第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.81-111

# Abel-Jacobi の定理 II

— 岩澤健吉著「代数函数論」の手法から —

尾崎 学*, 梅垣 敦紀†

本稿では，タイトルの通り岩澤健吉著「代数函数論」([1]) に基づいて，Abel-Jacobi の定理の証明を行う．講演時の通り，前半は梅垣，後半を尾崎が担当した．

目 次



*近畿大学理工学部, ozaki@math.kindai.ac.jp
†早稲田大学高等研究所, umegaki@gm.math.waseda.ac.jp (講演時の所属は「立教大学理学部」)

# 0 知識の確認

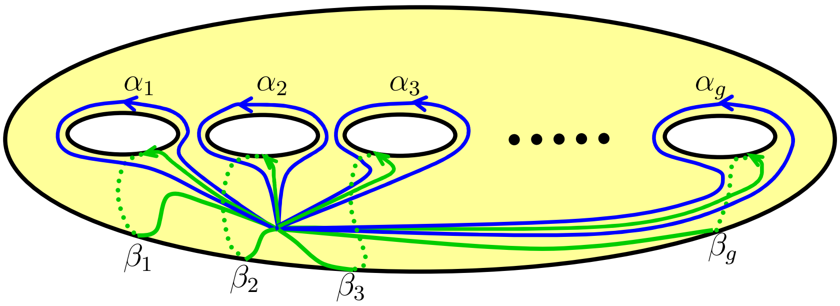
まず，吉冨氏・小川氏・軍司氏の各講でも説明されている知識について，以下を読むのに必要な分だけを [1] の書式に合わせて簡単にまとめ，記号を定義しておく．

## 0.1 1 次元ホモロジー群

コンパクト Riemann 面 $R$ 上の closed path $\gamma$ で生成される自由アーベル群を $Z_1(R, \mathbf{Z})$ で表し，**1 次元サイクル群**と呼ぶ．また，path のホモロジー同値を $\sim$ で表すとき，その部分群 $B_1(R, \mathbf{Z}) = \langle \gamma \mid \gamma \sim 0 \rangle_{\mathbf{Z}}$ を **1 次元バウンダリ群**と呼び，$Z_1(R, \mathbf{Z})$ を $B_1(R, \mathbf{Z})$ で割った商群 $H_1(R, \mathbf{Z})$ を **1 次元ホモロジー群**と呼ぶ．$R$ の種数を $g$ とするとき，

$$H_1(R, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{\oplus 2g}$$

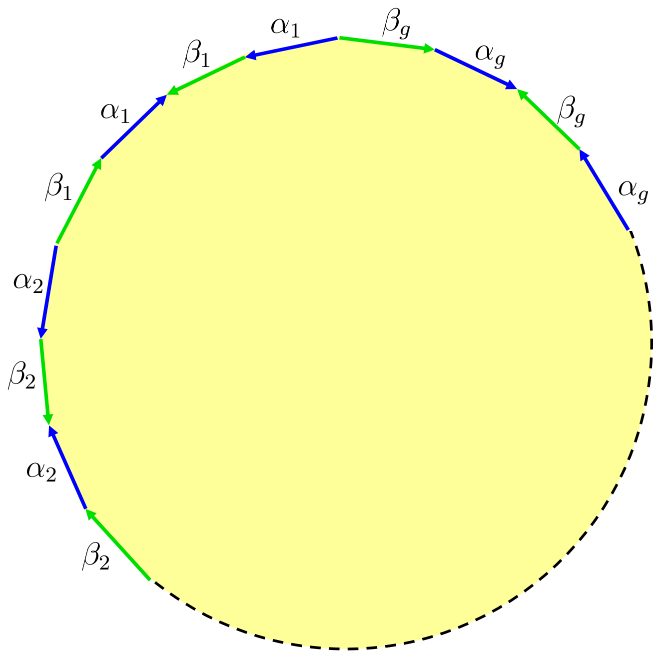
が成り立つ．




特に，具体的に $\alpha_i, \beta_j$ $(i, j = 1, \ldots, g)$ を図のようにとれば，

$$H_1(R, \mathbf{Z}) \cong \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g \rangle_{\mathbf{Z}}$$

が成り立つ．この $\alpha_i, \beta_j$ $(i, j = 1, \ldots, g)$ に沿って $R$ を切り開くと次の図で表されるような $4g$ 角形が得られる：




このように $R$ 上の path を固定した場合、$R$ の基本群 $\pi_1(R,\mathbf{Z})$ についても

$$\pi_1(R,\mathbf{Z}) = \langle \alpha_1,\ldots,\alpha_g,\beta_1,\ldots,\beta_g \mid [\alpha_1,\beta_1][\alpha_2,\beta_2]\cdots[\alpha_g,\beta_g]=1\rangle$$

となることがわかる．但し，交換子 $[\alpha_i,\beta_i]$ は $[\alpha_i,\beta_i]=\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1}$ とする．$\pi_1(R,\mathbf{Z})^{\mathrm{ab}} \cong H_1(R,\mathbf{Z})$ であることにも注意しておく．

**定義 0.1.** 上で決めた $R$ 上の path $\{\alpha_i,\beta_i\}_{i=1,\ldots,g}$ に対して，

$$(\alpha_i,\alpha_j)=0, \qquad (\beta_i,\beta_j)=0, \qquad (\alpha_i,\beta_j)=\delta_{ij}, \qquad (\alpha_i,\beta_j)=-(\beta_j,\alpha_i)$$

で定まる**交切数**（**【英】intersection number**）を定義する．さらに，任意の $\gamma_1,\gamma_2 \in H_1(R,\mathbf{Z})$ （または，$\gamma_1,\gamma_2 \in H_1(R,\mathbf{R}) = H_1(R,\mathbf{Z})\otimes\mathbf{R}$）に対しても，

$$\gamma_1 = \sum_{i=1}^{g}(c_i\alpha_i + d_i\beta_i), \qquad \gamma_2 = \sum_{i=1}^{g}(e_i\alpha_i + f_i\beta_i) \qquad (c_i,d_i,e_i,f_i \in \mathbf{Z})$$

（または，$c_i,d_i,e_i,f_i \in \mathbf{R}$）と書くことができるから，$(\gamma_1,\gamma_2)$ を

$$(\gamma_1,\gamma_2) := \sum_{i=1}^{g}(c_if_i - d_ie_i)$$

として

$$(\cdot,\cdot) : H_1(R,\mathbf{Z})\times H_1(R,\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

（または，$(\cdot,\cdot) : H_1(R,\mathbf{R})\times H_1(R,\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$）に延長する．

## 0.2 微分

以下で用いる微分の分類について定義しておく[1].

**定義 0.2.** $K$ を函数体とするとき,

$$\Omega_R^1 := \{\omega : \text{微分} \mid (\omega \neq 0 \text{ かつ } \omega \geq 0) \text{ または } \omega = 0\}$$

の元 $\omega$ を**第 1 種微分**と呼ぶ[2].

**定義 0.3.** $K$ の微分 $\omega$ が唯 1 つの点でだけ極をもつとき,**第 2 種微分**という.$\omega$ が相異なる 2 点においてだけそれぞれ 1 位の極をもつとき,$K$ の**第 3 種微分**という.

**注意 1.** $K$ の任意の微分は,第 1 種・第 2 種・第 3 種微分の和で書ける.また $K$ の微分全体の集合を $\Omega_{R,\mathrm{mel}}^1$ で表す.

[1]第 1 種・第 2 種・第 3 種という分類は本によって異なるので,注意が必要である.
[2][1] では $\mathfrak{L}_0$ と記されている.

# 1 Abel 積分

コンパクト Riemann 面上の微分に対する Abel 積分とその積分路を closed path $\gamma$ としてとった周期を定義し，特別な性質をもつ第 1 種微分と第 3 種微分の定義をする．この第 1 種微分は実周期（周期の実部）に関する条件から決まる $\omega_\gamma$ であり，第 3 種微分は Riemann 面上の 2 点 $P, Q$ に対して決まる $\omega_{P,Q}$ というものである．この特殊な形の 2 つ微分の間に成り立つ関係式が，Abel-Jacobi の定理を示す上で非常に重要になる．

## 1.1 Abel 積分と周期

$K/\mathbf{C}$ を代数函数体，$R$ を $\mathbf{C}(R) = K$ となるコンパクト Riemann 面とする．$R$ の微分 $\omega$ に対し，$R$ の path $\gamma$ 上で正則であるとき，

$$\int_\gamma \omega$$

が定義できる．この積分を **Abel 積分**と呼び，$\omega$ が第 1 種微分であるとき**第 1 種 Abel 積分**という．以下では，$R$ の path $\gamma$ というときは，

$$\boxed{\text{考えている微分の極は } \gamma \text{ 上には存在しない}}$$

ことを常に仮定しておく[3]．

また，$\gamma$ が closed path であるとき，$\displaystyle\int_\gamma \omega$ の値を $\gamma$ に関する $\omega$ の**周期**という．

**注意 2.** $\omega \in \Omega^1_{R,\mathrm{mel}}$ が Hasse 微分 $wdz$ として表現されたとき，

$$[0,1] \longrightarrow \gamma, \qquad s \mapsto P(s)$$

とすると，

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 w\frac{dz}{ds}ds \qquad (z = z(P(s)), w = w(P(s)))$$

であって，また，$\gamma$ を $t$ 平面上の曲線と見做せるとき，$dz = z'(t)dt$ とすると，

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma w\frac{dz}{dt}dt \qquad \left(\frac{dz}{dt} = z'(t)\right)$$

という線積分である．

**定理 1.1.** $\omega$ を第 1 種及び第 2 種微分の和で表される微分として，$\gamma_1, \gamma_2$ を $R$ 上の closed path とする．このとき，$\gamma_1 \sim \gamma_2$ ならば，

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \tag{1}$$

が成り立つ．

[3] この仮定を明確にした言葉として [1] では解析曲線という用語が用いられている．

$R$ の種数を $g \geq 1$ として，$\omega$ が第 1 種微分であるとする．

$$H_1(R, \mathbf{Z}) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2g} \rangle$$

