第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.131-176

超 楕 円 函 数 論

大西 良博*

序 文

今日では楕円曲線を扱つた書物が数多く出版されてゐて, そのほとんどが楕円函数にも触れてゐるので, 楕円函数を学ぶのに不自由はないと思はれる.

一方, 種数の高い代数曲線に付随する Abel 函数については, 抽象論 (Abel 函数といふ言葉さへ登場しない) を展開した書物や論文はあるものの, この方面の具体的な記述に触れるのは困難に感じられる. 筆者は, 永らく, 例へば 竹内端三著, 「楕圓凾數論」 (岩波全書) の様に, 実際の計算に耐へる様な記述をしたものが見当たらないことに不満を抱いてゐた. その希望に最も近いものは D.Mumford: Tata lectures on theta II, Birkhäuser ([Mu2]) であつた. しかしその後, Cambridge 大学の H.F.Baker がおよそ 1 世紀前にこの方面に多大な貢献をしてゐること, 中でも, 一般の Abel 函数を極めて具体的に扱つた大著 Abelian Functions (1897, Cambridge Univ. Press) と種数 2 の場合を詳述した Introduction to Multiply Periodic Functions (1907, Cambridge Univ. Press) が書かれてゐたことを知つてからは, この方面の研究に没頭してきた.

本稿は超楕円函数の基礎理論を H.F.Baker らによる優れた定式化にしたがつて解説したものである.

この記事では, 主として超楕円函数の一般論を展開する. 必要な基礎事項については, 随時, 本報告集収録の解説 [Y], [Og], [Gu], [OU] を引用することが望ましいが, その様に稿をまとめるため (記号等の整理) の時間的な制約から, 必要な事項はすべてこの記事の内部でも述べることとにした. 時間の許す範囲で, 本報告集の解説の参照すべき箇所を記したが, 完全さからは程遠い. しかし, ほとんどのことがらに実際にこの報告集に述べられてゐるはずであるので, 証明については必要に応じてこれらの解説をご参照いただきたい.

本稿で述べる Abel 函数論は, 超楕円曲線以外の代数曲線に対しても, 無限遠点が 1 点だけ ((n,s)-curves) であれば, 同様に一般化される. その基本的な定式化は本稿に述べたものと同様であるが, それは現在, 進展中のことがらでもあり, ここに取り入れない. 文献をいくつかあげておくので, それを辿つて最新の成果に踏み込んでいただけたることを望む.

*岩手大学 人文社会科学部

1 Riemann 面の一般論から

1.1 Riemann 面と Abel 微分

以下では Riemann 面について必要な事柄を整理することから始める.

第 1 種微分形式, 周期行列

種数 g の境界のない Riemann 面 X を考える. 1 点 I を固定し, 図 1.2 の様に交点数が $\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}$, $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$, $\beta_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$ で, そのどれもが I を始点にして再び I に戻る様な路

(1.1) $$\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \beta_1, \cdots, \beta_g$$

をとり, これらに沿って X を切り開いてできる "多角形" $X_\circ$ をとする.

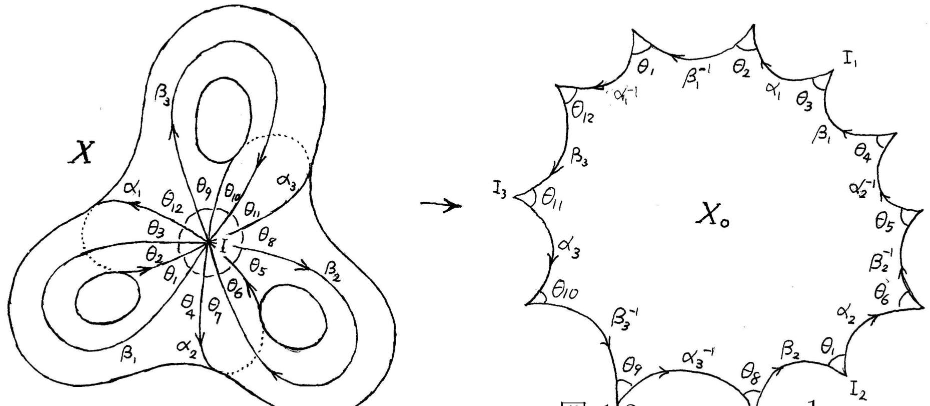

図 1.2 1

このとき $X_\circ$ の各辺を各 α_j と β_j に因み,

(1.3) $$\alpha_1,\ \beta_1,\ {\alpha_1}^{-1},\ {\beta_1}^{-1},\ \cdots,\ \alpha_g,\ \beta_g,\ {\alpha_g}^{-1},\ {\beta_g}^{-1}$$

と記す. X 上の任意の閉曲線はいくつかの α_j, ${\alpha_j}^{-1}$, β_j, ${\beta_j}^{-1}$ をつないだものと homotope である.

Riemann 面上の有理型微分形式のことを単に**微分**または**微分形式**または**Abel 微分**と呼ぶ. Abel 微分の X 上での線積分を**Abel 積分**とよぶ.

命題 1.4 Riemann 面 X 上の微分の留数の和は 0 である.

証明 任意の微分 ω について

(1.5)
$$\begin{aligned}
\text{“留数の和”} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial X_\circ} \omega \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{\alpha_j}\omega + \int_{\beta_j}\omega + \int_{\alpha_j^{-1}}\omega + \int_{\beta_j^{-1}}\omega\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{\alpha_j}\omega + \int_{\beta_j}\omega - \int_{\alpha_j}\omega - \int_{\beta_j}\omega\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

もしこの逆が成立すれば, 事は単純なのであるが, 全くその様にはなつてゐない. 例へば, Weierstrass の空隙定理と呼ばれる定理がある ([Ku]). そこで, どの様な微分が存在するのかを調べたい.

定義 1.6 ([Ku], pp.116-117) $D_1, \cdots, D_m$ は X 上の互ひに共通部分を持たない有限個の局所円板とし, 各閉包 $\overline{D_j}$ の近傍の上に, 次の様な (多価) 実数値函数 s_j が定義されてゐるとする.

(i) s_j は D_j の有限個の点を除いて $\overline{D_j}$ の近傍で調和であり,

(ii) s_j は境界 ∂D_j の近傍で一価である.

このとき X 上の函数 U で

(a) u は $X - \bigcup_{j=1}^m U_j$ で一価調和であり,

(b) 各 $\overline{D_j}$ で一価調和

である様なものが存在するとき, U を, 与へられた**特異性** $\{D_j, s_j\}_{j=0}^m$ **を持つ調和函数** (あるいは potential) といふ.

次の定理が基本的である.

補題 1.7 (存在定理) ([Ku], p.117) X 上に与へれた特異性 $\{D_j, s_j\}_{j=0}^m$ を持つ調和函数が存在するための必要十分条件は

$$\sum_{j=1}^m \int_{\partial D_j} {}^*ds_j = 0 \tag{1.8}$$

が成立することである. そして, もし存在すれば定数の差を除いて一意的である. ここに * は共役微分を取ることを示す.

証明 証明は [Ku] を参照されたい. Riemann はこれの証明を Dirichlet の原理により証明したが, その証明に関する経緯について [Kl], p.266 付近を読まれることをお勧めする. □

これの証明は解析的であるが, Weil ([Wei], p.43) がいふ様に, ここを認めれば, 以下はほぼ代数的な議論で進むことができる.

