/\Lambda$ が取れるということである．これを言い換えると “X 上の次数 0 の直線束のモジュライ空間は複素トーラス $\mathbb{C}^g/\Lambda$ である” ということになる．

注意　こうして作られる $\mathbb{C}^g/\Lambda$ は，単に複素トーラスというだけでなく，射影的な複素多様体である．これにより $\mathbb{C}^g/\Lambda$ には代数多様体の構造も入る．射影的な複素トーラスを ($\mathbb{C}$ 上の) アーベル多様体と呼ぶ．

例 2.1 $g=0$ の場合，$\mathrm{Pic}^0(X)=\{1\text{ 点}\}$ が定理の主張である．すなわち $\mathbb{P}^1$ の因子類は次数のみで決まってしまうということであるが，これは以下のようにして分かる．

$D=\sum_{i=1}^r(P_i-Q_i)$ を $\mathbb{P}^1$ 上の次数 0 の因子であるとする．例えば $P_l=P_{l+1}=\cdots=P_{i_r}=\infty$ であり，$P_i(1\le i<l), Q_i(1\le i\le r)\in\mathbb{C}$ であるならば，

$$\varphi(x)=\frac{\prod_{i=1}^{l-1}(x-P_k)}{\prod_{i=1}^{r}(x-Q_i)}$$

は $\mathbb{C}$ 上において，零点集合が $\{P_1,\dots P_{l-1}\}$，極の集合が $\{Q_1,\dots,Q_r\}$ となる．また無限遠点では分母と分子の次数を比較して $r-l$ 位の零点を持つことが分かる．ゆえに $(\varphi)=D$ である．

この例は極めて簡単であるが，本稿での Abel の定理の証明の雛形ともいえるものである．なお，下記の $g=1$ の場合同様，Riemann-Roch の定理からも容易に導ける．

例 2.2 $g=1$ の場合，次数が 1 の因子 D に対して，ただ一つの点 P が存在して $D\sim P$ となる．実際次数の関係から $L(K_X-D)=0$ が成り立つことに注意すると，Riemann-Roch の定理から $\dim L(D)=\deg D-1+g=1$ であり，D と線形同値な有効因子 P が唯一つ存在することが分かる．よって X 上の一点 P_0 を固定すれば，$X\to\mathrm{Pic}^0(X)$, $P\mapsto P-P_0$ は同型射になる．すなわち $\mathrm{Pic}^0(X)\simeq X=\mathbb{C}/\Lambda$ がなりたつ．

X がコンパクトリーマン面である場合，こうしてつくられた複素トーラス $\mathbb{C}^g/\Lambda$ を **Jacobi 多様体**と呼び，$\mathrm{Jac}(X)$ で表す．

$\mathrm{Pic}^0(X)$ がモジュライ空間であるということについて補足しておく．モジュライ空間とは単にパラメーター空間であるというだけではなく，より強い条件を満たすものである．$\mathbb{C}$ 上のスキームのなす圏 $\mathit{Sch}/\mathbb{C}$ から集合の圏 Set への反変関手 Pic^0_X を

$$T\longmapsto\frac{\{X\times T\text{ 上の次数 }0\text{ の直線束の同値類}\}}{\{\mathrm{pr}_T^*(\mathcal{L})\mid\mathcal{L}\text{ は }T\text{ 上の直線束}\}}$$

で定める．ただし pr_T は $X\times T$ から T への射影であるとし，$X\times T$ 上の直線束が次数 0 とは，T の各点で引き戻したときに次数が 0 であると定義する．

このとき関手 Pic^0_X は**表現可能** (representable) である．すなわち $\mathbb{C}$ 上の群スキーム $\mathsf{Pic}^0(X)$ が存在して

$$\mathit{Pic}^0_X(T)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathit{Sch}}(T,\mathsf{Pic}^0(X))$$

が成り立つ (群の同型)．このようなスキーム $\mathsf{Pic}^0(X)$ を精モジュライ (fine moduli) という．実は定理 2.2 より強い主張: 関手 Pic^0_X は表現可能で，精モジュライ $\mathsf{Pic}^0(X)$ として $\mathbb{C}^g/\Lambda$ が取れる，が成り立っている．

特に $T=\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ とすれば，X 上の直線束の同値類 $\mathit{Pic}^0_X(\mathbb{C})$ が $\mathbb{C}^g/\Lambda$ の各点と対応しているいう主張になる．これが定理 2.2 のいうところである．

注意　“次数 0” の条件をはずして関手 Pic_X を考えても表現可能である．この場合 $\mathrm{Pic}^0(X)$ はモジュライ群スキームの単位連結成分に相当する．

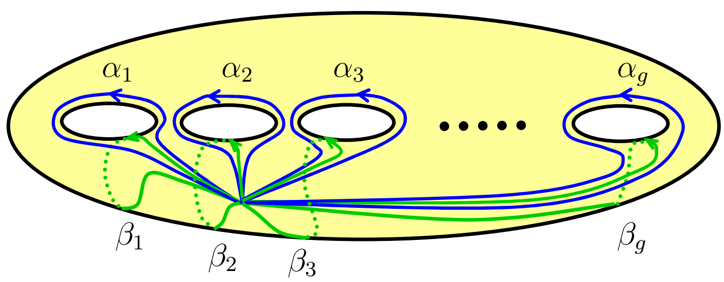
注意　X として一般の射影スキームを考えても (次数 0 の条件を適切に置き換えて) 同様の結果が成り立つ．特に X がアーベル多様体のとき，モジュライスキーム $\mathsf{Pic}^0(X)$ は双対アーベル多様体 $\widehat{X}$ になる．この場合，表現可能の定義で $T = \widehat{X}$ とおくと，$Pic^0_X(\widehat{X}) = \mathrm{Hom}(\widehat{X}, \widehat{X})$ であるから，$X \times \widehat{X}$ 上に $\mathrm{id}_{\widehat{X}}$ に対応する直線束が存在する．これが Poincaré 束に他ならない (cf [Ko])．