とすれば，$R$ の任意の path $\gamma$ は

$$\gamma \sim \sum_{i=1}^{2g} c_i \gamma_i \qquad (c_i \in \mathbf{Z})$$

と書けるから，$\zeta_i = \displaystyle\int_{\gamma_i} \omega$ とおけば，

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{2g} c_i \zeta_i \tag{2}$$

が成り立つ．このことから，$(\zeta_1, \ldots, \zeta_{2g})$ を**基本周期系**と呼ぶ．

## 1.2 Riemann の関係式と不等式

この基本周期系に対して，以下の重要な事実が成り立つ．

**定理 1.2.** $K$ を種数 $g \geq 1$ の代数函数体として，$R$ を対応するコンパクト Riemann 面，$\alpha_i, \beta_i$ を $H_1(R, \mathbf{Z})$ の生成元，即ち，

$$H_1(R, \mathbf{Z}) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_{g+1}, \ldots, \beta_{2g} \rangle_{\mathbf{Z}}$$

として定める．このとき，$K$ の 2 つの第 1 種微分 $\omega, \omega'$ の $\alpha_i$, $\beta_i$ に関する基本周期系を

$$\zeta_i = \int_{\alpha_i} \omega, \qquad \zeta_{g+i} = \int_{\beta_{g+i}} \omega,$$
$$\zeta'_i = \int_{\alpha_i} \omega', \qquad \zeta'_{g+i} = \int_{\beta_{g+i}} \omega',$$

とすると，

$$\sum_{i=1}^{g} (\zeta_i \zeta'_{g+i} - \zeta_{g+i} \zeta'_i) = 0 \tag{3}$$

が成り立つ．さらに，$\zeta_i$ を実部と虚部に分けて

$$\zeta_i = \xi_i + \eta_i \sqrt{-1} \qquad (i = 1, \ldots, 2g)$$

とおけば，$\omega \neq 0$ であれば，

$$\sum_{i=1}^{g} (\xi_i \eta_{g+i} - \xi_{g+i} \eta_i) > 0 \tag{4}$$

が成り立つ．

**注意 3.** (3) を **Riemann の関係式**，(4) を **Riemann の不等式**という．

*Proof.* $\alpha_i, \beta_i$ は 82 ページの図の通りとして，path

$$\Gamma = [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] \cdots [\alpha_g, \beta_g]$$

を考える．$\Gamma$ で囲まれた領域を $U$ として，$U$ の内部の点 $P_0$ を固定する．このとき，関数 $\omega_0, \omega_0'$ を

$$\omega_0 = \omega_0(P) = \int_{P_0}^{P} \omega,$$
$$\omega_0' = \omega_0'(P) = \int_{P_0}^{P} \omega'$$

で定めると，$U$ 内で 1 価正則な関数である．ゆえに，

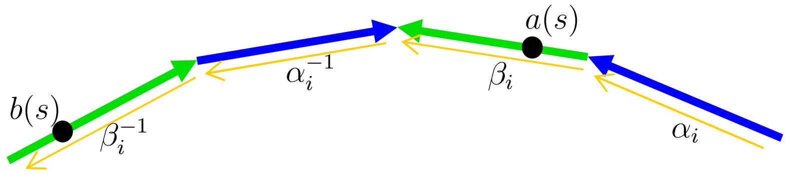
$$\int_{\Gamma} \omega_0 d\omega_0' = 0$$

となる．

ここで，左辺の積分を計算してみる．そのために，$\Gamma$ 上の 4 辺からなる path $\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1}$ をとり，path $\alpha_i$ 上に

$$[0, 1] \longrightarrow \alpha_i, \qquad s \mapsto a(s)$$

で対応する点




$$\begin{aligned}
&\omega_0(b(s)) - \omega_0(a(s)) \\
=&(\omega_0(b(s)) - \omega_0(P_0^{(3)})) + (\omega_0(P_0^{(3)}) - \omega_0(P_0^{(2)})) + (\omega_0(P_0^{(2)}) - \omega_0(a(s))) \\
=&\int_{P_0^{(3)}}^{b(s)} \omega + \int_{\beta_i} \omega + \int_{a(s)}^{P_0^{(2)}} \omega = \int_{\beta_i} \omega \\
=&\zeta_{g+i}
\end{aligned}$$

だから，

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_i} \omega_0(P) d\omega_0' &= \int_0^1 \omega_0(a(s)) \frac{d\omega_0'}{ds} ds \\
&= \int_0^1 \omega_0(b(s)) \frac{d\omega_0'}{ds} ds - \zeta_{g+i} \int_0^1 \frac{d\omega_0'}{ds} ds \\
&= -\int_{\alpha_i^{-1}} \omega_0 d\omega_0' - \zeta_{g+i} \int_{\alpha_i} \omega' \\
&= -\int_{\alpha_i^{-1}} \omega_0 d\omega_0' - \zeta_{g+i}\zeta_i'
\end{aligned}$$

となるから，

$$\int_{\alpha_i} \omega_0 d\omega_0' + \int_{\alpha_i^{-1}} \omega_0 d\omega_0' = -\zeta_{g+i}\zeta_i'$$

が成り立つ．同じ操作を $\beta_i$ 上で考えれば，

$$\int_{\beta_i} \omega_0 d\omega_0' + \int_{\beta_i^{-1}} \omega_0 d\omega_0' = \zeta_i\zeta_{g+i}'$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \omega_0 d\omega_0' &= \sum_{i=1}^{g} \left( \int_{\alpha_i} \omega_0 d\omega_0' + \int_{\beta_i} \omega_0 d\omega_0' + \int_{\alpha_i^{-1}} \omega_0 d\omega_0' + \int_{\beta_i^{-1}} \omega_0 d\omega_0' \right) \\ &= \sum_{i=1}^{g} (\zeta_i\zeta_{g+i}' - \zeta_{g+i}\zeta_i')\end{aligned}$$

が成り立つから，Riemann の関係式が示せた．

次に，$\xi(P), \eta(P)$ を

$$\omega_0(P) = \xi(P) + \sqrt{-1}\eta(P)$$

で定める．さきの計算と同様に，

$$\xi(b(s)) = \xi(a(s)) + \xi_i$$

であって，

$$\int_{\alpha_i} d\eta = \mathrm{Im}\left(\int_{\alpha_i} \omega\right) = \mathrm{Im}(\zeta_i) = \eta_i$$

であるから，

$$\int_{\Gamma} \xi d\eta = \sum_{i=1}^{g} (\xi_i\eta_{g+i} - \xi_{g+i}\eta_i) \tag{5}$$

が成り立つ．Green の定理から

$$\int_{\Gamma} \xi d\eta = \iint_U \left( \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} \right) dxdy$$

が成り立つから，$\omega_0(P)$ が正則関数なので $\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \dfrac{\partial\eta}{\partial y}, \dfrac{\partial\xi}{\partial y} = -\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$ であることに注意すれば，

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \xi d\eta &= \iint_U \left( \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \right) dxdy \\ &> 0\end{aligned}$$

となって，(5) と合わせれば，Riemann の不等式が成り立つことがいえる． □

## 1.3 ベクトル空間 $\Omega^1_R$

第 1 種微分に対してその周期を取るという写像が同型写像を与えることが Riemann の不等式からすぐにわかる．

**Claim 1.** $\omega$ を $K$ の第 1 種微分として，$(\zeta_1, \ldots, \zeta_g)$ をその $\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ に関する周期とする．このとき，

$$\omega \mapsto (\zeta_1, \ldots, \zeta_g) \tag{6}$$

によって，同型写像

$$\Omega^1_R \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^g \tag{7}$$

が得られる．

*Proof.* $\omega$ をすべての $i = 1, \ldots, g$ について $\zeta_i = 0$ を満たす第 1 種微分とすると，$i = 1, \ldots, g$ について $\xi_i = \eta_i = 0$ だから，Riemann の不等式 (4) の左辺について

$$\sum_{i=1}^{g} (\xi_i \eta_{g+i} - \xi_{g+i} \eta_i) = 0$$

となり $\omega = 0$ となるから，上の写像は単射である．したがって，$\dim_{\mathbf{C}} \Omega^1_R = g$ だから，上の写像は同型である． □

したがって，逆に，任意の $(z_1, \ldots, z_g) \in \mathbf{C}^g$ に対し，

$$\int_{\alpha_i} \omega = z_i \qquad (i = 1, \ldots, g)$$

を満たす第 1 種微分 $\omega$ が存在することがわかる．

同じことを $\mathbf{R}$ 上でも考えることができて，次の主張が成り立つ．

**Claim 2.** $\omega$ を $K$ の第 1 種微分として，

$$\xi_i = \mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_i} \omega\right), \qquad \xi_{g+i} = \mathrm{Re}\left(\int_{\beta_i} \omega\right)$$

で $(\xi_1, \ldots, \xi_{2g}) \in \mathbf{R}^{2g}$ を定める．このとき，

$$\omega \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_{2g}) \tag{8}$$

によって，同型写像

$$\Omega^1_R \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^{2g} \tag{9}$$

が得られる．

*Proof.* $i=1,\dots,2g$ に対して $\xi_i=0$ とすると，Riemann の不等式 (4) の左辺について

$$\sum_{i=1}^{g}(\xi_i\eta_{g+i}-\xi_{g+i}\eta_i)=0$$

となり $\omega=0$ となるから，上の写像は単射である．したがって，$\dim_{\mathbf{R}} \Omega_R^1=2g$ だから，上の写像は同型である．□

上と同様に，逆に，任意の $(x_1,\dots,x_{2g})\in\mathbf{R}^{2g}$ に対し，

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_i}\omega\right)=x_i,\quad \mathrm{Re}\left(\int_{\beta_i}\omega\right)=x_{g+i}\qquad(i=1,\dots,g)$$

を満たす第 1 種微分 $\omega$ が存在することがわかる．

## 1.4　第 3 種微分 $\overline{\omega}_{P,Q}$ と $\omega_{P,Q}$

Abel-Jacobi の定理には特殊な第 3 種微分が必要になる．それは 2 点 $P,Q$ を決めると定まるものである．

**Claim 3.** $P,Q$ を固定したとき，任意の $i=1,\dots,g$ について

$$\int_{\alpha_i}\overline{\omega}_{P,Q}=0$$

を満たし，かつ，

$$\operatorname*{Res}_P\overline{\omega}_{P,Q}=1,\qquad \operatorname*{Res}_Q\overline{\omega}_{P,Q}=-1$$

を満たす第 3 種微分 $\overline{\omega}_{P,Q}$ が唯 1 つ存在する．

*Proof.* Riemann-Roch の定理から $l(W+P+Q)=g+1,\ l(W)=g$ だから，$P$ と $Q$ で 1 位の極をもつ微分 $\omega$ が存在する．ここで，その $P$ における留数を $\alpha$ とすれば，留数定理によって $Q$ における留数は $-\alpha$ となる．よって，$\frac{1}{\alpha}\omega$ を考えれば，$P,Q$ における留数はそれぞれ 1, $-1$ となる．さらに，条件を満たす $\overline{\omega}_{P,Q}$ が存在したとすると，$\overline{\omega}_{P,Q}-\frac{1}{\alpha}\omega$ は第 1 種微分であるから，Claim 1 よりこのような第 1 種微分が存在することがわかる．したがって，$\overline{\omega}_{P,Q}$ が存在することがいえた．□