命題 1.9 Δ を X 上の局所開円板とする. P, Q を Δ 内の 2 点とするとき, X 上の微分形式 τ_{PQ} が存在し, P, Q 以外の点では正則で, P において留数 1 の 1 位の極, Q において留数 -1 の 1 位の極を持ち, さらに $\Re \int_{\partial\Delta} \tau_{\mathrm{PQ}} = 0$ となる. いま Δ 内で P と Q を結ぶ単連結な曲線を選び, それを γ と記すとき, X 上の任意の閉曲線 α に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_\alpha \Re\, \tau_{\mathrm{PQ}} = \gamma \cdot \alpha. \tag{1.10}$$

証明 Δ の局所変数 z を, Δ が $\{z \mid |z| < 1\}$ に対応する様に取り,

$$s(z) = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{z - z(\mathrm{P})}{z - z(\mathrm{Q})} \tag{1.11}$$

とおくとき,

$$\int_{\partial\Delta} {}^*ds = -\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} d\log\left|\frac{z-z(\mathrm{P})}{z-z(\mathrm{Q})}\right| = 0 \tag{1.12}$$

なので, 1.7 により, 特異性 $\{\Delta, s\}$ を持つ調和函数 $U_{\mathrm{P,Q}}$ が存在する. このとき, $\tau_{\mathrm{P,Q}} = i\,dU_{\mathrm{P,Q}} - {}^*dU_{\mathrm{P,Q}}$ とおくと, 可微分多様体における微分形式の性質から主張が導かれる. Weyl ([Wey], p.114) を参照されたい. □

命題 1.13 Riemann 面 X 上の正則な微分形式 (**第 1 種微分形式**ともよばれる) の空間の次元は g である.

証明 その様な空間の基底は次の様に作ればよい. X 上の閉曲線 α に対して, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_n$ をその上に順に十分近接して取つた点列とし,

$$\omega_\alpha = \frac{1}{2\pi}\big(\tau_{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \tau_{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \cdots + \tau_{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_1}\big) \tag{1.14}$$

とおく. ここで十分近接してゐるといふのは, すべての隣合つた 2 点の組が, それぞれ適当な局所円板に含まれることをいふ. このとき α は X の至るところ正則な微分形式である[1]. しかも (1.10) の後半の主張により, β が X 上の任意の閉曲線であれば

$$\int_\beta \Re\,\omega_\alpha = \beta\cdot\alpha \tag{1.15}$$

が成り立つ. そこで, 標準切断を与へる様な閉曲線の組を

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_g,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots, \beta_g \tag{1.16}$$

として, これらに応じて $\omega_{\alpha_j}, \omega_{\beta_j}$ を作る. (これは $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$ の取り方に依存する.) それらを単に

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_{2g} \tag{1.17}$$

と書けば, これらが X 上の任意の第 1 種微分形式の空間を $\mathbb{R}$ 上張る. 実際 ω を X 上の任意の第 1 種微分形式として,

$$c_j = \int_{\alpha_j}\omega,\quad c_{g+j} = \int_{\beta_j}\omega \tag{1.18}$$

とすれば, 任意の閉曲線 β について

$$\Re\int_\beta \big(\omega - c_1\,\omega_1 - \cdots - c_{2g}\,\omega_{2g}\big) = 0 \tag{1.19}$$

となるから, 始点 I を固定して X 上の函数

$$\varphi(\mathrm{P}) = \Re\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{P}} \big(\omega - c_1\,\omega_1 - \cdots - c_{2g}\,\omega_{2g}\big) = 0 \tag{1.20}$$

[1] ここに de Rham の定理 (1-forms と 1-cocyles の対応) の原型が見られる.

が得られる. しかし, これは極を持たない調和函数なので定数である. よつて

$$\omega = c_1\,\omega_1 + \cdots + c_{2g}\,\omega_{2g} \tag{1.21}$$

である. さらに (1.15) から $\omega_1, \cdots, \omega_{2g}$ が $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることもわかる. 次に, いま, 第 1 種微分形式の空間の $\mathbb{C}$ 上の次元が q であつたとして, その基底を (上の記号を忘れて) $\omega_1, \cdots, \omega_q$ とすれば

$$\omega_1,\ \cdots,\ \omega_q,\ \sqrt{-1}\,\omega_1,\ \cdots,\ \sqrt{-1}\,\omega_q \tag{1.22}$$

は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立なので $2q \leqq 2g$. しかるに, 任意の第 1 種微分形式は $\omega_1, \cdots, \omega_q$ の $\mathbb{C}$ 上の 1 次結合で書けるから $2q \geqq 2g$. よつて $q = g$. 以上に関しては ([Ku], p.128, 定理 5.8; [Wey], pp.114-115 を参照されたい. ([I], p.90, 定理 2.15 も参照).

□

つぎの補題から Riemann-Roch の定理をはじめ, 以下のほとんどの定理が導かれる.

補題 1.23 $X_\circ$ において $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_m$ および $\mathrm{Q}_1, \cdots, \mathrm{Q}_n$ を $\partial X_\circ$ 上にない点とせよ. η を高々 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_m$ において極をもつ微分, η' を同じく高々 $\mathrm{Q}_1, \cdots, \mathrm{Q}_n$ において極をもつ微分とし, 各点 P_i における局所径数 t_i に関する展開を

$$\eta = \sum_\nu a_\nu^{(i)} t_i^\nu dt_i, \quad \eta' = \sum_\nu {a'}_\nu^{(i)} t_i^\nu dt_i \tag{1.24}$$

とせよ. 同様に Q_j における局所径数 t'_j に関する展開を

$$\eta = \sum_\nu b_\nu^{(i)} {t'_i}^\nu dt_i, \quad \eta' = \sum_\nu {b'}_\nu^{(i)} {t'_i}^\nu dt_i \tag{1.25}$$

とすれば

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{g}&\left(\int_{\alpha_i}\eta\int_{\beta_i}\eta' - \int_{\beta_i}\eta\int_{\alpha_i}\eta'\right)\\ &+\sum_{i=1}^{m}\left(a_{-1}^{(i)}\int_{\mathrm{I}_1}^{\mathrm{P}_i}\eta' + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{-\nu-2}^{(i)}{a'_\nu}^{(i)}}{\nu+1}\right)\\ &+\sum_{j=1}^{n}\left(b_{-1}^{(j)}\int_{\mathrm{I}_1}^{\mathrm{Q}_i}\eta' + \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{-\nu-2}^{(j)}{a'_\nu}^{(j)}}{\nu+1}\right) = 0\end{aligned} \tag{1.26}$$

である.

証明[2] $X_\circ$ のなかで P_i と I_1 および Q_j と I_1 をどの 2 本も互いに交わらないような連続曲線 γ_i および ${\gamma'}_j$ で結び, $\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_j$ を中心とした十分小さい円 $\varepsilon_i, {\varepsilon'}_j$ を描く. これらはすべて有向曲線と考えて逆の向きは γ^{-1} などと表すことにする. 証明は図のような積分路 $\gamma_i\varepsilon{\gamma_i}^{-1}$

[2] [I], 第 5 章, p.252, 定理 5.5 による.