注意　Jacobi 多様体には，Albanese 多様体としての側面もある．一般に X を射影的な代数多様体とするとき，X に対してアーベル多様体 $\mathrm{Alb}(X)$ と写像 $\iota\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$ が存在して以下の普遍性を満たす: 任意のアーベル多様体 A と X から A への写像 f に対して，写像 $g\colon \mathrm{Alb}(X) \to A$ が唯一つ存在して $f = g \circ \iota$ が成り立つ．

このような性質を満たす $\mathrm{Alb}(X)$ を X の Albanese 多様体と呼ぶ．X がコンパクトリーマン面である場合には $\mathrm{Alb}(X) = \mathrm{Jac}(X)$ が成り立つ．すなわち，X の Picard 多様体と Albanese 多様体は一致している (実際，コンパクト Kähler 多様体 X に対しては，$\mathrm{Pic}^0(X)$ と $\mathrm{Alb}(X)$ は互いに双対である)．

3　複素トーラスとしての Jacobi 多様体の構成

X をコンパクトなリーマン面で種数を g とする．このとき X 上の $2g$ 個の path α_1, …, α_g, β_1, …, β_g を以下の図のように定める．



$H_1(X, \mathbb{Z})$ は階数が $2g$ の自由アーベル群となる．$H_1(X, Z)$ の交差積 $\langle\ ,\ \rangle$ を，X 上の 1-cycle γ と γ' に対して，γ が γ' を左から右に通過するように[1]一回交わっているとき $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 1$, $\langle \gamma', \gamma \rangle = -1$ として定める．すなわち上の図では

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0, \quad \langle \alpha_i, \beta_j \rangle = -\langle \beta_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$$

となる．

注意　交差積は次のようにして定義できる: Poincaré 双対性から

$$H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathbb{Z})$$

[1] [Mum, P.137] では逆向きになっているが，この稿と α_i, β_i の役割が逆になっているため，辻褄は合っている．

であるが，一方普遍係数定理より自然な非退化双線形形式

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \times H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

が存在する．これらの合成が交差積 $\langle\ ,\ \rangle$ である．

次に紹介する de Rham の定理は，$\mathbb{C}$-係数 de Rham コホモロジー $H_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C})$ と，singular コホモロジー $H^1_{\mathrm{sing}}(X,\mathbb{C})$ との間の自然な同型を与える．

定理 3.1 (de Rham の定理) 自然な写像

$$H^i_{\mathrm{dR}}(X,\mathbb{C}) \to H^i_{\mathrm{sing}}(X,\mathbb{C}) = H_i(X,\mathbb{C})^*, \quad [\omega] \mapsto \left(\gamma \mapsto \int_\gamma \omega\right)$$

は同型射となる．ただし $*$ は dual を表わし，最後の積分は，i-form を i-cycle 上積分することを意味する．

$H^0(X,\Omega_X)$ の元 ω は closed 1-form，すなわち $d\omega = 0$ である．実際 $d = \delta + \overline{\delta}$ と d を正則微分と反正則微分に分けると，ω が正則であることより $\overline{\delta}\omega = 0$，また $\delta\omega$ は正則 2-form になるが，X が複素 1 次元であることより $\delta\omega = 0$ も成り立つ．

以上の考察より，$H^1(X,\mathbb{C})$ は $2g$ 次元のベクトル空間であるが，その de Rham コホモロジーとしての基底として，$\omega_1, \ldots, \omega_g, \overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_g$ (の与える類) が選べることがわかる．以上より次が示された:

系 3.2 自然な写像

$$H_1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X,\Omega_X)^*, \quad \gamma \mapsto \left(\omega \mapsto \int_\gamma \omega\right)$$

は埋め込みを与える．

よって $H_1(X,\mathbb{Z})$ は g-次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $H^0(X,\Omega_X)^*$ の中の階数 $2g$ の離散部分群を与える．

$H^0(X,\Omega_X)^*$ の基底を固定して $\mathbb{C}^g$ と同一視し，そのもとで $H_1(X,\mathbb{Z})$ の像を Λ とかくことにすると Λ は階数が $2g$ の自由アーベル群になる．まずはこの Λ について詳しく調べよう．

定理 3.3 (Riemann の関係式および不等式)

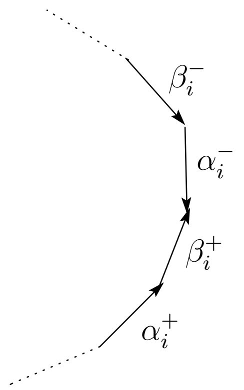
(1) ω, η を X 上の正則 1-form とするとき

$$\sum_{i=1}^g \left(\int_{\alpha_i} \omega \int_{\beta_i} \eta\right) - \sum_{i=1}^g \left(\int_{\alpha_i} \eta \int_{\beta_i} \omega\right) = 0.$$

(2) $\omega \neq 0$ を正則 1-form とするならば

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^g \overline{\int_{\alpha_i} \omega} \int_{\beta_i} \omega\right) > 0.$$

証明　X を α_i および β_i によって切り開くと $4g$ 角形ができる．1-cycle α_i, β_i の左側および右側をそれぞれ α_i^+, β_i^+ および α_i^-, β_i^- で表すことにすると以下の図のようになる．



$4g$ 角形の周囲 ∂X_0 は $\partial X_0 = \sum_{i=1}^g(\alpha_i^+ - \alpha_i^-) + \sum_{i=1}^g(\beta_i^+ - \beta_i^-)$ で与えられる[2]．

このとき X_0 は単連結であるから，ある X_0 上の正則関数 f が存在して，1-form η は $\eta = df$ の形で書くことができる．$f\omega$ は正則 1-形式より $d(f\omega) = 0$．よって Green の定理から

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{X_0} d(f\omega) \\
&= \int_{\partial X_0} f\omega \\
&= \sum_{i=1}^g \left(\int_{\alpha_i^+} f\omega - \int_{\alpha_i^-} f\omega + \int_{\beta_i^+} f\omega - \int_{\beta_i^-} f\omega \right) \\
&= \sum_i \int_{\alpha_i} (f|_{\alpha_i^+} - f|_{\alpha_i^-})\,\omega + \sum_i \int_{\beta_i} (f|_{\beta_i^+} - f|_{\beta_i^-})\,\omega.
\end{aligned}$$