Claim 1 の代わりに Claim 2 を使えば同様の主張が言える．

**Claim 4.** $P,Q$ を固定したとき，任意の $i=1,\dots,g$ について

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_i}\omega_{P,Q}\right)=0,\qquad \mathrm{Re}\left(\int_{\beta_i}\omega_{P,Q}\right)=0$$

を満たし，かつ，

$$\operatorname*{Res}_P\omega_{P,Q}=1,\qquad \operatorname*{Res}_Q\omega_{P,Q}=-1$$

を満たす第 3 種微分 $\omega_{P,Q}$ が唯 1 つ存在する．

## 1.5 第 1 種微分 $\omega_\gamma$ と双対性

上述と同様に $\{\gamma_i\}_{i=1,\ldots,2g}$ を

$$H_1(R,\mathbf{Z}) = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{2g} \rangle$$

を満たすようにとれば，任意の $\gamma \in Z_1(R,\mathbf{R}) = Z_1(R,\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R}$ に対し，

$$\gamma \sim \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \gamma_i \qquad (\lambda_i \in \mathbf{R}) \tag{10}$$

と書けるから，第 1 種微分 $\omega$ の $\gamma$ に関する周期を

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i \int_{\gamma_i} \omega$$

で定義する．

**定理 1.3.** $R$ を種数 $g \geq 1$ のコンパクト Riemann 面として，$\gamma \in Z_1(R,\mathbf{R})$ とする．このとき，

(1) 任意の $\gamma' \in Z_1(R,\mathbf{R})$ に対し，

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma'} \omega_\gamma\right) = (\gamma, \gamma') \tag{11}$$

を満たす $K$ の第 1 種微分 $\omega_\gamma$ が唯 1 つ存在する．但し，$(\gamma, \gamma')$ は交切数である．

(2) また，$\gamma_1, \gamma_2 \in Z_1(R,\mathbf{R})$ に対し，

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Longleftrightarrow \omega_{\gamma_1} = \omega_{\gamma_2}$$

が成り立つ．

(3) さらに，

$$\omega_\gamma \mapsto \gamma \bmod B_1(R,\mathbf{R}) \tag{12}$$

によって，同型写像

$$\Omega_R^1 \xrightarrow{\sim} H_1(R,\mathbf{R}) = H_1(R,\mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} \tag{13}$$

が得られる．

*Proof.* (1) $\gamma' \in Z_1(R,\mathbf{R})$ について

$$\gamma' \sim \sum_{i=1}^{g} \mu_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{g} \mu_{g+i} \beta_i \qquad (\mu_i \in \mathbf{R})$$

と書くと，

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma'}\omega\right)=\sum_{i=1}^{g}\mu_i\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_i}\omega\right)+\sum_{i=1}^{g}\mu_{g+i}\mathrm{Re}\left(\int_{\beta_i}\omega\right),$$
$$(\gamma,\gamma')=\sum_{i=1}^{g}\mu_i(\gamma,\alpha_i)+\sum_{i=1}^{g}\mu_{g+i}(\gamma,\beta_i)$$

である．よって，任意の $\gamma'$ について (11) が成立することは，任意の $i=1,\dots,g$ に対して

$$(\gamma,\alpha_i)=\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_i}\omega\right),\qquad(\gamma,\beta_i)=\mathrm{Re}\left(\int_{\beta_i}\omega\right)$$

が成り立つことと同値である．ここで，Claim 2 からこのような $\omega$ が唯 1 つ存在することがわかるから，主張が示せる．
(2) $\omega_{\gamma_1}=\omega_{\gamma_2}$ とすれば，任意の $\gamma'$ に対して

$$(\gamma_1-\gamma_2,\gamma')=(\gamma_1,\gamma')-(\gamma_2,\gamma')=0$$

となる．したがって，$\gamma_1-\gamma_2\sim 0$ だから，$\gamma_1\sim\gamma_2$ がいえた．逆に，$\gamma_1\sim\gamma_2$ ならば，任意の $\gamma'$ に対して $(\gamma_1,\gamma')=(\gamma_2,\gamma')$ だから，(1) の主張の一意性から，$\omega_{\gamma_1}=\omega_{\gamma_2}$ が成り立つ．
(3) 任意の $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma'}(\lambda\omega_{\gamma_1}+\mu\omega_{\gamma_2})\right)=&\lambda\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma'}\omega_{\gamma_1}\right)+\mu\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma'}\omega_{\gamma_2}\right)\\=&\lambda(\gamma_1,\gamma')+\mu(\gamma_2,\gamma')=(\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2,\gamma')\\=&\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma'}\omega_{\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2}\right),\\\lambda\omega_{\gamma_1}+\mu\omega_{\gamma_2}=&\omega_{\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2}\end{aligned}$$

が成り立つから，(12) という対応で $\mathbf{R}$ 同型写像が得られる． □

**定理 1.4.** pairing

$$\Omega^1_R\times H_1(R,\mathbf{R})\longrightarrow\mathbf{C}_1:=\{z\in\mathbf{C}\mid|z|=1\}$$

を

(14) $$(\omega,\gamma)=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}\left(\int_\gamma\omega\right)\right)$$

で定義するとき，

$$\Omega^1_R\cong\widehat{H_1(R,\mathbf{R})}$$

が成り立つ，即ち，$\Omega^1_R,H_1(R,\mathbf{R})$ は Pontrjagin dual となる．

*Proof.* pairing

$$\langle\ ,\ \rangle:\Omega^1_R\times H_1(R,\mathbf{R})\longrightarrow\mathbf{R},\qquad\langle\omega,\gamma\rangle=\mathrm{Re}\left(\int_\gamma\omega\right)$$

を考えると，任意の $\omega,\omega'\in\Omega^1_R$, $\gamma,\gamma'\in H_1(R,\mathbf{R})$ について

$$\langle\omega+\omega',\gamma\rangle=\langle\omega,\gamma\rangle+\langle\omega',\gamma\rangle,\qquad \langle\omega,\gamma+\gamma'\rangle=\langle\omega,\gamma\rangle+\langle\omega,\gamma'\rangle$$

が成り立つから，pairing は双線形である．$\alpha_i,\beta_i$ を $H_1(R,\mathbf{Z})$ の生成元とすれば，(13) から，$\Omega^1_R$ の基底として $\{\omega_{\alpha_1},\ldots,\omega_{\alpha_g},\omega_{\beta_1},\ldots,\omega_{\beta_g}\}$ が取れるから，任意の $\omega,\gamma$ に対して，

$$\begin{aligned}\omega&=\sum_{i=1}^{g}\lambda_i\omega_{\alpha_i}+\sum_{i=1}^{g}\lambda_{g+i}\omega_{\beta_i}\\ \gamma&\sim\sum_{i=1}^{g}\mu_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{g}\mu_{g+i}\beta_i\end{aligned}$$

とおけば,

$$\begin{aligned}\langle\gamma,\omega\rangle&=\sum_{i,j=1}^{g}\left\{\lambda_i\mu_j\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_j}\omega_{\alpha_i}\right)+\lambda_i\mu_{g+j}\mathrm{Re}\left(\int_{\beta_j}\omega_{\alpha_i}\right)\right.\\&\qquad\left.+\lambda_{g+i}\mu_j\mathrm{Re}\left(\int_{\alpha_j}\omega_{\beta_i}\right)+\lambda_{g+i}\mu_{g+j}\mathrm{Re}\left(\int_{\beta_j}\omega_{\beta_i}\right)\right\}\\&=\sum_{i,j=1}^{g}\{\lambda_i\mu_j(\alpha_i,\alpha_j)+\lambda_i\mu_{g+j}(\alpha_i,\beta_j)+\lambda_{g+i}\mu_j(\beta_i,\alpha_j)+\lambda_{g+i}\mu_{g+j}(\beta_i,\beta_j)\}\\&=\sum_{i,j=1}^{g}(\lambda_i\mu_{g+i}-\lambda_{g+i}\mu_i)\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，paring $\langle\ ,\ \rangle$ は非退化である．よって，

$$(\omega,\gamma)=e^{2\pi\sqrt{-1}\langle\omega,\gamma\rangle}=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{g}(\lambda_i\mu_{g+i}-\lambda_{g+i}\mu_i)\right)$$

によって $\Omega^1_R$ と $H_1(R,\mathbf{R})$ が Pontrjagin dual となることがわかる． □

## 1.6 Riemann の関係式の拡張

特に第 3 種微分が Abel-Jabobi の定理を証明する上で重要な役割を果たすことになるので，第 1 種でない微分に対して Riemann の関係式を考察してみると，次の定理が成り立つ．

**定理 1.5.** $R$ を $g\geq 1$ のコンパクト Riemann 面として，$R$ 上の点 $P_0$ を 1 つ固定する．$\alpha_i,\beta_{g+i}$ $(i=1,\ldots,g)$ を $P_0$ を通る $H_1(R,\mathbf{Z})$ の生成元とする．$P_1,\ldots,P_l,Q_1,\ldots,Q_m$ をどの $\alpha_i,\beta_{g+i}$ 上にもない $R$ の相異なる点とする．$\omega\in\Omega_{R,\mathrm{mero}}$ を高々 $P_1,\ldots,P_l$ で極をもつ微分として，$\omega'\in\Omega_{R,\mathrm{mero}}$ を高々 $Q_1,\ldots,Q_m$ で極をもつ微分とする．$\zeta_i,\zeta_{g+i}$ と $\zeta'_i,\zeta'_{g+i}$ をそれぞれ $\omega$ と $\omega'$ の $\alpha_i,\beta_{g+i}$ に関する期として，$P_i$ における局所変数 $t_i$ に関する展開を

$$\omega=\sum_s a_s^{(i)}t_i^s,\qquad \omega'=\sum_s a_s'^{(i)}t_i^s$$

とする．さらに，$Q_j$ における局所変数 $t_j$ に関する展開を

$$\omega = \sum_s b_s^{(j)} t_j^s, \qquad \omega' = \sum_s b_s'^{(j)} t_j^s$$

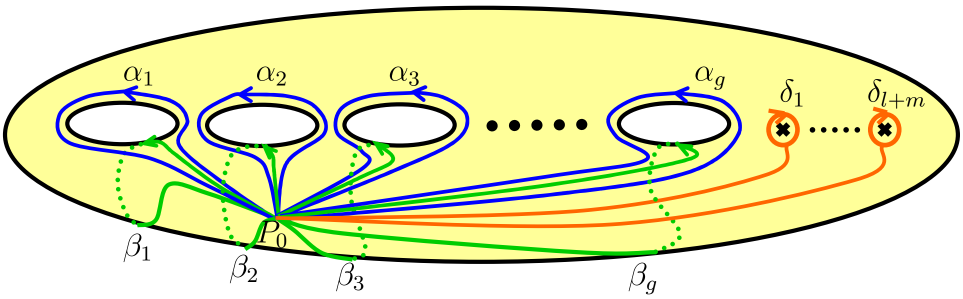
とすると，

$$\begin{aligned}(15)\quad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^{g} (\zeta_i \zeta'_{g+i} - \zeta_{g+i}\zeta'_i) + \sum_{i=1}^{l} \left( a_{-1}^{(i)} \int_{P_0}^{P_i} \omega' + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{-s-2}^{(i)} a_s'^{(i)}}{s+1} \right) \\ - \sum_{j=1}^{m} \left( b_{-1}^{(j)} \int_{P_0}^{Q_j} \omega + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b_s^{(j)} b_{-s-2}'^{(j)}}{s+1} \right) = 0\end{aligned}$$