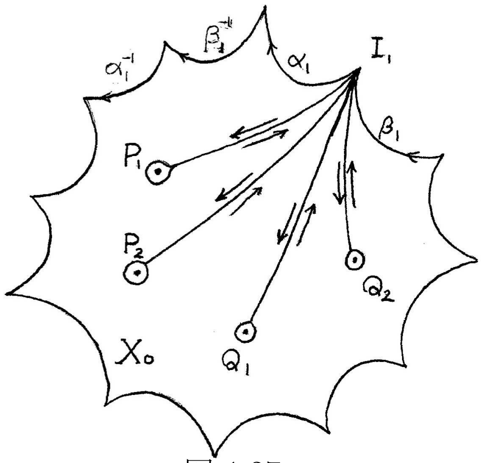

図 1.27

や ${\gamma'}_j \varepsilon {\gamma'_j}^{-1}$ と $\partial X_\circ$ を結んだ路に沿った $\eta d\eta'$ の積分を計算することで得られる: 命題 1.4 より

$$\begin{aligned}(1.28)\qquad &\int_{\partial X_\circ} + \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{\gamma_i} + \int_{{\gamma_i}^{-1}} + \lim \int_{\varepsilon_i}\right)\\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\left(\int_{{\gamma'}_j} + \int_{{\gamma'}_j^{-1}} + \lim \int_{{\varepsilon'}_j}\right) = 0.\end{aligned}$$

この左辺の各項が順に, 示すべき式の左辺の各項に対応する. □

補題 1.29 ω', ω を第 1 種微分とし, $w(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}} \omega$ とおくと,

$$\begin{aligned}(1.30)\qquad &\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{\alpha_j}\omega\int_{\beta_j}\omega' - \int_{\alpha_j}\omega'\int_{\beta_j}\omega\right)\left(= \int_{\partial X_\circ} w\omega'\right) = 0,\\ &\sum_{j=1}^{g}\left(\int_{\alpha_j}\overline{\omega}\int_{\beta_j}\omega - \int_{\alpha_j}\omega\int_{\beta_j}\overline{\omega}\right) \geqq 0.\end{aligned}$$

ここで, 不等号の等号は $\omega = 0$ のときのみ成り立つ.

証明 第 1 式. 補題 1.23 で $\eta = \omega_i$, $\eta' = {\omega'}_j$ とおけば良い. 第 2 式は 1.23 と Stokes の定理:

$$(1.31)\qquad \int_{\partial X_\circ} w\overline{\omega} = \int_{X_\circ} d(w\overline{\omega}) = \int_{X_\circ} \omega\overline{\omega}, \quad \left(w = w(P) = \int_{\infty}^{P}\omega\right)$$

から出る. 実際 $X_\circ$ を複素平面 (座標 $z = x + iy$) に埋め込んで $\omega = f dx + g dy$ とおけば, Cauchy-Riemann の関係式より $g = if$ なので, $\omega\overline{\omega} = -2i|f|dxdy$, したがって, $\int_{X_\circ}\omega\overline{\omega} \geq 0$ となるからである. □

X 上の正則な微分形式の空間の基底を $\omega_1, \cdots, \omega_g$ として, これらについて

$$\Omega' = \left[\int_{\alpha_j} \omega_i\right], \quad \Omega'' = \left[\int_{\beta_j} \omega_i\right], \quad \Omega = \left[\,\Omega' \quad \Omega''\,\right] \tag{1.32}$$

とおき α_j, β_j での**周期行列**とよぶ. また X 上の閉曲線に関する Abel 積分を Abel 微分 ω の**周期**とよぶ. 補題 1.29 から次の補題が導かれる.

補題 1.33 第 1 種微分 ω について
(i) すべての $j = 1, \cdots, g$ について $\displaystyle\int_{\alpha_j} \omega = 0$,
(ii) すべての $j = 1, \cdots, g$ について $\displaystyle\int_{\beta_j} \omega = 0$,
(iii) すべての $j = 1, \cdots, g$ について $\displaystyle\int_{\alpha_j} \omega \in \mathbb{R}$ かつ $\displaystyle\int_{\beta_j} \omega \in \mathbb{R}$,
のうちいづれか一つでも成り立てば $\omega = 0$ である

証明 いづれも (1.30) の第 2 式からわかる. (主張 (i) は [OU], 1.3, Claim 1 の単射性に他ならない. そちらも参照されたい.) 同様の方法で, (ii), (iii) がわかる. □

系 1.34 Ω', Ω'' は正則行列である.

証明 いま $(c_1, \cdots, c_g)\Omega' = (0, \cdots, 0)$ とする. これは $\omega = \sum_i c_i \omega_i$ のすべての α_j に関する周期が 0 であることを意味するが, このとき 1.33 (i) により, $(c_1, \cdots, c_g) = (0, \cdots, 0)$ を得る. Ω'' についても 1.33 (ii) から同様に導ける. □

補題 1.35 任意に g 個の複素数 $z_1, \cdots, z_g$ が与へられたとき,

$$\int_{\alpha_j} \omega = z_j \quad (\text{for all } j = 1, \cdots, g) \tag{1.36}$$

となる第 1 種微分形式 ω が存在する.

証明 系 1.34 により, 写像 $\omega \longmapsto \int_{\alpha_j} \omega$ は 2 つの $\mathbb{C}$ 上の g 次元線形空間の同型であるからである. (この主張は [OU], 1.3, Claim 1 の全射性に他ならない. そこの証明も参照されたい.) □

補題 1.29 は次の様にも記述できる:

定理 1.37 (Riemann の関係式)
(1) $\Omega \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix} {}^t\Omega = O$
(2) $i\Omega \begin{bmatrix} & 1_g \\ -1_g & \end{bmatrix} {}^t\overline{\Omega}$ は正定値 Hermite 行列である.

$T = \Omega'^{-1}\Omega''$ とおくとき 1.37 の主張は ${}^tT = T$ かつ $\Im T$ は正定値行列であることに他ならない. いま, すぐ上でとった第 1 種微分形式の基底をとりかえて

$$
{}^t\begin{bmatrix}\hat{\omega}_1 & \cdots & \hat{\omega}_g\end{bmatrix} := \Omega'^{-1}\,{}^t\begin{bmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_g\end{bmatrix} \tag{1.38}
$$

とおけば, $T = \Omega'^{-1}\Omega''$ であるから

$$
\left[\int_{\alpha_j} \hat{\omega}_i\right] = 1_g, \quad \left[\int_{\beta_j} \hat{\omega}_i\right] = T \tag{1.39}
$$

となる. このような基底を本稿では

$$
\hat{\omega} = {}^t\begin{bmatrix}\hat{\omega}_1 & \cdots & \hat{\omega}_g\end{bmatrix} \tag{1.40}
$$

の様に書く. これらを**正規化された**第 1 種微分形式の基底といふ. $\Omega = \begin{bmatrix}\Omega_1 & \Omega_2 & \cdots & \Omega_{2g}\end{bmatrix}$ と書くとき, $\Omega_1, \cdots, \Omega_{2g}$ は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることが, 1.33 より容易にわかる. それゆゑ, $\Lambda = \mathbb{Z}\Omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\Omega_{2g}$ あるいは$\omega\hat{\Lambda} = \Omega'^{-1}\Lambda$ とおくとき, Λ, $\hat{\Lambda}$ はそれぞれ $\mathbb{C}^g$, $\Omega'^{-1}\mathbb{C}^g$ の 格子になつてゐる.

定義 1.41 上記の $\mathbb{C}^g/\Lambda$ や $\Omega'^{-1}\mathbb{C}^g/\hat{\Lambda}$ は X の **Jacobi 多様体** と呼ばれ, Abel 多様体といふ代数多様体の一種である. この note では第 1 種微分形式の基底を定めるごとに, それから得られる $\mathbb{C}^g/\Lambda$ の方を J と記して,

$$
J = \mathbb{C}^g/\Lambda \tag{1.42}
$$

とし, 正規化された微分形式 $\hat{\omega}$ から得られる $\Omega'^{-1}\mathbb{C}^g/\hat{\Lambda}$ とは同一視しない.