ここで，$df = \eta$ は X 上定義されているから，当然 $\eta|_{\alpha_i^+} = \eta|_{\alpha_i^-}$ であり，よって $f|_{\alpha_i^+} - f|_{\alpha_i^-}$ は定数でなければならない．β_i は α_i^+ から α_i^- を結ぶ道であるから[3]，この値は $-\int_{\beta_i}\eta$ となる．

同様に $f|_{\beta_i^+} - f|_{\beta_i^-} = \int_\alpha \eta$ となり，結局

$$0 = -\sum_i \int_{\beta_i} \eta \int_{\alpha_i} \omega + \sum_i \int_{\alpha_i} \eta \int_{\beta_i} \omega$$

が成り立ち，(1) を得る．

(2) については $f = d\omega$ なる f をとれば上と同様の計算により，

$$\int_{X_0} d(\overline{f}\omega) = -\sum_i \overline{\int_{\beta_i} \omega} \int_{\alpha_i} \omega + \sum_i \overline{\int_{\alpha_i} \omega} \int_{\beta_i} \omega = 2i\,\mathrm{Im}\left(\sum_i \overline{\int_{\beta_i} \omega} \int_{\alpha_i} \omega \right)$$

[2] [Mum] とは逆の向きになっている．

[3] β が α を右から左に通過しているから

が成り立つことが分かる．一方

$$d(\overline{f}\omega) = d\,\overline{f} \wedge df = \left|\frac{df}{dz}\right|^2 d\overline{z} \wedge dz$$

であり，$z = x + iy$ とかくと， $d\overline{z} \wedge dz = 2i\,dx \wedge dy$ が成り立つ．ゆえに $\omega \neq 0$ ならば $(1/2i)\int \overline{f}\omega > 0$ であることから主張を得る． □

この定理から次の重要な結果を得る．

定理 3.4 $\omega_1, \ldots, \omega_n$ を $H^0(X, \Omega_X)$ の基底とする．$A_{ij} = \int_{\alpha_i} \omega_j$，$B_{ij} = \int_{\beta_i} \omega_j$ とすると，$\det(A_{ij})_{i,j} \neq 0$ であり，$\tau = A^{-1}B \in \mathbb{H}_g$ が成り立つ．ここに

$$\mathbb{H}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}(Z) > 0\ (\text{正定値})\}$$

と定める．

証明 $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$ がすべての α_i に対して $\int_{\alpha_i} \omega = 0$ を満たせば，定理 3.3 (2) から $\omega = 0$ である．よって $\det(A_{ij}) \neq 0$ が分かる．後半は，$H^0(X, \Omega_X)$ の基底を $\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$ となるように正規化しておく．定理 3.3 (1) で $\omega = \omega_i, \eta = \omega_j$ とすれば $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ となる．最後に (2) で $\omega = \sum a_i\omega_i$ とおけば，$a = {}^t(a_1, \ldots, a_g)$ に対して ${}^t\overline{a}\,\mathrm{Im}(\tau)a > 0$ $(a \neq 0)$ が成り立つことより主張を得る． □

これにより $H^0(X, \Omega_X)$ の基底 $\omega_1, \ldots, \omega_g$ を $\int_{\alpha_i} \omega_j = \delta_{ij}$ となるように選ぶことができる．この基底を使い $H^0(X, \Omega)^* \simeq \mathbb{C}^g$ と同一視すれば，

$$H^0(X, \Omega_X)^*/H_1(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau, \quad \Lambda_\tau = \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$$

が成り立つ．以下この基底を固定して議論を進めることとする．

補題 3.5 Λ_τ は $\mathbb{C}^g$ の格子 (lattice) を与える．

証明 実際

$$\det\begin{pmatrix} 1_g & \tau \\ 1_g & \overline{\tau} \end{pmatrix} \neq 0$$

であることから $\Lambda_\tau \otimes \mathbb{R} = \mathbb{C}^g$ であることが導かれる． □

定義 3.1 $\mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ とかいて，これをコンパクトリーマン面 X の **Jacobi 多様体**と呼ぶ．

4 周期写像と Abel-Jacobi の定理

コンパクトリーマン面 X 上の基点 P_0 を固定しておく．X 上の path γ に対して，簡単のため

$$\int_\gamma \underline{\omega} := \left(\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g$$

と記述することにする．このとき

$$\Lambda_\tau = \{\int_\gamma \underline{\omega} \in \mathbb{C}^g \mid \gamma \in H_1(X,\mathbb{Z})\}$$

となる．

定義 4.1 $D = \sum_i (P_i - Q_i) \in \mathrm{Div}^0(X)$ を次数 0 の因子とする (P_i および Q_i には重複があってもよい)．このとき写像 $I\colon \mathrm{Div}^0(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ を

$$I(D) = \sum_i \int_{Q_i}^{P_i} \underline{\omega} \mod \Lambda$$

で定める．

$\int_{Q_i}^{P_i} \underline{\omega} \mod \Lambda_\tau$ は Q_i から P_i への path のとり方によらない．実際 path の取替えは 1-cycle α_i, β_i 上での積分の整係数線形結合分のずれに相当するため，同じ Λ_τ-同値類に属する．よって特に写像 I は $D = \sum_i (P_i - Q_i)$ の書き方にもよらず well-defined であることが確かめられる．

補題 4.1 $D \in \mathrm{Div}^\ell(X)$ ならば $I(D) = 0$．すなわち I は $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Div}^0(X)/\mathrm{Div}^\ell(X)$ から $\mathrm{Jac}(X)$ への群準同型を導く．この写像も同じ I で表し，これを周期写像と呼ぶ．

証明 X 上の有理型関数 f をとる．f を X から $\mathbb{P}^1$ への写像と考え，$t \in \mathbb{P}^1$ に対して $f^{-1}(t) = D(t)$ を X の有効因子とみなすことにする．$\deg D(t)$ はすべての t に対して一定であるからこれを n とおく．今 X 上の基点 P_0 を固定しておき，

$$\phi\colon \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathrm{Jac}(X), \quad t \longmapsto \int_{nP_0}^{D(t)} \underline{\omega} \mod \Lambda_\tau$$