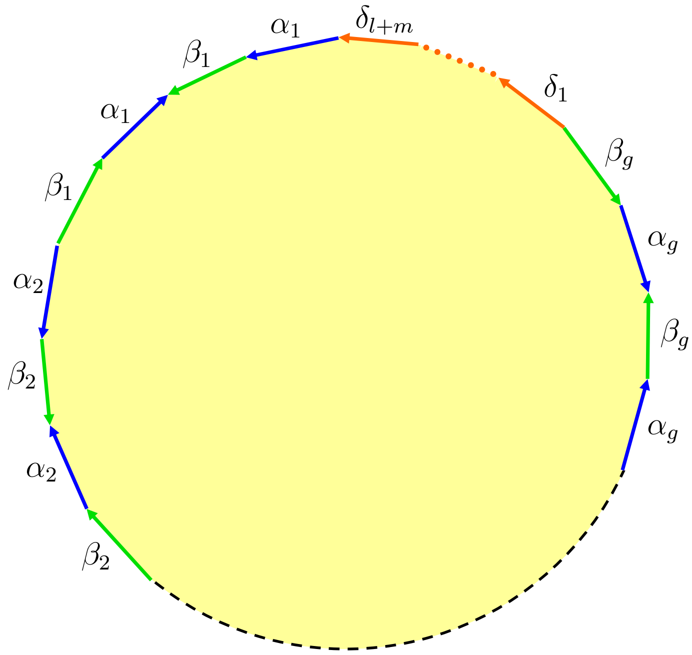
が成り立つ．但し，$P_0$ から $P_i$, $Q_i$ への積分路は適当に取るものとする（$P_0$, $P_i$, $Q_i$ にのみ依存して $\omega, \omega'$ には依らずに定まる）．

**注意 4.** $\omega, \omega'$ がそれぞれ正則微分である場合には，(15) 式は (3) 式と同値である．

*Proof.* 定理 1.2 の証明のときに使った $4g$ 角形だけでなく，さらに $l+m$ 個の極を取り除いた path で考える．即ち，$\alpha_i, \beta_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ に加えて，極の周りをまわる path $\delta_1, \ldots, \delta_{l+m}$ をあわせて考える．




但し，$\delta_1, \ldots, \delta_l$ はそれぞれ $P_1, \ldots, P_l$ を $\delta_{l+1}, \ldots, \delta_{l+m}$ はそれぞれ $Q_1, \ldots, Q_m$ をまわる path とする．このとき，この path に沿って切り開くと，




という $(4g+l+m)$ 角形ができる．ここで，極を考えない場合と同様に，

$$\Gamma' := \Gamma\delta_1\cdots\delta_{l+m} = [\alpha_1,\beta_1][\alpha_2,\beta_2]\cdots[\alpha_g,\beta_g]\delta_1\cdots\delta_{l+m} \sim 0$$

であることに注意する．$\Gamma'$ で囲まれた領域内の点 $Q_0$ を固定して，関数 $\omega_0, \omega_0'$ を

$$\omega_0 = \omega_0(P) = \int_{Q_0}^{P} \omega,$$
$$\omega_0' = \omega_0'(P) = \int_{Q_0}^{P} \omega'$$

とする．この path $\Gamma'$ に沿って積分すれば

$$\int_{\Gamma'} \omega_0 d\omega_0' = 0$$

が成り立つ．Riemann の関係式（定理 1.2）の証明のときのように左辺の積分を考えると，

$$\int_{\Gamma} \omega_0 d\omega_0' = \sum_{i=1}^{g} (\zeta_i\zeta_{g+i}' - \zeta_{g+i}\zeta_i')$$

となることはまったく同様だから，極の周りに沿った積分 $\displaystyle\int_{\delta_i} \omega_0 d\omega_0'$ $(i=1,\ldots,l+m)$ を計算する．

まず，$i=1,\ldots,l$ について $P_i$ をまわる積分について考える．このとき，$\delta_i$ を取り換えて

$$\int_{\delta_i} \omega_0 d\omega_0' = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{P_0}^{P_i-\varepsilon} \omega_0 d\omega_0' + \int_{C_{P_i}(\varepsilon)} \omega_0 d\omega_0' + \int_{P_i-\varepsilon}^{P_0} \omega_0 d\omega_0'\right)$$

として考えればよい．但し，$C_{P_i}(\varepsilon)$ は $P_i$ の周りを半径 $\varepsilon$ の円周上で負の向きにまわる積分路とする．このとき，$\omega_0$ は $P_0$ で極をもつからその値は $P_0 \to P_i$ と $P_i \to P_0$ で $-2\pi\sqrt{-1}a_{-1}^{(i)}$ だけずれる．ゆえに，

$$\begin{aligned}\int_{P_0}^{P_i-\varepsilon}\omega_0 d\omega_0' + \int_{P_i-\varepsilon}^{P_0}\omega_0 d\omega_0' &= \int_{P_0}^{P_i-\varepsilon}\omega_0(P)d\omega_0' + \int_{P_i-\varepsilon}^{P_0}(\omega_0(P) - 2\pi\sqrt{-1}a_{-1}^{(i)})d\omega_0' \\ &= 2\pi\sqrt{-1}a_{-1}^{(i)}\int_{P_0}^{P_i-\varepsilon}\omega'\end{aligned}$$

が成り立つ．次に，$C_{P_i}(\varepsilon)$ についての積分を $P_i$ での局所変数 $t_i$ を用いて

$$\int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\omega_0 d\omega_0' = \int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\omega_0\frac{d\omega_0'}{dt_i}dt_i = \int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\frac{d(\omega_0\omega_0')}{dt_i}dt_i - \int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\omega_0'\frac{d(\omega_0)}{dt_i}dt_i$$

と置き換える．$\omega_0'$ が $P_i$ で極を持たないことに注意すれば，まったく同じ理由で，1 項目は

$$\int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\frac{d(\omega_0\omega_0')}{dt_i}dt_i = -2\pi\sqrt{-1}a_{-1}^{(i)}\omega_0'(P_i)$$

であって，2 項目は

$$\int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\omega_0'\frac{d(\omega_0)}{dt_i}dt_i = -2\pi\sqrt{-1}\omega_0'\frac{d\omega_0}{dt_i}\operatorname*{Res}_{t_i=0}\left(\omega_0'\frac{d(\omega_0)}{dt_i}\right)$$

と書ける．この留数を計算してみると，$\omega'$ は $P_i$ で正則だから $P_i$ の近傍では，

$$\omega_0'(P) = \omega_0'(P_i) + \int_{P_i}^{P}\omega'\frac{dz}{dt_i}dt_i = \omega_0'(P_i) + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_s'^{(i)}}{s+1}t_i^{s+1}$$

であって，

$$\frac{d\omega_0}{dt_i} = w\frac{dz}{dt_i} = \sum_s a_s^{(i)}t_i^s$$

だから，

$$\operatorname*{Res}_{t_i=0}\left(\omega_0'\frac{d(\omega_0)}{dt_i}\right) = a_{-1}^{(i)}\omega_0'(P_i) + \sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{-s-2}^{(i)}a_s'^{(i)}}{s+1}$$

となる．したがって，

$$\int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\omega_0 d\omega_0' = 2\pi\sqrt{-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{-s-2}^{(i)}a_s'^{(i)}}{s+1}$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{P_0}^{P_i-\varepsilon}\omega_0 d\omega_0' + \int_{C_{P_i}(\varepsilon)}\omega_0 d\omega_0' + \int_{P_i-\varepsilon}^{P_0}\omega_0 d\omega_0'\right) \\ =&2\pi\sqrt{-1}a_{-1}^{(i)}\int_{P_0}^{P_i}\omega' + 2\pi\sqrt{-1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{a_{-s-2}^{(i)}a_s'^{(i)}}{s+1}\end{aligned}$$

次に，$i=1,\dots,m$ について $Q_i$ をまわる積分

$$\int_{\delta_{l+i}} \omega_0 d\omega_0' = \int_{P_0}^{Q_i-\varepsilon} \omega_0 d\omega_0' + \int_{C_{Q_i}(\varepsilon)} \omega_0 d\omega_0' + \int_{Q_i-\varepsilon}^{P_0} \omega_0 d\omega_0'$$

を考える．$\omega$ は $Q_i$ では極を持たないから

$$\int_{P_0}^{Q_i-\varepsilon} \omega_0 d\omega_0' + \int_{Q_i-\varepsilon}^{P_0} \omega_0 d\omega_0' = 0$$

であって，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{Q_i(\varepsilon)} \omega_0 d\omega_0' = -2\pi\sqrt{-1}\left( b'^{(i)}_{-1} \int_{Q_0}^{Q_i} \omega + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{(i)}_{-s-2} b'^{(i)}_s}{s+1} \right)$$

が成り立つ．

したがって，すべてを足して $2\pi\sqrt{-1}$ で割れば，

(16)
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(\zeta_i\zeta'_{g+i} - \zeta_{g+i}\zeta'_i) \\ &+\sum_{i=1}^{l}\left( a^{(i)}_{-1} \int_{P_0}^{P_i} \omega' + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^{(i)}_{-s-2} a'^{(i)}_s}{s+1} \right) \\ &-\sum_{j=1}^{m}\left( b^{(j)}_{-1} \int_{Q_0}^{Q_j} \omega + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{b^{(j)}_s b'^{(j)}_{-s-2}}{s+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