1.1.1 第２種・第３種微分形式

ここで, 1.9 で述べた τ_{PQ} の再定義を込めて正規化された微分形式の定義をまとめておく.

定義 1.43 (1) 2 点 Q_1, $\mathrm{Q}_2 \in X$ に対し $\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}$ を Q_1, Q_2 以外のすべての点において正則で, $\mathrm{ord}_{\mathrm{Q}_1}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2} = \mathrm{ord}_{\mathrm{Q}_2}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2} = -1$ かつ $\mathrm{Res}_{\mathrm{Q}_1}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2} = 1$, $\mathrm{Res}_{\mathrm{Q}_2}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2} = -1$ であり, すべての j について

$$
\int_{\alpha_j} \tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2} = 0 \tag{1.44}
$$

となるような微分形式とする. ここで ord, Res はそれぞれ位数, 留数 ([I], p.139) をあらわす. このような微分形式を **正規化された第 3 種微分形式** とよぶ. このような微分形式は 1.7 と 1.35 より存在する ([I], p.110, 定理 2.26 を参照されたい → [Ku], pp.133–134). また, このような微分形式が 2 つあればその差は第 1 種微分形式であるから, 1.33(i) よりそれらは等しい. したがって上記条件のもとで一意的に定まる.

(2) $k \geq 2$ を与えられた自然数とする．局所径数 t の与えられた点 $\mathrm{P} \in X$ に対して $\eta_{\mathrm{P},t,k}$ を P 以外のすべての点において正則で, $\mathrm{ord}_{\mathrm{P}}\eta_{\mathrm{P},t,k} = -k$ で P における Laurent 展開が

$$\eta_{\mathrm{P},t,k} = \left(-\frac{k-1}{t^k} + O(1)\right)dt \tag{1.45}$$

の形であり, $j = 1, \cdots, g$ に対して

$$\int_{\alpha_j} \eta_{\mathrm{P},t,k} = 0 \tag{1.46}$$

となるような微分形式とする[3]．ただし $O(1)$ は t に関して 0 次以上の項を表す．このような微分形式を**正規化された第２種微分形式** とよぶ．このような微分形式も, やはり 1.9, 1.34 より存在する ([I], p.109, 定理 2.25, → [Ku], pp.133–134)．また, 上と同様に 1.33(i) より一意的に定まる．

今後は, 函数, 微分形式などは X 上のものとも $X_\circ$ 上のものとも考える．それをいちいち断らないが混乱はないと信ずる．

定理 1.47 X 上の, 局所径数の与えられた点 P および 2 点 Q_1, Q_2 とに対して, 先にとってあった道 α_i, β_j をこの 3 点を通過しないようにすこしずらす．いま, P の近傍の動点 P_t を局所径数 t の値が定める点, つまり, $t(\mathrm{P}_t) = t$, $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}$ なる $X_\circ$ の点とする．このとき $X_\circ$ 上の積分に関して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_t} \tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}\Big|_{t=0} &= \int_{\mathrm{Q}_1}^{\mathrm{Q}_2} \eta_{\mathrm{P},t,2}, \\ -2\pi\sqrt{-1}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_t} \hat{\omega}_j\Big|_{t=0} &= \int_{\beta_j} \eta_{\mathrm{P},t,k}. \end{aligned} \tag{1.48}$$

証明 補題 1.23 において $m = 1$, $n = 2$, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}$, $t_1 = t$, $a_\nu{}^{(i)} = a_\nu$, $a'_\nu{}^{(i)} = a'_\nu$ とし, $\eta = \eta_{\mathrm{P},t,2}$, $\eta' = \tau_{\mathrm{Q}_i,Q_j}$ とおけば η が正規化されているので最初の和は消える．また η の P における展開の係数 $a_{-1} = 0$ であるから, 第 2 項の最初の項は消える．$a_\nu = 0$ $(\nu \leq -3)$, $b'^{(i)}_\nu = 0$ $(\nu \leq -2)$ なので, 第 2 項の和の部分は $\nu = 0$ の項を除いて消え, 第 3 項も消える．$a_{-2} = 1$, $a'_\nu = \frac{\eta}{dt}\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{P}_t}\eta$, $b'_{-1} = 1$ なので, 最初の式がでる．([I], 第 5 章, p.259, (1.27))．$\eta = \hat{\omega}_j$, $\eta' = \eta_{\mathrm{P},t,k+1}$ とおけば, 第 2 の式を得る． □

定理 1.49 4 点 P_1, P_2, Q_1, Q_2 について, すべての道 β_j をこれらの点を通らないようにずらしておく．このとき $X_\circ$ 上の積分に関して次が成り立つ．

$$\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2} = \int_{\mathrm{Q}_1}^{\mathrm{Q}_2} \tau_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}, \quad 2\pi\sqrt{-1}\int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} \hat{\omega}_j = \int_{\beta_j} \tau_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}. \tag{1.50}$$

[3]いつもこの様な微分が存在するわけではないことに注意せよ．

最初の式は**変数と径数の交換法則**と呼ばれてゐる．後者は (2.16), 3.48, (5.23) などの証明などに使ふ．

証明 前者は[I], 第 5 章, p.259, (1.28) そのもので, 1.23 で $m = n = 2$, $\eta = \tau_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}$, $\eta' = \tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}$ とすれば得られる．後者を得るには, やはり, 1.23 で $m = 2$, $n = 0$, $\eta = \tau_{\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2}$, $\eta' = \hat{\omega}_j$ とすればよい． □

これらの証明について一言．定理 1.23 は [I], p.243, 定理 5.2 そのものであり, 1.47 と 1.49 は同書, p.252. 定理 5.5 に含まれている[4].

X 上の点の形式的な有限和

$$D = \sum_{\mathrm{P}\in X} n_{\mathrm{P}}\mathrm{P} \quad (n_{\mathrm{P}} \in \mathbb{Z}) \tag{1.51}$$

を X の**因子** (divisor) といひ, これらのなす Abel 群を**因子群**といふ．この因子 D についての n_{P} の和を D の**次数**といふ:

$$\deg D = \sum_{\mathrm{P}\in X} n_{\mathrm{P}}. \tag{1.52}$$

また, 全ての n_{P} が正または 0 で, 少なくともひとつの n_{P} が 0 でないとき, ある様な因子を**整因子** (integral divisor) といふ．いま X 上の函数 f と各点 P について f が P で n_{P} 位の零, または $-n_{\mathrm{P}}$ の極であるとする．このとき

$$(f) = \sum_{\mathrm{P}\in X} n_{\mathrm{P}}\mathrm{P} \tag{1.53}$$

と書いて (f) を f の因子と呼ぶ．さらに ω が X 上の微分形式であるとき, 各点 P における局所径数を t をとれば, $\omega = g(t)dt$ (g は函数) と書けるが, $g(t)$ の P における (零または極) の位数を n_{P} として, ω の因子を

$$(\omega) = \sum_{\mathrm{P}\in X} n_{\mathrm{P}}\mathrm{P} \tag{1.54}$$

と定義する．これは局所径数 t_{P} の取り方に依らない．

2 つの因子 D_1 と D_2 に対してその差 $D_1 - D_2$ がある函数の因子 (f) に一致するとき, D_1 と D_2 は**有理同値**であるといふ．これは明らかに同値関係である．

どんな 2 つの微分形式の因子も有理同値であるから, 微分形式の因子全体のなす類あるいはその 1 つの代表を K_X で表はすことにする．

函数の因子に有理同値な因子の全体は Abel 群をなすので, 全因子 (または次数 0 の因子全体) の有理同値に関する剰余群を考へることができる．それを**因子類群**または **Picard 群**と呼び

$$\mathrm{Pic}X \quad (\text{または}\, \mathrm{Pic}^{\circ}X) \tag{1.55}$$

と書く．

[4] これらは [HL] ではどの様に書かれてゐるのであらうか．

定義 1.56 因子 D に対し, $(f)+D$ が正因子になるような有理関数 f の全体のなす $\mathbb{C}$ 上の線形空間を $L(D)$ であらわす.