を考えるとこれは正則写像である．

ところが $\mathbb{P}^1$ は単連結ゆえ，ϕ は $\widetilde{\phi}\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}^g$ に持ち上がる．$\mathbb{P}^1$ 上定義された正則関数は定数のみであるから $\widetilde{\phi}$，よって ϕ は定数写像になる．特に $\varphi(0) = \varphi(\infty)$ であるが，$I(D) = \phi(0) - \phi(\infty)$ であるから主張を得る． □

定理 4.2 (Abel-Jacobi の定理) 周期写像 $I\colon \mathrm{Pic}^0(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ は同型射である．

この定理に関しては，周期写像の単射性を Abel が，全射性を Jacobi が示したとされている．以下これを証明するのがこの稿の目的であるが，その前に曲線の対称積との関連を述べておこう．

5 曲線の対称積

まず次の補題を示す．

補題 5.1 X を種数 g のコンパクトリーマン面とする．$P_0 \in X$ を基点として固定しておくと，任意の $D \in \mathrm{Div}^0(X)$ に対してある $P_1, \dots, P_g \in X$ が存在して，D は $P_1 + \cdots + P_g - gP_0$ と線形同値になる．

証明 $D + gP_0$ は次数が g の因子であるから，Riemann-Roch の定理より

$$l(D + gP_0) = l(K_x - D - gP_0) + \deg(D + gP_0) - g + 1 \geq g - g + 1 = 1$$

が成り立つ．よって $D + gP_0$ と線形同値な有効因子 $P_1 + \cdots + P_g$ が存在する． □

この補題から $\mathrm{Pic}^0(X)$ の代表系として $\sum_{i=1}^{g} P_i - gP_0$ の形のものが取れることがわかる．そこで

$$J \colon X^g := \underbrace{X \times \cdots \times X}_{g \text{ 個}} \to \mathrm{Jac}(X), \quad (P_1, \dots, P_g) \mapsto \sum_i \int_{P_0}^{P_i} \underline{\omega} \mod \Lambda_\tau$$

なる写像を考えると，$\mathrm{Im}\, J = \mathrm{Im}\, I$ が成り立つ．さらに J は P_i たちの並べ替えで不変であることに注意すると，$X^{(g)} = X^g/\mathfrak{S}_g$ ($\mathfrak{S}_g$ は g 次対称群) に対して J は $X^{(g)}$ から $\mathrm{Jac}(X)$ への写像を誘導する．

補題 5.2 $X^{(g)}$ は g-次元の複素多様体になる．すなわち特異点を持たない．こうして定まる $X^{(g)}$ を X の対称積と呼ぶ．

証明 $X^{(g)}$ で特異点の出てくる可能性のあるのは，$i \neq j$ に対して i 番目と j 番目の成分が等しくなるような点の近傍のみである．ところが P_i の X での局所座標を t_i と書いたとき，例えば $P_1 = \cdots = P_g = P$ なる点の近傍に対しては，t_i たちの基本対称式 $\sigma_i(t)$ が $(P, \dots, P)$ の局所座標を与えることが示される．よって g 個の独立な局所変数が取れるため，$X^{(g)}$ は $(P, \dots, P)$ で特異点を持たない． □

$\mathrm{Im}\, I = \mathrm{Im}\, J$ であったから，例えば周期写像 I の全射性を言うためには J が全射であることを示せばよい．J は複素多様体の間の正則写像であるから写像の幾何的な性質を使うことができる．これが対称積を考える利点の一つである．

実は J は "ほぼ同型" である (双有理写像)．すなわち $X^{(g)}$ と $\mathrm{Jac}(X)$ は "近い" 複素多様体であることが以下示される．

例 5.1 (種数 2 のリーマン面) C を種数 2 の代数曲線とする．このとき C は超楕円曲線であり，定義方程式は $y^2 = x^5 + \cdots$ で表わされる．今 $(x, y) \mapsto (x, -y)$ で与えられる対合 (hyperelliptic involution) を ι で表わすことにしよう．$(x, y) \mapsto x$ で与えられる写像 $f \colon C \to \mathbb{P}^1$ を考えると，各 $x \in \mathbb{P}^1$ に対してある $P \in C$ が存在して，$f^{-1}(x) = \{P, \iota(P)\}$ が成り立つ．すなわち $C/\langle \iota \rangle \simeq \mathbb{P}^1$ である．

対合 ι は以下のような特徴付けも出来る．すなわち K_C を C の標準因子としたとき，各点 $P \in C$ に対して Riemann-Roch の定理より

$$l(P) - l(K_C - P) = \deg P - g + 1 = 0$$

であるが，留数定理より $l(P)=1$，よって $l(K_C-P)=1$ が成り立つ．ゆえに $K_C \sim P+Q$ が成り立つような $Q \in C$ が唯一つ定まる．この Q が $\iota(P)$ に他ならない．さて，以上の準備の下で $C^{(2)}$ と $\mathrm{Pic}^0(C)$ の関係について調べてみよう．

C の基点 P_0 として，無限遠点 ∞ をとり，

$$\Psi\colon C^{(2)} \to \mathrm{Pic}^0(C), \quad (P_1,P_2) \mapsto P_1+P_2-2\infty$$

を考える．補題 5.1 から Ψ は全射になる．Riemann-Roch の定理から

$$l(P_1+P_2)=l(K_C-P_1-P_2)+\deg(P_1+P_2)+1-g=1+l(K_C-P_1-P_2)$$

が成り立つ．$P_2 \neq \iota(P_1)$ であれば $l(K_C-P_1-P_2)=0$ であり (次数が 0 であって主因子ではない)，ゆえに $l(P_1+P_2)=1$，すなわち P_1+P_2 と線形同値な有効因子は他に存在しない．これを言い換えると，

$$\mathcal{D}=\{(P,\iota(P)) \in C^{(2)}\}$$

と置いたときに，$C^{(2)} \setminus \mathcal{D}$ 上では Ψ は単射になる．一方任意の $P \in C$ に対して $P+\iota(P) \sim 2\infty \sim K_C$ であるから，$\Psi(\mathcal{D})=\{0\}$ が成り立つ．