がわかる．最後に，$Q_0$ は $\Gamma'$ で囲まれた領域内の点だったから，$Q_0$ を $P_0$ に近付ければ，定理が示せる． □

## 1.7 変数と係数の交換法則

次に，等式 (15) を具体的な微分に適用することによって得られる 2 つの関係式を証明する．1 つ目は，第 3 種微分 $\overline{\omega}_{P,Q}$ 同士の関係式である．

**系 1.5.1 (変数と係数の交換法則).** 相異なる 4 点 $P, P', Q, Q'$ を固定し，$\overline{\omega}_{P,P'}$ と $\overline{\omega}_{Q,Q'}$ を Claim 3 で定まる第 3 種微分とすれば，

(17)
$$\int_{Q'}^{Q} \overline{\omega}_{P,P'} = \int_{P'}^{P} \overline{\omega}_{Q,Q'}$$

が成り立つ．

*Proof.* $\omega = \overline{\omega}_{P,P'}$, $\omega' = \overline{\omega}_{Q,Q'}$ とおく．第 3 種微分の定義から極は 1 位だから，(15) は

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^{g}(\zeta_i\zeta'_{g+i} - \zeta_{g+i}\zeta'_i) + \sum_{i=1}^{2}\left( a^{(i)}_{-1} \int_{P_0}^{P_i} \omega' \right) - \sum_{j=1}^{2}\left( b^{(j)}_{-1} \int_{P_0}^{Q_j} \omega \right) = 0$$

と書き換えられる．微分の取り方から，任意の $i = 1, \ldots, g$ について

$$\zeta_i = \zeta'_i = 0$$

であって，$P, Q$ での留数は 1 で $P', Q'$ での留数は $-1$ だったから，

$$\int_{P_0}^{P} \overline{\omega}_{Q,Q'} - \int_{P_0}^{P'} \overline{\omega}_{Q,Q'} - \left( \int_{P_0}^{Q} \overline{\omega}_{P,P'} - \int_{P_0}^{Q'} \overline{\omega}_{P,P'} \right) = 0$$

が成り立つ．したがって，

$$\int_{P'}^{P} \overline{\omega}_{Q,Q'} = \int_{Q'}^{Q} \overline{\omega}_{P,P'}$$

がいえる． □

2 つ目は，第 3 種微分 $\omega_{P,Q}$ と第 1 種微分の間の関係式であって，これがが Abel-Jacobi の定理を証明する上で鍵になる重要な結果となる．

**系 1.5.2.** 任意の $\gamma \in Z_1(R, \mathbf{R})$ に対して，

$$\int_{\gamma} \omega_{P,Q} = 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}\left( -\int_{Q}^{P} \omega_{\gamma} \right) \tag{18}$$

が成り立つ．

*Proof.* $\omega = \omega_{\alpha_i}, \omega' = \omega_{P,Q}$ に対して (15) を適用すると，2 位以上の極は無いから

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^{g} (\zeta_i \zeta'_{g+i} - \zeta_{g+i}\zeta'_i) &= \left( b_{-1}^{P} \int_{P_0}^{P} \omega_{\alpha_i} \right) + \left( b_{-1}^{Q} \int_{P_0}^{Q} \omega_{\alpha_i} \right) \\
&= \left( \int_{P_0}^{P} \omega_{\alpha_i} \right) - \left( \int_{P_0}^{Q} \omega_{\alpha_i} \right) \\
&= \int_{Q}^{P} \omega_{\alpha_i}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，左辺に注目すると，任意の $j = 1, \ldots, g$ について

$$\begin{aligned}
\zeta_j &= \int_{\alpha_j} \omega_{\alpha_i} = (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \\
\zeta_{g+j} &= \int_{\beta_j} \omega_{\alpha_i} = (\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

だから，

$$\int_{Q}^{P} \omega_{\alpha_i} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{i=1}^{g} (\zeta_i \zeta'_{g+i} - \zeta_{g+i}\zeta'_i) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \zeta'_i = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\alpha_i} \omega_{P,Q}$$

両辺の実数部分を考えれば，$w_{P,Q}dz$ の周期が純虚数であることに注意すると

$$\mathrm{Re}\left( \int_{Q}^{P} \omega_{\alpha_i} \right) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\alpha_i} \omega_{P,Q},$$

よって，

$$\int_{\alpha_i} \omega_{P,Q} = 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}\left(-\int_Q^P \omega_{\alpha_i}\right)$$

が成り立つ．同様に，$\omega_{\alpha_i}$ の代わりに $\omega_{\beta_i}$ で考えれば

$$\int_{\beta_i} \omega_{P,Q} = 2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}\left(-\int_Q^P \omega_{\beta_i}\right)$$

が成り立つので，主張が言えた． □

# 2 Abel-Jacobiの定理の証明

この節ではこれまでの準備の下で, Abel-Jacobiの定理に軍司氏の稿と異なる方法で証明を与える．その特徴はコンパクトRiemann面$R$上の必ずしも正則ではない有理型1-形式を用いるところにある．大体の方針を述べれば, “狭義の乗法函数” と呼ばれる$R$の普遍被覆Riemann面上の函数を通じて, $H_1(R,\mathbb{Z})$と$\mathrm{Pic}^0(R)$のPontrjagin双対性を導き, それに基づいてAbel-Jacobi写像が同型であることを示す．その際に鍵になるのは, 乗法函数が$R$上の第3種微分のAbel積分を用いて表せるという事実と, 先の節で解説された第3種微分の諸性質である．

以下で述べる$H_1(R,\mathbb{Z})$と$\mathrm{Pic}^0(R)$のPontrjagin双対性を導くアイディアは「代数函数論」p. 278の脚注にもあるように井草[2]に基づくものである．

## 2.1 コンパクトRiemann面の普遍被覆

以下引き続き$R$を種数$g=g(R)$のコンパクトRiemann面とする．位相空間としての$R$の普遍被覆

$$\tilde{R} \xrightarrow{\pi} R$$

に対し, $\pi$がRiemann面間の正則写像となるような1次元複素構造が$\tilde{R}$に一意的に入る．この複素構造で$\tilde{R}$をRiemann面と見做す．単連結Riemann面の分類により, $\tilde{R}$は次のいずれかのRiemann面と同型になる：

(i) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ （$g(R)=0$のとき）

(ii) $\mathbb{C}$ （$g(R)=1$のとき）

(iii) $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<1\}$ （$g(R)\geq 2$のとき）

$\mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)$を被覆$\tilde{R}\xrightarrow{\pi}R$の被覆変換群とする（$\mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)$の元は自動的に$\tilde{R}$のRiemann面としての自己同型になることに注意）．このとき, 基点$x_0\in R$と$x_0$の$\tilde{R}$への持ち上げ$\tilde{x}_0$ (即ち$\pi(\tilde{x}_0)=x_0$を満たす点) を固定するとき, 群同型

$$\pi_1(R,x_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R), \quad \gamma\mapsto\phi_\gamma$$

が導かれる．ここで$\pi_1(R,x_0)$は$x_0$を基点とする$R$の基本群で, $\phi_\gamma$は以下のように定義される：

$t\in\tilde{R}$に対し, $\tilde{\delta}_1$を$\tilde{R}$内の$t$を始点とし$\tilde{x}_0$を終点とするpath, $\delta_1:=\pi\circ\tilde{\delta}_1$, $\tilde{\gamma}$を$\tilde{R}$内の$\tilde{x}_0$を始点とするpathで$\pi\circ\tilde{\gamma}=\gamma$となるもの, $\tilde{\delta}_2$を$\tilde{\gamma}$の終点を始点とする$\tilde{R}$内のpathで$\pi\circ\tilde{\delta}_2=\delta_1^{-1}$となるものとするとき, $\phi_\gamma(t)$は$\tilde{\delta}_2\circ\tilde{\gamma}\circ\tilde{\delta}_1$の終点である．

上の同型は, 基点$x_0$の持ち上げ$\tilde{x}_0$の取り方に依存することに注意しよう（$\tilde{x}_0$の取り方を替えると, 同型写像が$\pi_1(R,x_0)$の内部自己同型分ずれる．この点を講演後にご指摘下さった角皆氏に感謝いたします）．しかし, 上の写像のAbel化から誘導される同型

$$H_1(R,\mathbb{Z})\simeq\pi_1(R,x_0)^{\mathrm{ab}}\simeq\mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)^{\mathrm{ab}}$$

は基点 $x_0$ や, その持ち上げ $\tilde{x}_0$ に依存しない標準的同型であるので, 以下の議論に於いて $x_0$ や $\tilde{x}_0$ の取り方は何ら影響を与えないことを予め注意しておく.

さらに $K := \mathbb{C}(R)$, $\tilde{K} := \mathbb{C}(\tilde{R})$ をそれぞれの Riemann 面の函数体とすれば, 標準的単射群準同型

$$\Psi: \ \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\tilde{K}/K)$$

が次で定義される：

$\phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)$, $f(t) \in \tilde{K}$ に対して $(\Psi(\phi)f)(t) := f(\phi^{-1}(t))$.

以上より, $G := \Psi(\mathrm{Aut}(\tilde{R}/R))$ とおくと, 同型

$$\pi_1(R, x_0) \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R) \simeq G, \quad \gamma \mapsto \phi_\gamma \mapsto \sigma_\gamma := \Psi(\phi_\gamma)$$

が得られ, この同型は標準的同型

$$H_1(R, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)^{\mathrm{ab}} \simeq G^{\mathrm{ab}} \tag{19}$$

を誘導する. ここで $\tilde{K}^G = K$ に注意しよう.

以下, $\underline{g(R) \geq 1}$ を仮定する.

## 2.2 乗法函数の定義

**定義 2.1.** 次の条件を満たす $f \in \tilde{K}^\times$ を**乗法函数**という:
任意の $\sigma \in G$ に対して, ある $c_\sigma \in \mathbb{C}^\times$ が存在して $\sigma f = c_\sigma f$ が成立する.
乗法函数全体の集合を $\mathfrak{M}$ で表す. これは $\tilde{K}^\times$ の部分群をなす.

$f \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\chi_f : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \chi_f(\sigma) = (\sigma f)/f$$

は群準同型 ($G$ の 1 次元指標) である. 従って, $\chi_f$ は準同型

$$\chi_f : G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G] \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

を誘導する. (19) に注意すれば, $\chi_f$ は $f$ から標準的に定まる $H_1(R, \mathbb{Z})$ の 1 次元指標と見做せる.