これにより, $(\eta)+D$ が整因子になるような有理型微分 η 全体のなす $\mathbb{C}$ 上の線形空間は, 明らかに, $L(K_X-D)$ と表はされる.

命題 1.57 D_1 と D_2 が有理同値であるとき $L(D_1)=L(D_2)$ である.

定理 1.58 (Riemann-Roch の定理)
$\dim L(D)=\deg D-g+1+\dim L(K_X-D)$.

証明[5] Step 1. D が整因子のときは 1.47 の第 2 の式と 1.49 の第 2 の式から線形代数学の簡単な事実から示される. [TD], p.85 をみよ. この証明は直観に訴える, わかりやすい証明であると思う.
Step 2. 次に D または K_X-D が整因子と有理同値であれば, 成り立つことはすぐにわかる.
Step 3. $\dim L(D)>0$ ならば $0\neq f\in L(D)$ について $(f)+D$ は整因子なので, その様な因子 D は整因子と有理同値となり, 与式は成り立つ.
Step 4. 同様に $\dim L(K_X-D)>0$ のときも成り立つ.
Step 5. 以上により, もし D も K_X-D も整因子とは有理同値でないとすれば, $\dim L(D)=\dim L(K_X-D)=0$ となることがわかつたから, このとき示すべき等式は

$$\deg D=g-1 \tag{1.59}$$

となる. つまり $D=D_1-D_2$ （D_i は 0 でない互ひに素な整因子）と書けてゐるとき, (1.59) を示せば良い. それは [FK], p.77 Theorem の様にすればできる. まづ

$$\dim L(D_1)\geqq\deg D_1-g+1=\deg D_2+\deg D-g+1. \tag{1.60}$$

ここで

$$\deg D\geqq g \tag{1.61}$$

だとすると

$$\dim L(D_1)\geqq\deg D_2+1. \tag{1.62}$$

となるので, $0\neq f\in L(D_1)$ で丁度 D_2 に極を持つものが取れる. これは線形代数である. かくして $f\in L(D_1-D_2)=L(D)$ となり, $\dim L(D)>0$ となるが, これは仮定に矛盾する. よつて

$$\deg D\leqq g-1. \tag{1.63}$$

[5] [I] は先にこの定理を証明しているので, 我々とは議論の進め方が全く異なる.

しかるに $\dim L(D) = \dim L(K_X - D) = 0$ なので

$$\deg(K_X - D) \leqq g - 1, \tag{1.64}$$

つまり

$$\deg D \geqq g - 1 \tag{1.65}$$

がわかり, 結局

$$\deg D = g - 1 \tag{1.66}$$

でなければならない. □

1.2 Theorem of Abel-Jacobi

定義 1.67 整因子 D に対して $\dim L(-D) = 1$ が成り立つとき, すなはち高々 D なる極をもつような X 上の有理型関数が定数以外に存在しないとき D を**一般因子**とよぶ.

D が一般因子であることは定理 1.13 から

$$\dim L(K_X - D) = g - \deg D \tag{1.68}$$

と同値である. とくに一般因子の次数は g を越えない. また次数 g の因子が一般であるための必要十分条件は

$$\dim L(K_X - D) = 0 \tag{1.69}$$

となることである. 次数が g 以下で一般因子でないものを**特殊因子**とよぶ. X 上には必ず一般因子が存在する: すなわち

定理 1.70 $\dim L(K_X - P) = g - 1$. すなわち, すべての第 1 種微分の共通零点は存在しない.

証明 [TD], p.86. □

定理 1.71 X 上に相異なる点 $\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_g$ を因子 $\mathrm{P}_1 + \cdots + \mathrm{P}_g$ が一般であるようにとれる.

証明 [TD], p.87, 定理 11 □

定義 1.72 基点 P_0 を固定する. 次数 0 の因子 $D = c_1\mathrm{P}_1 + \cdots + c_n\mathrm{P}_n$ ($c_i \in \mathbb{Z}$) と第 1 種微分の基底 ω に対し, 適当な積分路を用意して写像

$$D \longmapsto \sum_i c_i \int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_i} \omega \tag{1.73}$$

を考へる．これは　mod Λ で積分路の選び方に依らず定まる．これを

$$D \longmapsto a(D,\omega) \tag{1.74}$$

と略記して **Abel 写像**といふ．X の n 個の順序を無視した直積

$$\mathrm{Sym}^n X \tag{1.75}$$

を考へて, その元を $\mathrm{P}_1+\cdots+\mathrm{P}_n-n\mathrm{P}_0$ の形の因子の全体と同一視する．従つて Abel 写像を写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}^n X &\longrightarrow J \\ (\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_n) &\longmapsto a(\mathrm{P}_1+\cdots+\mathrm{P}_n-n\mathrm{P}_0,\omega) \end{aligned} \tag{1.76}$$

のことであると思ふこともある．このとき, これの像を

$$W^{[n]} = a(\mathrm{Sym}^n X,\omega) = \{a(\mathrm{P}_1+\cdots+\mathrm{P}_n-n\mathrm{P}_0,\omega)\,|\,\mathrm{P}_j \in X\} \tag{1.77}$$

と記すことが多い．

定理 1.78 (Abel's theorem)　ω を第 1 種微分形式の基底からなる vector とし, Λ を ω の周期格子とする．P_0 を X の基点とする．因子 D について, D が主因子, つまりある函数の因子になっているためには

$$\deg D = 0 \quad 且つ \quad a(D,\omega) \in \Lambda \tag{1.79}$$

となることが必要十分条件である．それゆゑ

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic}^\circ X &\longrightarrow\ J \\ D &\longmapsto a(D,\omega)\ \bmod \Lambda \end{aligned} \tag{1.80}$$

は群の同型である．

証明　[TD], p.89 □

定理 1.81　特殊因子の全体の Abel 写像による像は $W^{[g-2]}$ に一致する．

証明　[Ku], p.159 □

補題 1.82　D_0 を g 次の任意の因子とせよ．D を 0 次の任意の因子とせよ．このときある g 次の正因子 D_1 が存在して, 適当な積分路により

$$a(D_1-D_0,\omega) = a(D,\omega) \tag{1.83}$$

となる．

証明 [TD], pp.89-90. □

Abel 写像が全射であることをつぎの強い形で述べられる. 本稿では, この定理を使ふといふよりは, 具体的な函数を構成することで, この定理を計算可能なものに具体化することを主眼としてゐる. それにより, 所謂 Jacobi の Umkehrproblem を具体的に解くのである.