$\mathcal{D} \simeq C/\langle\iota\rangle \simeq \mathbb{P}^1$ であり，実は自己交点数 $(\mathcal{D}^2)=-1$ が計算できる．ゆえに Castelnuovo の定理 ([Har, Theorem 5.7, Chapter V]) から $\mathcal{D}$ は例外因子となることが分かる．すなわちある曲面 Z と $\pi\colon C^{(2)} \to Z$ が存在して，ある $z_0 \in Z$ に対して $\pi^{-1}(z_0)=\mathcal{D}$ かつ $\pi\colon C^{(2)} \setminus \mathcal{D} \to Z \setminus \{z_0\}$ は同型写像になる (z_0 を中心とした blow-up)．Ψ から誘導される $\widetilde{\Psi}\colon Z \to \mathrm{Pic}^0(C)$ は全単射である．よってこのようにして作られる曲面 Z こそが，我々の求めている Jacobi 多様体 $\mathrm{Jac}(C)$ に他ならない．

注意　自己交点数 $(\mathcal{D}^2)=-1$ は以下のようにして計算できる．自然な写像 $\mathrm{pr}\colon C \times C \to C^{(2)}$ と対角埋め込み $\Delta\colon C \to C \times C$, $x \mapsto (x,x)$ に対して

$$\varphi\colon C \times C \xrightarrow{1\times\iota} C \times C \xrightarrow{\mathrm{pr}} C^{(2)}$$

を考えると $\mathcal{D}=\varphi(\Delta(C))$ であり，$\deg\varphi=2$ であることから $C \times C$ において $(\Delta(C)^2)=-2$ を証明すればよい．$C \times C$ 上での層の完全列

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{C\times C} \to \Delta_*\mathcal{O}_C \to 0$$

を考える．ここに $\mathcal{I}$ は閉埋め込み Δ に対応するイデアル層であり，$\mathcal{I} \simeq \mathcal{O}_{C\times C}(-\Delta(C))$ ([Har, Proposition 6.18, Chapter II])．　よって交点数の定義から $(\Delta(C)^2)=\deg \Delta^*\mathcal{O}_{C\times C}(\Delta(C))=-\deg\Delta^*\mathcal{I}$ が成り立つ．一方上の完全系列に局所自由層 $\mathcal{I}$ をテンソルすることにより

$$0 \to \mathcal{I}^2 \to \mathcal{I} \to \Delta_*\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{I} \to 0$$

を得る．すなわち $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \Delta_*\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{I}$ が成り立ち，よって $\Omega^1_C=\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \simeq \Delta^*\mathcal{I}$ である (Δ は閉埋め込みゆえ，C 上の任意の $\mathcal{O}_C$ 加群層 $\mathcal{F}$ に対して $\Delta^*\Delta_*\mathcal{F}=\mathcal{F}$ が成り立つことに注意)．以上より $(\Delta(C)^2)=-\deg\Omega^1_C=2-2g=-2$ が示された．　□

6 Riemann の theta 関数

この節ではいわゆる Riemann の theta 関数について解説する．保型形式の分野では実際の関数の構成に使うなど欠かせない道具であるが，ここで扱う Riemann の theta 関数は，$\mathbb{C}^g$-変数 z と $\mathbb{H}_g$-変数 τ に関する正則関数であり，一言で言うと "z の関数としてみれば $\mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ 上のある直線束の大域切断であり，($z=0$ として) τ の関数としてみると保型形式になるもの" である．

我々の目的との関連は，以下のようにして説明される．写像 I の単射性を調べるためには $\mathrm{Div}^\ell(X)$ について，すなわち X 上の有理型関数について調べることが必要である．しかし，与えられたリーマン面上の有理型関数を実際に構成するのは簡単ではない．よくある手法は X 上の直線束の大域切断の商として構成する方法である．そのためにまず $\mathrm{Jac}(X)=\mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ 上の直線束を構成し，それを写像

$$X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X), \quad P \longmapsto \int_{P_0}^{P} \underline{\omega} \mod \Lambda_\tau$$

によって引き戻して X 上の直線束の切断をえることを考える．このように構成すると，零点や極の位置が分かりやすい有理型関数が得られるのである[4].

定義 6.1 $z\in\mathbb{C}^g$ と $\tau\in\mathbb{H}_g$ に対して

$$\vartheta(z,\tau)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^g}\exp(\pi i{}^t l\tau l+2\pi i{}^t lz)$$

と定める．

容易に分かるように右辺の無限級数は $\mathbb{C}^g\times\mathbb{H}_g$ 上広義一様絶対収束していて，特に $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数を与える．

補題 6.1 $\vartheta(z,\tau)$ は次の性質を満たす:

(1) $\vartheta(z+m,\tau)=\vartheta(z,\tau), \quad m\in\mathbb{Z}^g;$

(2) $\vartheta(z+\tau m,\tau)=\exp(-\pi i{}^t m\tau m-2\pi i{}^t mz)\vartheta(z,\tau).$

さらに上記 (1), (2) の性質を満たす $\mathbb{C}^g$ 上の正則関数は $\vartheta(z,\tau)$ の定数倍に限る．

証明 前半は容易．後半はそのような関数 f をとるとまず (1) の性質から

$$f(z)=\sum_{l\in\mathbb{Z}^g}c_l e^{2\pi i{}^t lz}$$

と Fourier 展開されるが，さらに (2) の性質から Fourier 係数 c_n の間に関係式が得られる．すなわち $\mathbb{C}^g$ の標準基底 $u_1,\ldots,u_g$ に対して

$$c_{l+u_k}=\exp(2\pi i{}^t l\tau u_k+\pi i{}^t u_k\tau u_k)\,c_l$$

が成り立つ．ゆえに (1), (2) を満たす関数のなす空間の次元は 1 であり，それは $\vartheta(z,\tau)$ の定数倍でなければならない．

[4]Riemann 自身がどのような目的意識で theta 関数を考えたのかは筆者は知らない．

注意　上記補題は，このようにして作られる $\mathrm{Jac}(X)$ 上の直線束 $\mathcal{O}_X(\Theta)$ に対して $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(\Theta))$ が 1 次元であることを主張している．実は $\mathcal{O}_X(\Theta)$ は ample な直線束であり，これによって $\mathrm{Jac}(X)$ は主偏極をもつアーベル多様体であることが示される (cf. [Ko]).