特に $f \in K^\times$ は乗法函数で $\chi_f = \mathbf{1}$ である. 逆に $f \in \mathfrak{M}$, $\chi_f = \mathbf{1}$ ならば前節末の注意より $f \in K^\times$ である. また, $f, g \in \mathfrak{M}$ について $\chi_{fg} = \chi_f \chi_g$, $\chi_{1/f} = \chi_f^{-1}$ である. 従って群準同型

$$\mathfrak{M}/K^\times \longrightarrow \mathrm{Hom}(G^{\mathrm{ab}}, \mathbb{C}^\times), \quad f \mod K^\times \mapsto \chi_f \tag{20}$$

が得られる.

## 2.3 乗法函数の因子

今後の我々の目標は $H_1(R,\mathbb{Z}) \simeq G^{\mathrm{ab}}$ と $\mathrm{Pic}^0(R)$ の双対性を群準同型 (20) を土台として構成することにある．そのために乗法函数と $R$ の因子類群の関係を見出さねばならないので, “乗法函数の因子” という概念を導入する．

$f \in \mathfrak{M}$ とする．任意の $t_0 \in \tilde{R}$, $\phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)$ に対し, 乗法函数の定義から $\mathrm{ord}_{t_0}(f) = \mathrm{ord}_{\phi(t_0)}(f)$ が成立する．従って, 形式和

$$\sum_{P\in R} \mathrm{ord}_{\tilde{P}}(f)P \quad (\tilde{P}\in\tilde{R} \text{ は } \pi(\tilde{P}) = P \text{ を満たす任意の点})$$

は有限和で $\mathrm{Div}(R)$ の元を与える．これを $f$ の因子と呼び $(f)$ で表す.

## 2.4 乗法函数と Abel 積分

乗法函数が $R$ のある種の微分形式の Abel 積分を用いて表せることを説明する．
$f \in \mathfrak{M}$ に対し $\tilde{R}$ 上の有理型 1-形式 $df/f \in \Omega^1_{\tilde{R},\ \mathrm{mel}}$ を考える．$t$ を $\tilde{R} \subseteq \mathbb{C}$ 上の変数とすれば, $df/f = \frac{1}{f(t)}\frac{df(t)}{dt}dt$ である．任意の $\phi \in \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)$ に対し, $\sigma = \Psi(\phi) \in G$ とすれば,

$$\begin{aligned}\phi^*(df/f) &= \frac{1}{(\sigma f)(t)}\frac{d(\sigma f)(t)}{dt}dt \\ &= \frac{1}{\chi_f(\sigma)f(t)}\cdot\chi_f(\sigma)\frac{df(t)}{dt}dt = df/f\end{aligned}$$

なので, $df/f$ は実は $R$ 上の有理型 1-形式であることが分かる．$a \in \tilde{R} \subseteq \mathbb{C}$ に対し, $\mathrm{ord}_a f = m \in \mathbb{Z}$, $t=a$ 近傍での展開を

$$f(t) = (t-a)^m \sum_{i=0}^{\infty} b_i(t-a)^i, \quad b_0 \neq 0$$

とすれば, $t=a$ の近傍で

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{f}\frac{df}{dt}dt = \left(\frac{m}{t-a} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(t-a)^i\right)dt$$

と展開される．従って

$$\mathrm{ord}_a(df/f) \geq -1,\ \operatorname*{Res}_a(df/f) = \mathrm{ord}_a(f) \tag{21}$$

となり, $df/f$ は $R$ 上の第 3 種微分でその留数はすべて有理整数である．また, コンパクト Riemann 面 $R$ における留数定理を用いれば

$$\sum_{P\in R}\mathrm{ord}_{\tilde{P}}(f) = \sum_{P\in R}\operatorname*{Res}_P\left(\frac{df}{f}\right) = 0$$

も得られる．従って, 乗法函数の因子は次数が 0 であることが分かった:

(22) $$f \in \mathfrak{M} \Longrightarrow (f) \in \mathrm{Div}^0(R)$$

さて, $f \in \mathfrak{M}$ には自然に $R$ 上の微分 $df/f$ が対応し,

$$\mathfrak{D}_1 := \{\omega \in \Omega^1_{R,\mathrm{mel}} |\ \omega \text{ の極は高々1位で, その留数はすべて有理整数}\}$$

（$\mathfrak{D}_1$ は $\Omega^1_{R,\mathrm{mel}}$ の $\mathbb{Z}$-部分加群）とすれば, $df/f \in \mathfrak{D}_1$ であった．この対応の逆を考える．

$\omega \in \mathfrak{D}_1$ とする．$\omega$ を $\tilde{R}$ 上の微分として定点 $a \in \tilde{R}$ から $t \in \tilde{R}$ まで積分する：

$$\int_a^t \omega$$

$\omega$ は正則とは限らないので, この積分はもちろん $a$ から $t$ に至る積分路の取り方に依存するが, $\omega$ の留数はすべて整数なので積分路を取り替えてもその値の差は $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍の違いしかない（函数論の Cauchy の積分定理）．従って,

$$f(t) := \exp\left(\int_a^t \omega\right)$$

は積分路の取り方によらず, $t$ のみで完全に定まるので, $f \in \tilde{K}$ である．また, 任意の $\sigma \in G$ について, $\sigma = \Psi(\phi_\gamma)$ $(\gamma \in \pi_1(R, x_0))$ とすれば

$$\begin{aligned}\sigma f(t) = f(\phi_\gamma^{-1}(t)) &= \exp\left(\int_a^{\phi_\gamma^{-1}(t)} \omega\right) \\ &= \exp\left(\int_t^{\phi_\gamma^{-1}(t)} \omega\right) \exp\left(\int_a^t \omega\right) = \exp\left(\int_{-\gamma} \omega\right) f(t)\end{aligned}$$

（最後の積分は $R$ 上で考えている）となり, $f$ は乗法函数で

$$\chi_f(\sigma) = \exp\left(-\int_\gamma \omega\right)$$

が分かる．さらに, $f \in \mathfrak{M}$ に対して, $df/f \in \mathfrak{D}_1$ で

$$f(t) = f(a) \exp\left(\int_a^t \frac{df}{f}\right)$$

も容易に分かる．従って次を得た：

**定理 2.2.** $\mathbb{Z}$-加群として

$$\mathfrak{D}_1 \simeq \mathfrak{M}/\mathbb{C}^\times, \quad \omega \mapsto \exp\left(\int_a^t \omega\right) \mod \mathbb{C}^\times$$

逆写像は, $\mathfrak{M}/\mathbb{C}^\times \ni f \bmod \mathbb{C}^\times \mapsto df/f \in \mathfrak{D}_1$ で与えられる．また, $f \in \mathfrak{M}$ について

$$\chi_f(\sigma_\gamma) = \exp\left(-\int_\gamma \frac{df}{f}\right) \quad (\gamma \in \pi_1(R, x_0))$$

が成立する．

## 2.5　狭義の乗法函数と $\mathbf{Div}^0(\boldsymbol{R})$

ここでは, 狭義の乗法函数という概念を導入し, それと $\mathrm{Div}^0(R)$ の関係を明らかにする.

まず, § 1 で導入された第 3 種微分 $\omega_{P,Q}$ （**Claim 4** 参照）について復習しておこう : $\omega_{P,Q} \in \Omega^1_{R,\mathrm{mel}}$ は $P,\ Q \in R$ のみで極を持ち, その極は全て 1 位で

$$\operatorname*{Res}_P \omega_{P,Q} = 1,\ \operatorname*{Res}_Q \omega_{P,Q} = -1,\ \mathrm{Re}\int_\gamma \omega_{P,Q} = 0\ (\forall\gamma \in H_1(R,\mathbb{R})) \tag{23}$$

を満たす. このような性質をもつ有理型 1-形式は $P, Q$ から一意的に定まる.

**注意 2.1**　一般に第 3 種微分 $\omega$ の留数は 0 とは限らないので closed path $\gamma$ に関する積分 $\displaystyle\int_\gamma \omega$ は $\gamma$ の homotopy 類のみでは定まらない. しかし, $\omega$ の留数がすべて実数であれば, $\gamma$ と homotope な closed path $\gamma'$ に対して,

$$\int_\gamma \omega - \int_{\gamma'} \omega \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

が成立するので, $\mathrm{Re}\displaystyle\int_\gamma \omega$ は $\gamma$ の homotopy 類のみで定まる. 従って, 留数が全て実数であるような有理型 1-形式 $\omega$ と $\gamma \in H_1(R,\mathbb{R})$ に対しては, $\mathrm{Re}\displaystyle\int_\gamma \omega$ は well-defined である.

この $\omega_{P,Q}$ を用いれば,

$$\mathfrak{D}_1 = \left(\sum_{(P,Q)\in R^2,\ P\neq Q} \mathbb{Z}\,\omega_{P,Q}\right) \oplus \Omega^1_R \tag{24}$$

となることは $\mathfrak{D}_1$ の定義と留数定理から明らかであろう（上の右辺の和が直和であることは § 1 の **Claim 2** から従う（下の議論参照））.

**定義 2.3.** $|\chi_f(\sigma)| = 1\ (\forall\sigma \in G)$ を満たす乗法函数 $f \in \mathfrak{M}$ を**狭義の乗法函数**と言う. $\mathfrak{M}_0$ で狭義の乗法函数全体のなす乗法群を表す.