定理 1.84 (Jacobi's theorem) D_0 を g 次の任意の因子とせよ. u を $\mathbb{C}^g$ の任意の元とせよ. このとき g 次の正因子 D が存在して, 適当な積分路により

$$a(D-D_0,\omega)=u \tag{1.85}$$

となる. しかも $u \notin W^{[g-2]}$ であれば, D は一意的に定まる. それゆゑ, $n=g$ の場合の (1.76)

$$\operatorname{Sym}^g X \to J \tag{1.86}$$

は双有理写像である.

証明 [TD], p.90 □

2 Theta 函数

2.1 Theta 函数の定義

ここでは, 第 1 節の記号を使ふ. さらに $\hat{\Theta}$ や $\hat{\Theta}+\hat{\Lambda}$ も ω を $\hat{\omega}$ に変えるなどして定義しておく. Riemann の **theta 函数**を

$$\vartheta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^{2g}}\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left\{\frac{1}{2}\,{}^t\!nTn+{}^t\!nz\right\}\right]. \tag{2.1}$$

で定義する. ここに T は 1.39 で定義した $\hat{\omega}$ の周期のなす行列である.

補題 2.2 $a, b\in\mathbb{Z}^g$ のとき, theta 函数は**平行移動公式**

$$\vartheta(z+Ta+b)=\vartheta(z)\exp 2\pi\sqrt{-1}\left\{\tfrac{1}{2}\,{}^t\!aTa+{}^t\!a(z+b)\right\} \tag{2.3}$$

をもつ. 証明は容易である.

まづ, 函数 $\vartheta(z)$ の零点を調べる. その為に以下の 2 つを用意しなくてはならない.

定義 2.4

$$\left\{\sum_{j=1}^{g-1}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_j}\omega\in\mathbb{C}^g \mod \Lambda\,\middle|\,\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_{g-1}\right\}\subset J \tag{2.5}$$

なる集合, つまり $\mathrm{P}_1+\cdots+\mathrm{P}_{g-1}-(g-1)\cdot\mathrm{P}_0$ なる形の因子全体の Abel 写像による像を **theta 因子**とよび, Θ と記す. これは (1.77) の $W^{[g-1]}$ に他ならない. Θ は, J 上の重要な有理型函数の極となる点からなる因子に現れることがあとでわかる. また

(2.6)
$$\Theta+\Lambda:=\left\{\sum_{j=1}^{g-1}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_j}\omega\in\mathbb{C}^g\,\middle|\,\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_{g-1}\right\}\subset\mathbb{C}^g$$

と記すことにする.

定義 2.7 これまでの記号で $(T=[T_{ij}])$

(2.8)
$$K_j=-\frac{1}{2}T_{jj}-\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{I}_j}\hat{\omega}_j+\sum_{i=1}^{g}\int_{\alpha_i}\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}_j\Big)\hat{\omega}_i(\mathrm{P})$$

とおいて, これを **Riemann の定数** とよぶ. ただし積分は $X_\circ$ の上でのものである. ここに I_j は $X_\circ$ の頂点であつて (1.1) の所で述べた点 I に対応する α_j と β_j の共通の始点である (図 1.27). もちろんこれは積分路の取り方によるが $\mod\hat{\Lambda}$ では一意的に定まる. また, 点 I や $\{\alpha_j\}$, $\{\beta_j\}$ をずらしても K_j の値は変はらない (要説明).

定理 2.9 (Riemann の定理) 点 $\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_g\in X$ をとり, 固定する. $\mathrm{P}\in X$ の函数

(2.10)
$$G(\mathrm{P})=\vartheta\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}+K\Big)$$

について
(1) $G(\mathrm{P})$ が恒等的に 0 でないためには, 因子 $\mathrm{P}_1+\cdots+\mathrm{P}_g$ が一般因子であることが必要十分である.
(2) $G(\mathrm{P})$ が恒等的に 0 でないとき, $G(\mathrm{P})$ は $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_g$ においてのみ 1 位の零点をもつ. (いくつかの P_j が一致すればもちろん重根となる.)

証明 [TD], p.98, 定理 1 と p.100, 定理 3 から出る. □

定理 2.11 函数 $\vartheta(z)$ $(z\in\Omega'^{-1}\mathbb{C}^g)$ について, $\vartheta(z)=0$ となるための必要十分条件は $z+K\in\hat{\Theta}+\hat{\Lambda}$ となることである.

証明 [TD], p.99, 定理 2 そのもの. □

2.2 第 3 種微分形式と Theta 函数の関係

ここでは第 3 種微分形式と theta 函数を結びつける重要な公式を証明しよう.

定理 2.12 基点 $\mathrm{P}_0\in X$ に対して, g 個の点 $\mathrm{A}_1,\cdots,\mathrm{A}_g$ が存在して, 任意に与へられた g 個の固定された点 $\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_g$ についての P の函数

(2.13)
$$\mathrm{P}\longmapsto\vartheta\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}\Big)$$

の零点がいつも丁度 $\mathrm{P}_1,\cdots,\mathrm{P}_g$ だけになる.

証明 [Ba1]. p.255 にある. □

定理 2.14 点 P_j, Q_j $(j=1,\cdots,g)$ を

$$\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}\not\in\hat{\Theta}+\hat{\Lambda},\quad \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{Q}_j}\hat{\omega}\not\in\hat{\Theta}+\hat{\Lambda} \tag{2.15}$$

なる X の点とするとき, $\mathrm{P},\mathrm{Q}\in X$ に対して次が成り立つ.

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{g}\int_{Q}^{\mathrm{P}}\tau_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j}\right)=\frac{\vartheta\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}\Big)\vartheta\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{Q}}\hat{\omega}-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j}\hat{\omega}\Big)}{\vartheta\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j}\hat{\omega}\Big)\vartheta\Big(\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{Q}}\hat{\omega}-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}\Big)}. \tag{2.16}$$

ここで, A_j は 2.12 のそれである. 積分路は, $\int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}}$ の積分路が $\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{P}}$ のそれと $\int_{\mathrm{P}_0}^{\mathrm{Q}}$ のそれの差に homotope になる様に取るものとする. (ただし, 多変数函数に関する適当な解析接続の可能性定理を使えば, P_j や Q_j に関する条件は無用である.)

証明 両辺を P の函数として見て, それぞれの因子を調べる. 右辺の因子は 2.9 より $\sum_{j=1}^{g}\mathrm{P}_j-\sum_{j=1}^{g}\mathrm{Q}_j$ であり, 左辺も $\tau_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j}$ の定義, つまり 1.43 よりこれと同じ因子を持つ. しかも, 道 α_j を点 P を通るようにとっておくとき, $\tau_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j}$ の定義と theta 函数の平行移動公式により, その α_j に沿って P を一周させてみても両辺は変わらない. また, 道 β_j を点 P を通るようにとっておき, β_i に沿って P を一周させてみると, 左辺には 1.49 の第 2 式により,

$$\exp\left[2\pi\sqrt{-1}\left(\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{Q}_j}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}_i\right)\right] \tag{2.17}$$

が倍され, 一方, 右辺は (2.3) により,

$$\begin{aligned}\exp\Bigg[2\pi\sqrt{-1}\Bigg[&\left\{\left(\int_{\infty}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}_i-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j}\hat{\omega}_i\right)+\frac{1}{2}\tau_{ii}\right\}\\ &-\left\{\left(\int_{\infty}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}_i-\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j}\hat{\omega}_i\right)+\frac{1}{2}\tau_{ii}\right\}\Bigg]\Bigg]\end{aligned} \tag{2.18}$$