次の Riemann 自身による定理がこの稿で最大の役割を果たす.

定理 6.2 X 上の基点 P_0 を固定しておく．$z \in \mathbb{C}^g$ に対して X 上の (多価) 関数 f_z を

$$f_z(P) = \vartheta(z + \int_{P_0}^{P} \underline{\omega}, \tau)$$

で定める．このとき Riemann 定数と呼ばれるある $\Delta \in \mathbb{C}^g$ が存在して以下の条件を満たす: $f_z \not\equiv 0$ であるような f_z の零点は重複をこめて g 個であり，それを $Q_1, \ldots, Q_g$ とかくと

$$\sum_{i=1}^{g} \int_{P_0}^{Q_i} \underline{\omega} \equiv -z + \Delta \mod \Lambda_\tau$$

が成り立つ.

注意　$f_z(P)$ の値は P_0 から P への path のとり方によるが，path の取替えは $\vartheta(z, \tau)$ の 0 でないスカラー倍の差しか引き起こさないため，$f_z(P)$ の零点の位置は定まる.

証明　定理 3.3 の証明と同じ記号を使う．f_z の零点 Q_i に対して (有限個)，その周りを回る小円盤を D_i で表わす．df_z/f_z は $X_0 \setminus \bigcup D_i$ 上の正則 1-form であり，よって closed form だから

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{X_0 \setminus \bigcup D_i} d\left(\frac{df_z}{f_z}\right) \\ &= \int_{\partial(X_0 \setminus \bigcup D_i)} \left(\frac{df_z}{f_z}\right) \\ &= -\sum_i \int_{D_i} \frac{df_z}{f_z} + \sum_{k=1}^{g} \int_{\alpha_k^+ - \alpha_k^-} \frac{df_z}{f_z} + \sum_{k=1}^{g} \int_{\beta_k^+ - \beta_k^-} \frac{df_z}{f_z}. \end{aligned}$$

さて，f_z は α_k たちに沿った path の取替えでは不変であるから，α_k が β_k^- から β_k^+ をつなぐ path であったことに注意すると $f_z|_{\beta_k^+} = f_z|_{\beta_k^-}$ が成り立つ．すなわち第 3 項は 0 である．一方 path β_k の取替えに関しては f_z は

$$\exp(-\pi i {}^t u_k \tau u_k - 2\pi i \int_{P_0}^{P} \omega_k + {}^t u_k z)$$

倍ずれる (u_k は $\mathbb{C}^g$ の単位ベクトル)．ゆえに, β_k が α_k^+ から α_k^- をつなぐ path であることに注意すれば，第 2 項は

$$\sum_{k=1}^{g} \left\{ \int_{\alpha_k^-} d(\log f_z) - \int_{\alpha_k^+} d(\log f_z) \right\} = \sum_{k=1}^{g} \int_{\alpha_k} 2\pi i \omega_k = 2\pi i g.$$

まとめると

$$0 = -\sum_i \int_{D_i} \frac{df_z}{f_z} + 2\pi i g$$

を得る．よって f_z の零点の数が g であることが分かった．

次に X_0 上 $\omega_k = dg_k$ とおく．$g_k(P_0) = 0$ と仮定してよい．1-form $g_k\, df_z/f_z$ に対して上記の議論を適用すると

$$0 = -\sum_{i=1}^{g} \int_{D_i} g_k \frac{df_z}{f_z} + \sum_{l=1}^{g} \int_{\alpha_l^+ - \alpha_l^-} g_k \frac{df_z}{f_z} + \sum_{l=1}^{g} \int_{\beta_l^+ - \beta_l^-} g_k \frac{df_z}{f_z}$$

を得る．まず第 1 項に関しては留数定理より

$$\int_{D_i} g_k \frac{df_z}{f_z} = 2\pi i g_k(Q_i) = 2\pi i \int_{P_0}^{Q_k} \omega_k$$

となる．第 3 項に関しては $g_k|_{\beta_l^+} - g_k|_{\beta_l^-} = \int_{\alpha_l} \omega_k = \delta_{kl}$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}\int_{\beta_l^+ - \beta_l^-} g_k \frac{df_z}{f_z} &= \delta_{kl} \int_{\beta_l} \frac{df_z}{f_z} = \delta_{kl} \int_{\beta_l} d(\log f_z) \\ &= \delta_{kl}(-\pi i {}^t u_l \tau u_l - 2\pi i \int_{P_0}^{P_1} \omega_l - 2\pi i {}^t u_l z + 2\pi i m_l)\end{aligned}$$

が成り立つ．ここに P_1 は path α_i, β_i たちの基点であり，m_l はある整数である．

最後に第 2 項は，$g_k|_{\alpha_l^+}$ と $g_k|_{\alpha_l^-}$ の差が $-\int_{\beta_l} \omega_k = -\tau_{kl}$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_l^+ - \alpha_l^-} g_k \frac{df_z}{f_z} &= \int_{\alpha_l^-} \left[(g_k - \tau_{kl}) \left(\frac{df_z}{f_z} - 2\pi i \omega_l \right) - g_k \frac{df_z}{f_z} \right] \\ &= 2\pi i \tau_{kl} n_l + 2\pi i \int_{\alpha_l^+} g_k \omega_l - 2\pi i \tau_{kl}\end{aligned}$$

となる．以上をまとめると

$$\sum_{i=1}^{g} \int_{P_0}^{Q_i} \omega_k = -z_k + \left[\frac{\tau_{kk}}{2} - \int_{P_0}^{P_1} \omega_k + \sum_l \tau_{kl} - \sum_l \int_{\alpha_k^+} g_k \omega_l \right] + m_k + \sum_l \tau_{kl} n_l$$

が成り立ち，定理の主張を得る． □

7 Abel-Jacobi の定理の証明

この節では，上記の Riemann の定理を用いて Abel-Jacobi の定理を証明する．まず全射性は容易に従う．実際 $f_{\Delta - z}$ を考えると，Riemann の定理は “$f_{\Delta - z} \not\equiv 0$ でなければその零点は $Q_1, \ldots, Q_g$ の重複をこめた g 個であり，$D = \sum Q_i$ に対して

$$J(D) = \sum_{i=1}^{g} \int_{P_0}^{Q_i} \underline{\omega} \mod \Lambda_\tau = z$$