**定理 2.2** より, $f(t) \in \mathfrak{M}$ はある $\omega \in \mathfrak{D}_1$ を用いて

$$f(t) = \exp\left(\int_a^t \omega\right)$$

と書ける. このとき同定理より,

$$|\chi_f(\Psi(\phi_\gamma))| = \exp\left(-\mathrm{Re}\int_\gamma \omega\right) \quad (\gamma \in \pi_1(R, x_0))$$

なので, $f \in \mathfrak{M}_0$ となるための必要十分条件は

$$\mathrm{Re}\int_\gamma \omega = 0\ \ (\forall\gamma \in H_1(R,\mathbb{Z}))$$

である．(24) と § 1**Claim 2** で示された

$$\nu \in \Omega^1_R,\ \mathrm{Re}\int_\gamma \nu = 0\ (\forall\gamma \in H_1(R,\mathbb{Z})) \Longrightarrow \nu = 0$$

という事実より, これは結局

$$\omega \in \sum_{(P,Q)\in R^2,\ P\neq Q} \mathbb{Z}\,\omega_{P,Q}$$

と同値である．従って,

$$\mathfrak{D}_2 := \sum_{(P,Q)\in R^2,\ P\neq Q} \mathbb{Z}\,\omega_{P,Q}$$

とおけば, 次を得た：

**定理 2.4.** $\mathbb{Z}$-加群として

$$\mathfrak{D}_2 \simeq \mathfrak{M}_0/\mathbb{C}^\times,\quad \omega \mapsto \exp\left(\int_a^t \omega\right) \mod \mathbb{C}^\times$$

逆写像は, $\mathfrak{M}_0/\mathbb{C}^\times \ni f \bmod \mathbb{C}^\times \mapsto df/f \in \mathfrak{D}_2$ で与えられる．

この定理から次の重要な結果が得られる：

**定理 2.5.**

$$\mathfrak{M}_0/\mathbb{C}^\times \simeq \mathrm{Div}^0(R),\quad f \mod \mathbb{C}^\times \mapsto (f)$$
$$\mathfrak{M}_0/K^\times \simeq \mathrm{Pic}^0(R),\quad f \mod K^\times \mapsto [(f)]$$

*Proof.* まず (22) より,

$$f \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow (f) \in \mathrm{Div}^0(R)$$

に注意しよう．任意の $\sum_{i=1}^r (P_i - Q_i) \in \mathrm{Div}^0(R)$ に対し, $\omega := \sum_{i=1}^r \omega_{P_i,Q_i} \in \mathfrak{D}_2$ とおくと, **定理 2.4** より, $f(t) := \exp\left(\int_a^t \omega\right) \in \mathfrak{M}_0$ で, (21) と (23) より

$$(f) = \sum_{i=1}^r (P_i - Q_i)$$

となる．よって,

$$\mathfrak{M}_0/\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}^0(R),\quad f \mod \mathbb{C}^\times \mapsto (f) \tag{25}$$

は全射．$f \in \mathfrak{M}_0$, $(f) = 0$ とする．このとき, (21) より $df/f \in \Omega^1_R$ となるが, 一方では**定理 2.4** より $df/f \in \mathfrak{D}_2$ なので, $\Omega^1_R \cap \mathfrak{D}_2 = 0$ より, $f \in \mathbb{C}^\times$. 従って (25) は同型写像．2 番目の同型は 1 番目の同型を $K^\times/\mathbb{C}^\times$ に制限すれば

$$K^\times/\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}^l(R)$$

となることから得られる． □

## 2.6 $\mathrm{Pic}^0(R)$ と $H_1(R,\mathbb{Z})$ の Pontrjagin 双対性

**定理 2.5** は, 代数体の整数論の単項化定理「有限次代数体 $K$ の任意の因子（イデアル）は, $K$ の最大不分岐 Abel 拡大 $\tilde{K}^{\mathrm{ab}}$ に於いては主因子（単項イデアル）になる」の類似と見做せることに注意しよう（歴史的には寧ろ単項化定理が**定理 2.5** の類似？）. 実際, 乗法函数はその定義より $G \simeq \mathrm{Aut}(\tilde{R}/R)$ の交換子群の元では不変なので $R$ の最大 Abel 被覆 Riemann 面 $\tilde{R}^{\mathrm{ab}}$ の函数体の元である.

単項化定理の証明は, Artin 相互法則, すなわち $K$ の因子類群と $\mathrm{Gal}(\tilde{K}^{\mathrm{ab}}/K)$ の標準的な同型の存在に基づく. 函数体の場合, ここでは逆に**定理 2.5** に基づいて $\mathrm{Pic}^0(R)$ と $G^{\mathrm{ab}} \simeq H_1(R,\mathbb{Z})$ の間に標準的な双対性が存在することを導く.

まず, 局所コンパクト Abel 群の Pontrjagin 双対定理について復習しておこう. 局所コンパクト Abel 群 $A$ に対し, $\widehat{A} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A,\mathbb{C}_1)$ ($\mathbb{C}_1 := \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}$), 即ち $A$ から $\mathbb{C}_1$ への連続準同型全体の成す Abel 群を $A$ の**指標群**という. $A$ のコンパクト部分集合 $K$ と $\mathbb{C}_1$ の単位元の開近傍 $W$ に対し,

$$U(K,W) := \{\chi \in \widehat{A} \mid \chi(K) \subseteq W\} \subseteq \widehat{A}$$

とおく. そして各 $\psi \in \widehat{A}$ に対し,

$$\{\psi + U(K,W) \mid K \subseteq A : \text{コンパクト},\ \ 1 \in W \subseteq \mathbb{C}_1 : \text{開集合}\}$$

を $\psi$ の基本近傍系とする位相を入れることで $\widehat{A}$ は局所コンパクト Abel 群になる. 今後 $\widehat{A}$ は常にこの位相で位相群と考える.

**定理 2.6.** (i) (**Pontrjagin 双対定理**) 任意の局所コンパクト Abel 群 $A$ について,

$$A \simeq \widehat{\widehat{A}},\quad A \ni a \mapsto (\widehat{A} \ni \chi \mapsto \chi(a) \in \mathbb{C}_1)$$

となる.
(ii) $A$ の <u>閉部分群</u>$B$ に対し, $B$ の**零化部分群**$B^{\perp}$ を

$$B^{\perp} := \{\chi \in \widehat{A} |\ \chi(B) = 1\}$$

で定義するとき,

$$\widehat{A/B} \simeq B^{\perp},\quad \widehat{B} \simeq \widehat{A}/B^{\perp},\quad (B^{\perp})^{\perp} = B \ ((\mathrm{i})\text{ の同型で } A \text{ と } \widehat{\widehat{A}} \text{ を同一視})$$

が成立する.

**定理 2.5** と群準同型写像 (20) の定義域を $\mathfrak{M}_0/K^{\times}$ に制限したものより群準同型

$$\varphi : \mathrm{Pic}^0(R) \longrightarrow \widehat{G^{\mathrm{ab}}},\quad [D] \mapsto \chi_{f_D} \tag{26}$$

が定義される. ここで, $f_D \in \mathfrak{M}_0$ は $(f_D) = D$ を満たす元である. $f_D$ は**定理 2.5** より $D \in \mathrm{Div}^0(R)$ に対して modulo $\mathbb{C}^{\times}$ で一意に存在し, $\chi_{f_D}$ は $D$ の因子類 $[D] \in \mathrm{Pic}^0(R)$ にのみ依存する. また, $G^{\mathrm{ab}}$ は離散 Abel 群と見做す.

以下, (26) の $\varphi$ が同型であることを示そう．まず, $\chi_{f_D}$ の定義と**定理 2.5** より

$$\chi_{f_D} = 1 \Longleftrightarrow f_D \in K^\times \Longleftrightarrow D \in \mathrm{Div}^l(R)$$

なので, 準同型 $\varphi$ は単射である．

$D = \sum_{i=1}^r (P_i - Q_i) \in \mathrm{Div}^0(R)$ に対し, **定理 2.5** の証明より

$$f_D(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^r \int_a^t \omega_{P_i,Q_i}\right) \quad (\exists a \in \tilde{R})$$

となる．このとき, $\sigma_\gamma = \Psi(\phi_\gamma) \in G,\ \ \gamma \in \pi_1(R, x_0)$ に対し, **定理 2.2** より

$$\chi_{f_D}(\sigma_\gamma) = \exp\left(-\sum_{i=1}^r \int_\gamma \omega_{P_i,Q_i}\right)$$

となる．ここで § 1 で示された事実（**系 1.5.2**）

$$\int_\gamma \omega_{P,Q} = -2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Re}\int_Q^P \omega_\gamma \tag{27}$$

を用いると,

$$\varphi([D])(\sigma_\gamma) = \chi_{f_D}(\sigma_\gamma) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^r \mathrm{Re}\int_{Q_i}^{P_i} \omega_\gamma\right), \quad D = \sum_{i=1}^r (P_i - Q_i) \tag{28}$$

が得られる．

**注意 2.2**　(27) は, 右辺の積分の積分路を “然るべく” 取るとき, その積分路に関しては任意の $\gamma \in H_1(R, \mathbb{Z})$ について等式が成立するという意味であった．しかし (28) の右辺の積分については積分路を取り替えてもその値の実部の差は有理整数であるから, (28) の等式の右辺の値は積分路の取り方には依らない．

ここで $g = g(R)$ 個の点 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_g \in R$ を固定するとき, 任意の $\mathrm{Pic}^0(R)$ の因子類は必ず $\sum_{1=1}^g (P_i - Q_i)$ の形の元を含むので（Riemann-Roch の定理の応用）, 写像

$$\begin{gathered} R^g \longrightarrow \mathrm{im}\,\varphi \subseteq \widehat{G^{\mathrm{ab}}}, \\ (P_1, P_2, \ldots, P_g) \mapsto \left(\sigma_\gamma \mapsto \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^g \mathrm{Re}\int_{Q_i}^{P_i} \omega_\gamma\right)\right) \end{gathered}$$

は (28) より全射であり, $R^g$ に直積位相を入れるならば, この写像は指標群 $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ の位相の定義より連続写像であることも分かる．よって $R^g$ がコンパクトであることから, $\mathrm{im}\,\varphi$ は $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ の閉部分群であることが分かった．そこで $A := \widehat{G^{\mathrm{ab}}}$, $B := \mathrm{im}\,\varphi \subseteq A$ とおいて, **定理 2.6** を適用してみる．このとき

$$B^\perp = \{\sigma \in G^{\mathrm{ab}} |\ \forall\chi \in B : \chi(\sigma) = 1\}$$

である．よって $\sigma := \sigma_\gamma \bmod [G,G] \in B^\perp$ とすると, (28) より

$$\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}\int_Q^P \omega_\gamma\right) = 1 \tag{29}$$

が任意の $P, Q \in R$ について成り立つ．もしも $G^{\mathrm{ab}}$ に於いて $\sigma \neq 1$ であるならば $H_1(R,\mathbb{Z})$ において $\gamma \neq 0$ なので, $\omega_\gamma \in \Omega_R^1$ の定義と交切数ペアリングの非退化性より, $\mathrm{Re}\displaystyle\int_\delta \omega_\gamma \neq 0$ をみたす closed path $\delta$ が存在する．従って $Q$ を $\delta$ の始点とすれば, $\delta$ 上のある点 $P$ で, $\mathrm{Re}\displaystyle\int_Q^P \omega_\gamma \notin \mathbb{Z}$ を満たすものが存在する（積分路は $\delta$ に沿う）．これは (29) に矛盾する．よって $B^\perp = 0$ が示されたので, **定理 2.6 (ii)** より $B = (B^\perp)^\perp = A$, 即ち, $\widehat{G^{\mathrm{ab}}} = \mathrm{im}\,\varphi$ が分かった．以上で $\varphi$ が同型であることが証明された.