だけ倍される. したがってもともと $X_\circ$ 上の函数と考えていた両辺の商は実際は X 上の函数とみなせる. しかるにはじめに述べたことから, 極を持たないのであるから定数でなければならない. ところが $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ としてみると両辺ともに 1 となるので実際に両辺が等しいことがわかる. □

3 超楕円的 Theta 関数・$\wp$ 関数

3.1 超楕円的 Riemann 面とその Abel 微分

無限遠点が 1 点のみの代数曲線 (d,s)-curve

いま $d<s$ を互ひに素な 2 つの自然数とし,

$$f(x,y)=y^d+p_1(x)y^{d-1}+\cdots+p_{d-1}(x)y-p_d(x) \tag{3.1}$$

とおく. 但し $p_j(x)$ は x の $\lfloor\frac{js}{d}\rfloor$ 次の多項式で, その係数を

$$\begin{aligned} p_j(x)&=\sum_k\mu_{ds-dk}x^k,\quad(1\leqq j\leqq d-1)\\ p_d(x)&=x^s+\mu_{ds-d}x^{s-1}+\mu_{ds-2d}x^{s-2}+\cdots+\mu_{ds}\end{aligned} \tag{3.2}$$

と書くことにする. ここで

$$f(x,y)=0 \tag{3.3}$$

で定義される曲線を考へる. これは無限遠点に唯 1 つの点をもつ代数曲線 C の affine 部分である. この様な曲線を (d,s) **曲線** と呼ぶ. この場合, 次の **weight** を導入することができる. 即ち

$$\mathrm{wt}(x)=-d,\quad\mathrm{wt}(y)=-s,\quad\mathrm{wt}(\mu_j)=-j. \tag{3.4}$$

さすれば, $f(x,y)$ のみならず, この曲線に関するあらゆる等式はこの weight について斉次になる.

この note のほとんどの内容は上のより一般な曲線についても定式化されてつつある. 一方例へば d と s が互ひに素でない様な曲線については, それが上の形の曲線と同型でないならば, それの扱ひは今後の課題である様に思はれる.

超楕円曲線

以下では $d=2$, $s=2g+1$ (奇数), $p_1(x)=0$ の場合のみ, 即ち,

$$y^2=x^{2g+1}+\mu_2x^{2g}+\cdots+\mu_{4g+2} \tag{3.5}$$

により得られる射影曲線[6](超楕円曲線) C についてのみ Abel 函数について述べる. ここで μ_j はすべて定数 ($\in\mathbb{C}$) であり, 右辺を $f(x)$ と書くとき $f(x)=0$ は重根を持たないものと仮定する. この場合, **weight** は

$$\mathrm{wt}(x)=-2,\quad\mathrm{wt}(y)=-(2g+1),\quad\mathrm{wt}(\mu_j)=-j \tag{3.6}$$

となつてゐる.

[6]実際にこれを射影空間内の代数曲線として実現することに関しては, [Mu2], p.3.12-3.16 に記されている.

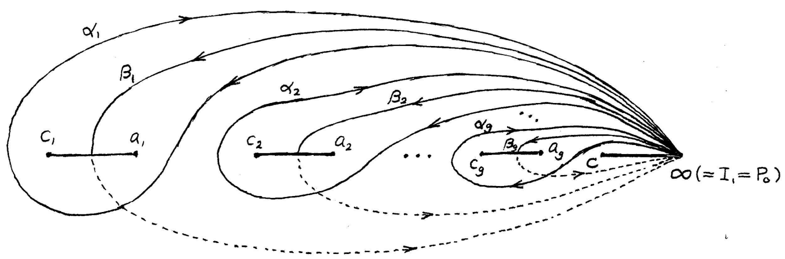

図 3.11

第 1 種微分形式, 周期行列

第 1 節と第 2 節の Riemann 面 X として上の超楕円曲線 C を取る. したがって, X の種数は g である. 次に, $f(x)=0$ の $2g+1$ 個の根に順序を適当に入れて

$$c_1,\, a_1,\, c_2,\, a_2,\, \cdots,\, c_g,\, a_g,\, c \tag{3.7}$$

とする. 従つてもちろん

$$f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_g)(x-c_1)\cdots(x-c_g)(x-c). \tag{3.8}$$

また, 記号 ∞ で X の無限遠点を記す. また $A_j(a_j,0)$ と書く. 1.13 にある様に X には g 個の $\mathbb{C}$ 上 1 次独立な第 1 種微分形式が存在するが, いまの場合は

$$\omega_j=\frac{x^{j-1}dx}{2y}\quad (j=1,\cdots,g) \tag{3.9}$$

をそれらに取ることができる.

さて, 前章と同様に X 上に $2g$ 個の路

$$\alpha_j,\ \beta_j\ (j{=}1,\,\cdots,\,g) \tag{3.10}$$

を の様に定めると, その交点数は

$$\alpha_i\cdot\alpha_j=\beta_i\cdot\beta_j=0,\quad \alpha_i\cdot\beta_j=\delta_{ij} \tag{3.12}$$

となつてをり, これらは, X の homology 群 $H_1(X,\mathbb{Z})$ の基底をなす. 以下では, 簡単のために,

$$\omega={}^t\begin{bmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_g\end{bmatrix} \tag{3.13}$$

とかく. 上の ω_j に対する α_j, β_j の周期のなす行列をやはり

$$\Omega'=\left[\int_{\alpha_j}\omega_i\right],\quad \Omega''=\left[\int_{\beta_j}\omega_i\right],\quad \Omega=\begin{bmatrix}\Omega'\\ \Omega''\end{bmatrix} \tag{3.14}$$

と書く. 系 1.34 により Ω' は正則であるが, いま

$$\begin{gathered}{}^t\begin{bmatrix}\hat{\omega}_1 & \cdots & \hat{\omega}_g\end{bmatrix}:=\Omega'^{-1}\,{}^t\begin{bmatrix}\omega_1 & \cdots & \omega_g\end{bmatrix}\\ T:=\Omega'^{-1}\Omega''\end{gathered} \tag{3.15}$$

とおけば,

$$\left[\int_{\alpha_j}\hat{\omega}_i\right]=1_g,\quad \left[\int_{\beta_j}\hat{\omega}_i\right]=T \tag{3.16}$$

となる. これも本書では

$$\hat{\omega}={}^t\left[\hat{\omega}_1 \quad \cdots \quad \hat{\omega}_g\right] \tag{3.17}$$

のように書く. 上記の微分形式 $\hat{\omega}_1, \cdots, \hat{\omega}_g$ を**正規化された**第 1 種微分形式と呼ぶのであつた.

3.1.1 標準的な第 1, 第 2 種・第 3 種微分形式とそれらの関係

以下, X 上の各点 P における局所径数 t を考へるが, 具体的には

$$t=\begin{cases} x-x(\mathrm{P}) & y(\mathrm{P})\neq 0,\ \infty \text{ のとき}, \\ y & y(\mathrm{P})=0 \text{ のとき} \\ \dfrac{y}{x^{g+1}} & y(\mathrm{P})=\infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.18}$$

とすればよい.