が成り立つ" ことを主張している．そこで

$$\mathcal{E} = \left\{ z \in \mathrm{Jac}(X) \,\middle|\, f_{\Delta - z}(P) = \vartheta\left(\Delta - z + \int_{P_0}^{P} \underline{\omega}\right) = 0,\ \forall P \in X \right\}$$

とおくと $\mathcal{E}$ は $\mathrm{Jac}(X)$ の真の解析的な閉部分集合であり，$U = \mathrm{Jac}(X) \setminus \mathcal{E}$ は空でない開集合である．上の議論から $\mathrm{Im}\, J$ は U を含むが $X^{(g)}$ はコンパクトゆえ $\mathrm{Im}\, J$ は閉集合．ゆえに J は全射となる．

さらに幾何的な議論から，より詳しく次の結果が得られる．

定理 7.1 (Jacobi の逆定理) (1) $J\colon X^{(g)} \to \mathrm{Jac}(X) = \mathbb{C}^g/\Lambda_\tau$ は全射かつ双有理写像であり，$J\colon J^{-1}(U) \to U$ は同型射である．

(2) 任意の $P_1, \ldots, P_g \in X$ と $z \in \mathbb{C}^g$ に対して，$\sum_{i=1}^{g} \int_{P_0}^{P_i} \underline{\omega} \equiv z \bmod \Lambda_\tau$ ならば，各 i に対して $f_{\Delta - z}(P_i) = \vartheta(\Delta - z + \int_{P_0}^{P_i} \underline{\omega}) = 0$ である．逆に $z \in U$ に対しては $f_{\Delta - z}$ の零因子 $\sum_i P_i$ は

$$\sum_{i=1}^{g} \int_{P_0}^{P_i} \underline{\omega} \equiv z \bmod \Lambda_\tau$$

なる条件で一意的に定まる．

証明 $X^{(g)} \times \mathrm{Jac}(X)$ の解析的部分集合 W を

$$W = \left\{ \big((P_1, \ldots, P_g), z\big) \in X^{(g)} \times \mathrm{Jac}(X) \,\middle|\, \begin{array}{l} \sum \int_{P_0}^{P_i} \underline{\omega} \equiv z \bmod \Lambda_\tau, \\ f_{\Delta - z}(P_i) = 0\ (1 \le i \le g) \end{array} \right\}$$

と定める．W からの 2 つの射影

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ X^{(g)} & & \mathrm{Jac}(X) \end{array}$$

に関して，定理 6.2 より $\mathrm{pr}_2\colon \mathrm{pr}_2^{-1}(U) \to U$ は同型射である．実際 $z \in U$ に対して $f_{\Delta - z}$ の零点集合 $\{P_1, \ldots, P_g\}$ を取れば，$z \mapsto \big((P_1, \ldots, P_g), z)\big)$ は pr_2 の逆写像を与える．ゆえに $\mathrm{Im}\, \mathrm{pr}_2$ は U を含む閉集合であり (W がコンパクトに注意)，よって pr_2 は全射である．これより $\dim W \ge g$ が得られる．

一方 W の定義より pr_1 は単射であり，次元の比較から全単射であることが従う．すなわち W は J のグラフ $\{(x, J(x)) \mid x \in X^{(g)}\}$ に他ならない．ゆえに (2) の前半が成り立つ．(2) の後半及び (1) は今までの議論の帰結である． □

最後に周期写像の単射性を主張する Abel の定理の証明について述べる．示すべきことを改めて定理の形で述べておこう．

定理 7.2 (Abel の定理) $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_r$ を X 上の任意の点とする．$I(\sum_{i=1}^{r}(P_i - Q_i)) = 0$ であれば，重複をこめて $\{P_1, \ldots, P_r\}$ が零点，$\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ が極となるような X 上の有理型関数が存在する．

$f_z(P)=\vartheta(z+\int_{P_0}^{P}\underline{\omega},\tau)$ の零点についての情報は与えられているから，これを使って関数を構成することを考えよう．$\vartheta(z_0,\tau)=0$ となるような $z_0\in\mathbb{C}^g$ を一つとって固定する．このような z_0 に対して X 上の (多価) 関数を $\varphi_P(x)$ を

$$\varphi_P(x)=\vartheta(z_0+\int_P^x\underline{\omega},\tau)$$

と定めれば，当然これは $x=P$ で零点を持つ．これから

$$f(x)=\prod_{i=1}^{r}\frac{\varphi_{P_i}(x)}{\varphi_{Q_i}(x)}$$

を考えるというのが基本的な戦略である．

そのためにはまず $\varphi_P\not\equiv 0$ でなければならない．また φ_P の他の零点についても調べる必要がある．そのために補題を 2 つ用意しておく．

補題 7.3 各 $P\in X$ に対して

$$D_P=\left\{z\in\mathrm{Jac}(X)\;\middle|\;\vartheta(z+\int_P^y\underline{\omega})=0,\ \forall y\in X\right\}$$

は余次元 2 以上の解析的部分集合である．特に与えられた有限個の点 R_i $(1\le i\le r)$ に対して φ_{R_i} が自明にならないような ϑ の零点 z_0 が存在する．

証明 D を D_P の既約成分とし，$X_P=\{\int_P^y\underline{\omega}\mid y\in X\}$ とおく．このとき X_P+D は $\mathrm{Jac}(X)$ の既約閉集合であり，ϑ の零点集合に含まれるから $\dim(X_P+D)\le g-1$ となる．もし $\dim D=g-1$ ならば $D=D+X_P$ ゆえ，$D=D+X_P=D+\underbrace{X_P+X_P+\cdots+X_p}_{g\text{ 個}}=\mathrm{Jac}(X)$ となり (I の全射性) 矛盾である．ゆえに $\dim D\le g-2$. □