以下同型 $\varphi$ によって $\mathrm{Pic}^0(R)$ にコンパクト Abel 群 $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ からの位相を入れてコンパクト Abel 群と見做す．$G^{\mathrm{ab}} \simeq H_1(R,\mathbb{Z})$ なので, 結局 $\varphi$ の同型性は離散 Abel 群 $H_1(R,\mathbb{Z})$ とコンパクト Abel 群 $\mathrm{Pic}^0(R)$ の間の Pontrjagin 双対性を与える:

**定理 2.7.**

$$\mathrm{Pic}^0(R) \xrightarrow{\sim} H_1(R,\mathbb{Z})\widehat{\ },\quad [D] \mapsto \chi_D$$

ここで, $D = \sum_{i=1}^r (P_i - Q_i) \in \mathrm{Div}^0(R)$ と $\gamma \in H_1(R,\mathbb{Z})$ に対し,

$$\chi_D(\gamma) = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^r \mathrm{Re}\int_{Q_i}^{P_i} \omega_\gamma\right)$$

$H_1(R,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$ であるから, 位相群として

$$\mathrm{Pic}^0(R) \simeq (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$$

が分かる．$\mathrm{Pic}^0(R)$ には位相群としての構造のみでなく, 標準的な複素 Lie 群の構造が入ることを次節で説明する.

## 2.7 Abel-Jacobi の定理

これまでに次の２つの重要な双対性が示された：

$$\begin{aligned} &\Omega_R^1 \simeq H_1(R,\mathbb{R})\widehat{\ }, \\ &\omega \mapsto \left(\gamma \mapsto \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Re}\int_\gamma \omega\right)\right) \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pic}^0(R) \simeq H_1(R,\mathbb{Z})\widehat{\ }, \\ &\left[\sum_{i=1}^r (P_i - Q_i)\right] \mapsto \left(\gamma \mapsto \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^r \mathrm{Re}\int_{Q_i}^{P_i} \omega_\gamma\right)\right) \end{aligned} \tag{31}$$

ここで, $H_1(R,\mathbb{Z})$ は $H_1(R,\mathbb{R})$ の閉部分群なので,

$$\Lambda := \left\{ \omega \in \Omega_R^1 \,\middle|\, \forall\gamma \in H_1(R,\mathbb{Z}) : \mathrm{Re}\int_\gamma \omega \in \mathbb{Z} \right\}$$

とすれば, **定理 2.6** と上の 2 つの双対性 (30), (31) より,

$$\mathrm{Pic}^0(R) \simeq H_1(R,\mathbb{Z})\hat{} \simeq H_1(R,\mathbb{R})\hat{}/H_1(R,\mathbb{Z})^\perp \simeq \Omega_R^1/\Lambda$$

を得る. この標準的な同型を $\rho$ で表すことにする :

$$\rho : \mathrm{Pic}^0(R) \simeq \Omega_R^1/\Lambda$$

ここで, $D = \sum_{i=1}^r (P_i - Q_i) \in \mathrm{Div}^0(R)$ に対し, $\omega \bmod \Lambda := \rho([D])$ は,

$$\mathrm{Re}\int_\gamma \omega \equiv \mathrm{Re}\sum_{i=1}^r \int_{Q_i}^{P_i} \omega_\gamma \pmod{\mathbb{Z}} \quad (\forall\gamma \in H_1(R,\mathbb{Z})) \tag{32}$$

で特徴付けられる. 同型 $\rho$ を用いて, Abel-Jacobi の定理を証明しよう.

**定理 2.8 (Abel-Jacobi の定理).** $\omega_1, \ldots, \omega_g$ を $\Omega_R^1$ の $\mathbb{C}$-基底とする.

$$L := \left\{ \left( \int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g \right) \in \mathbb{C}^g \,\middle|\, \gamma \in H_1(R,\mathbb{Z}) \right\}$$

とおけば, Abel-Jacobi 写像 (周期写像)

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^0(R) &\longrightarrow \mathbb{C}^g/L, \\ \left[\sum_{i=1}^r (P_i - Q_i)\right] &\mapsto \left( \sum_{i=1}^r \int_{Q_i}^{P_i} \omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^r \int_{Q_i}^{P_i} \omega_g \right) \bmod L \end{aligned}$$

は群同型. ここで, $\displaystyle\int_{Q_i}^{P_i}$ の積分路は各成分共通に採る.

*Proof.* $H_1(R,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\gamma_i$ とすると, 写像

$$\begin{aligned} \Omega_R^1/\Lambda &\longrightarrow \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}, \\ \omega \bmod \Lambda &\mapsto \left( \mathrm{Re}\int_{\gamma_1} \omega, \mathrm{Re}\int_{\gamma_2} \omega, \ldots, \mathrm{Re}\int_{\gamma_{2g}} \omega \right) \bmod \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned} \tag{33}$$

は同型である. なぜなら, 単射性は $\Lambda$ の定義より明らかで, 全射性は, § 1 で示された $\mathbb{R}$-ベクトル空間のペアリング

$$\Omega_R^1 \times H_1(R,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (\omega,\gamma) \mapsto \mathrm{Re}\int_\gamma \omega$$

の非退化性と $H_1(R,\mathbb{R}) = H_1(R,\mathbb{Z}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ から従うからである.

標準的同型 $\rho : \mathrm{Pic}^0(R) \longrightarrow \Omega_R^1/\Lambda$ と同型 (33) を合成することで, (32) に注意すれば同型

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pic}^0(R) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}, \\ &\left[\sum_{i=1}^{r}(P_i - Q_i)\right] \mapsto \left(\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_{\gamma_1}, \ldots, \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_{\gamma_{2g}}\right) \mod \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned} \tag{34}$$

を得る．さて,

$$\omega_1,\ -\sqrt{-1}\,\omega_1,\ \omega_2,\ -\sqrt{-1}\,\omega_2, \ldots, \omega_g,\ -\sqrt{-1}\,\omega_g$$

と

$$\omega_{\gamma_1}, \omega_{\gamma_2} \ldots, \omega_{\gamma_{2g}}$$

は各々 $\Omega_R^1$ の $\mathbb{R}$-基底をなすので

$$(\omega_1,\ -\sqrt{-1}\,\omega_1, \ldots, \omega_g,\ -\sqrt{-1}\,\omega_g) = (\omega_{\gamma_1}, \ldots, \omega_{\gamma_{2g}})T$$

を満たす $T \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{R})$ が存在する．そこで同型 (34) に引き続きさらに同型

$$\mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g} \simeq \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}T \simeq \mathbb{C}^g/h(\mathbb{Z}^{2g}T)$$

を合成する．ここで最初の同型は右から行列 $T$ を掛けることで得られるもので, 第 2 の同型は

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{2g} &\longrightarrow \mathbb{C}^g, \\ (x_1, x_2, \ldots, x_{2g-1}, x_{2g}) &\mapsto (x_1 + \sqrt{-1}x_2, \ldots, x_{2g-1} + \sqrt{-1}x_{2g}) \end{aligned}$$

から誘導されるものである．

$\gamma \in H_1(R, \mathbb{Z})$ について

$$\left(\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g\right) = h\left(\left(\mathrm{Re}\int_\gamma \omega_{\gamma_1}, \ldots, \mathrm{Re}\int_\gamma \omega_{\gamma_{2g}}\right)T\right)$$

であり, $\left(\mathrm{Re}\displaystyle\int_{\gamma_j}\omega_{\gamma_i}\right)_{i,j} = ((\gamma_i, \gamma_j))_{i,j} \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ なので ($H_1(R, \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-基底として $\alpha_i$, $\beta_i$ ($1 \leq i \leq g$) を採ったときの交切数ペアリングの Gram 行列式は $\pm 1$ だから)

$$h(\mathbb{Z}^{2g}T) = L$$

が分かる．さらに,

$$\begin{aligned} h\left(\left(\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_{\gamma_1}, \ldots, \mathrm{Re}\sum_{i=1}^{r}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_{\gamma_{2g}}\right)T\right)& \\ = \left(\sum_{i=1}^{r}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_1, \ldots, \sum_{i=1}^{r}\int_{Q_i}^{P_i}\omega_g\right)& \end{aligned}$$

が成り立つので, 定理の主張が証明された． □

上の定理の $L$ は $\mathbb{C}^g$ の格子になる．なぜならば, $H_1(R,\mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}\gamma_i$ とすれば, $L$ は $\mathbb{Z}$ 上

$$\left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_i} \omega_g\right) \quad (1 \leq i \leq 2g) \tag{35}$$

で生成されるが,

$$\sum_{i=1}^{2g} c_i \left(\int_{\gamma_i} \omega_1, \ldots, \int_{\gamma_i} \omega_g\right) = 0 \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

ならば, $\delta = \sum_{i=1}^{2g} c_i\gamma_i \in H_1(R,\mathbb{R})$ と任意の $\omega \in \Omega_R^1$ に対して, $\displaystyle\int_\delta \omega = 0$ となる．従って, (30) より $\delta = 0$, つまり, $c_i = 0$ $(1 \leq i \leq 2g)$ を得る．よって (35) は $\mathbb{R}$ 上線型独立であるから, $L$ は $\mathbb{C}^g$ の格子である．従って, Abel-Jacobi 写像は $\mathrm{Pic}^0(R)$ と $g$ 次元複素トーラス $\mathbb{C}^g/L$ の間の群同型を与える．この $\mathbb{C}^g/L$ の複素 Lie 群としての構造は, $\Omega_R^1$ の $\mathbb{C}$-基底 $\omega_1, \ldots, \omega_g$ の採り方に依らずに $R$ のみから一意的に定まる（$\mathbb{C}$-基底を取り替えると, 格子 $L$ が $\mathrm{GL}_g(\mathbb{C})$ の作用で変化するから）．この $\mathbb{C}^g/L$ を $R$ の **Jacobi 多様体**と呼び, $\mathrm{Jac}(R)$ で表す:

$$\mathrm{Jac}(R) = \mathbb{C}^g/L$$

従って, Abel-Jacobi 写像によって $\mathrm{Pic}^0(R)$ に標準的な複素 Lie 群の構造が入る．

# 参考文献

[1] 岩澤健吉: 代数函数論, 岩波書店

[2] J. Igusa（井草準一）: Zur klassischen Theorie der algebraischen Funktionen, *J. Math. Soc. Japan* **1** (1948), 63–72.