補題 7.4 $z_0\in\mathbb{C}^g$ を $\vartheta(z_0)=0$ かつ，$X\times X$ 上の関数 $\Phi_{z_0}(P,Q)=\vartheta(z_0+\int_P^Q\underline{\omega})\not\equiv 0$ となるようにとっておく．このとき $2g-2$ 個の点 $R_1,\ldots,R_{g-1},S_1,\ldots,S_{g-1}$ が存在して次を満たす:

$$\begin{aligned}&\{(P,Q)\in X\times X\mid\Phi_{z_0}(P,Q)=0\}\\=&\{(P,P)\in X\times X\}\cup\bigcup_{i=1}^{g-1}(\{R_i\}\times X)\cup\bigcup_{i=1}^{g-1}(X\times\{S_i\}).\end{aligned}$$

証明 y の関数として $\Phi_{z_0}(R,y)\not\equiv 0$ となるような R をとる．定理 6.2 から $\Phi_{z_0}(R,y)$ の零点は $y_1,\ldots,y_g$ の g 個であり，さらに定理 7.1 から $(y_1,\ldots,y_g)$ は条件

$$\sum_{i=1}^{g}\int_{P_0}^{y_i}\underline{\omega}\equiv\Delta-z_0-\int_R^{P_0}\underline{\omega}\mod\Lambda_\tau$$

の条件で唯一つ決まる $X^{(g)}$ の点であることが分かる．ところが $\Phi_{z_0}(R,R) = \vartheta(z_0 + \int_R^R \underline{\omega}) = 0$ であるから，$y_1 = R$ としてよい．よって $(y_2,\ldots,y_g)$ は条件

$$\sum_{i=2}^{g} \int_{P_0}^{y_i} \equiv \Delta - z_0 \mod \Lambda_\tau$$

で唯一つ決まる $X^{(g-1)}$ の点であり，この条件は R に依らない．よって $S_i = y_{i+1}$ と置くと，$\Phi_{z_0}(*,S_i) \equiv 0$, $(1 \leq i \leq g-1)$ が成り立つ．言い換えると，「y の関数として $\Phi_{z_0}(R,y) \not\equiv 0$ ならば，零点集合は $\{R,S_1,\ldots,S_g\}$」が示された．

逆に y の関数として $\Phi_{z_0}(R,y) \equiv 0$ となるような R は有限個であるが，それが $g-1$ 個あることを示せばよい．$S_1,\ldots,S_g$ と異なるような点 S_0 をとる．このとき $\Phi(*,S_0) \not\equiv 0$ であり，$\Phi_{z_0}(x,S_0) = 0$ となるような x は,「$x = S_0$，または y の関数として $\Phi_{z_0}(x,y) \equiv 0$ が成り立つような x」でなければならない．ところが $\Phi_{z_0}(x,S_0) = \Phi_{-z_0}(S_0,x)$ は x の関数として g 個の零点を持つ．それを $S_0,R_1,\ldots,R_{g-1}$ とおくと，$\Phi_{z_0}(R_i,*) \equiv 0$ である．

□

定理 7.2 の証明 補題 7.3 より与えられた P_i,Q_i に対して $\varphi_{P_i} \not\equiv 0$，$\varphi_{Q_i} \not\equiv 0$ となるような z_0 が存在するので，そのような z_0 を 1 つとって固定しておく．X 上の (多価) 関数

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\varphi_{P_i}(x)}{\varphi_{Q_i}(x)}$$

を考える．$f(x)$ が一価正則関数となるように，X 上の各点 x に対して P_i 及び Q_i から x への path の取り方を指定しなければならない．仮定より $I(\sum(P_i - Q_i)) = 0$，すなわち

$$(*) \qquad \sum_{i=0}^{r} \int_{P_0}^{P_i} \underline{\omega} \equiv \sum_{i=0}^{r} \int_{P_0}^{Q_i} \underline{\omega} \mod \Lambda_\tau$$

が成り立っている．このとき P_0 から P_i 及び Q_i への path γ_i, δ_i をうまくとって，$(*)$ の両辺が ($\mathrm{mod}\,\Lambda_\tau$ のみならず) 真に等しいと仮定してよい．このようにとった γ_i, δ_i に対して，$f(x)$ の定義式の path は以下のようにとるものとする: P_0 から x への path を一つ選んでおき，それと $-\gamma_i$ や $-\delta_i$ をつなげたものとして P_i, Q_i から x への path をとる．すると P_0 から x への path の取替えは $\int_{\alpha_i} \underline{\omega}$，$\int_{\beta_i} \underline{w}$ の整数係数線型結合，すなわち Λ_τ の元による平行移動での theta 関数の変換を引き起こし，その寄与は分子と分母でキャンセルされる．ゆえに $f(x)$ は X 上の一価有理関数として well-defined となる．

このとき φ_{P_i} (φ_{Q_i}) の零点は補題 7.4 から $P_i,S_1,\ldots,S_{g-1}$ $(Q_i,S_1,\ldots,S_{g-1})$ の g 個である．ゆえに $f(X)$ の零点は $P_1,\ldots,P_r$，極は $Q_1,\ldots,Q_r$ となって $(f) = D$ が成り立つ．

□

参考文献

[BLR] S. Bosch; W. Lütkebohmert; M. Raynaud, *Néron models*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 21. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Iwa] 岩澤健吉「代数函数論」岩波書店, 1973.

[Ko] 小林真一 “Algebraic theory via schemes” 本報告集.

[Lan] S. Lang, *Introduction to algebraic and abelian functions*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 89. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Mil] J. S. Milne, “Jacobian varieties” Chapter VII of *Arithmetic geometry*, Papers from the conference held at the University of Connecticut, Storrs, Connecticut, July 30–August 10, 1984. Edited by Gary Cornell and Joseph H. Silverman. Springer-Verlag, New York, 1986.

[Mum] D. Mumford, *Tata lectures on theta I*, Progress in Mathematics, 28. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1983.

[Ser] J. P. Serre, *Algebraic groups and class fields*, Graduate Texts in Mathematics, 117. Springer-Verlag, New York, 1988

[Shi] 清水秀男 「保型関数」, 岩波書店 1992.

[Weil] A. Weil, *Variétés abéliennes et courbes algébriques* Actualités Sci. Ind., no. 1064 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 8 (1946). Hermann & Cie., Paris, 1948.