定義 3.19 定義 1.43 の記号をここでも用いる：即ち
(1) 2 点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 \in X$ に対し微分形式 $\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}$ で次の条件を満すものが唯 1 つ存在する: $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ 以外のすべての点において正則で, $\mathrm{ord}_{\mathrm{Q}_1}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}=\mathrm{ord}_{\mathrm{Q}_2}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}=-1$ かつ $\mathrm{Res}_{\mathrm{Q}_1}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}=1$, $\mathrm{Res}_{\mathrm{Q}_2}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}=-1$ であり, すべての j について

$$\int_{\alpha_j}\tau_{\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2}=0 \tag{3.20}$$

となる.
(2) 局所径数 t を与えられた点 $\mathrm{P}\in X$ に対して $\eta_{\mathrm{P},t}$ を P 以外のすべての点において正則で, $\mathrm{ord}_{\mathrm{P}}\eta_{\mathrm{P},t}=-2$ で P における Laurent 展開が

$$\eta_{\mathrm{P},t}=\left(-\frac{1}{t^2}+\cdots\right)dt \tag{3.21}$$

の形であり,

$$\int_{\alpha_j}\eta_{\mathrm{P},t}=0 \tag{3.22}$$

となるような微分形式とする.

次に $H_1(C,\mathbb{Z})$ の生成元

$$\alpha_i, \beta_j \quad (1 \leqq i, j \leqq g) \tag{3.23}$$

を (1.16) の様に, それらの交点数が $\alpha_i \cdot \alpha_j = \beta_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$, $\alpha_i \cdot \beta_j = 0$ となるやうに選ぶ. 次に, 先の (3.9) の ω_j から定まる周期

$$[\,\Omega' \;\; \Omega''] = \left[\int_{\alpha_i} \omega_j \quad \int_{\beta_i} \omega_j\right]_{i,j=1,2,\cdots,g} \tag{3.24}$$

を考へる. さらに文字 Z, W を使つて C 上の 2 点 $\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{Q}(z,w)$ について

$$[(x,y),\,(z,w)] = \frac{1}{(x-z)\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)} \sum_{k=1}^{g} y^{g-k} \left[\frac{f(Z,W)}{W^{g+1-k}}\right]_W^+ \Bigg|_{(Z,W)=(z,w)} \tag{3.25}$$

とおく. これは weight が $-d = -2$ で斉次である. ただし, $[\ \ ]_W^+$ は W について負冪の項を取り除くことを意味する.

補題 3.26 (fundamental 2-forms of second kind) $C \times C$ の上の 2-form

$$\big((x,y),(z,w)\big) \longmapsto R\big((x,y),(z,w)\big) dz dx \tag{3.27}$$

であつて

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(z,w)} R\big((x,y),(z,w)\big)(x-z)^2 = 1 \tag{3.28}$$

が成り立ち, $(x,y) = (z,w)$ なる点でのみ極を持ち, その他の点では正則である様なものを考へる. 第 1 種微分形式 (3.9) と (3.14) の微分形式, および C 上の 2 点 (x,y), (z,w) に対して, 無限遠点 ∞ のみに極を持つ第 2 種微分形式 $\eta_j = \eta_j(x,y)$ $(j = 1,\, 2,\, \cdots,\, 3)$ が存在して, 上の様な 2-form は

$$R\big((x,y),(z,w)\big) := \frac{d}{dx}[(z,w),(x,y)] + \sum_{j=1}^{g} \frac{\omega_j(z,w)}{dz} \frac{\eta_j(x,y)}{dx} \tag{3.29}$$

と書かれる. ただし, 先頭の微分は動点 $(x,y) \in C$ に関する微分である[7]. ここでさらに $R\big((x,y),(z,w)\big)$ が Sato weight に関して斉重 (重さ 6), かつ 2 点の座標に関して対称, つまり

$$R\big((z,w),(x,y)\big) = R\big((x,y),(z,w)\big) \tag{3.30}$$

が成り立つことを要請する. その様な $\{\eta_j\}$ の組は, 以下に説明する様に $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ の作用と $\{\omega_j\}$ の張る空間とを modulo として唯 1 組だけに定まる. これらを満足する 2-form $R\big((x,y),(z,w)\big) dx dz$ を (Klein の) **fundamental 2-form of second kind** と呼ぶ.

証明．所望の fundamental 2-form of second kind を与へる様な微分形式 η_j ($j = 1, 2, \cdots, g$) の存在は η_j を未定係数法で求められることからわかる．また $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ の作用と $\{\omega_j\}$ の張る空間とを modulo しての一意性については [BG], pp.3617–3618 と同様なので省略する ([Ba1], p.194 の周辺も参照されたい). □

上の様な η_j が

$$\eta_j(x,y) = \frac{h_j(x,y)}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)}, \qquad (3.31)$$

$$\text{但し}\quad h_j(x,y) \in \mathbb{Q}[\mu_1, \cdots, \mu_{ds}][x,y] \quad \text{で斉重},$$

の形に書かれることは容易にわかる．ここで

$$h_j(x,y) \text{ の項数が最も少くなること} \qquad (3.32)$$

を要請すれば, η_j は一意的に定まる ([BG], p.3618) から, 以後はその様なものを η_j と記すことにする.

3.2

3.2.1 In the Case of Hyperelliptic Curves

C が 超楕円曲線のとき $h_j(x,y)$ を具体的に書き下すこと以下の様になる:

$$[(x,y),(z,w)] = \frac{y+w}{x-z}\frac{1}{2y} \qquad (3.33)$$

および

$$R\big((x,y),(z,w)\big) = \frac{F(x,z)+2yw}{(x-z)^2}\frac{1}{2y}\frac{1}{2w} \qquad (3.34)$$

ここで

$$F(x,z) = \sum_{j=0}^{g-1} x^j z^j (\mu_{2j+1}(x+z) + 2\mu_{2j}) \qquad (3.35)$$

である.

定義 3.36 Riemann 面 X 上の動点 $\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{Q}(z,w)$ と定点 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(c,d)$ について
(1) 以下では (3.29) の $R(\quad,\quad)$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathsf{R}^{\mathrm{P,A}}_{\mathrm{Q,B}} &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}} R\big((x,y),(z,w)\big)dxdz \\ &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}} \frac{F(x,z)+2yw}{(x-z)^2}\frac{dx}{2y}\frac{dz}{2w}\end{aligned} \qquad (3.37)$$

[7] x と y に依存関係があるので ∂ を使はないで表した.

とおく.

(2) (3.25) の $[\mathrm{P},\mathrm{A}] = \dfrac{y+b}{x-a}\dfrac{1}{2y}$ について

$$\mathsf{P}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}} := \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} ([\mathrm{P},\mathrm{Q}] - [\mathrm{P},\mathrm{B}])\, dx \tag{3.38}$$

とおく. $\mathsf{R}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}}$ も $\mathsf{P}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}}$ も P の関数としては, $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$, B でそれぞれ留数 1, -1 なる 1 位の極をもち, その他の点では正則な微分形式の積分になっている.

定義 3.39 以下では (3.29) を満たす η_j として

$$\eta_j = \frac{1}{2y}\sum_{k=j}^{2g-j}(k+1-j)\mu_{k+1+j}x^k dx \quad (j = 1, \cdots, g) \tag{3.40}$$

が取れる. これらは点 ∞ においてのみ留数 0 の極を持ち, 他の点では正則な第 2 種微分形式である.

定理 3.41 定義 3.37, 3.38 の記号のもとで

$$\mathsf{R}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_1 \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}} \eta_1 + \cdots + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_g \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}} \eta_g + \mathsf{P}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}} \tag{3.42}$$

が成り立つ.

証明 両辺に $\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial x}$ を施したものを比較すると (いくらかの計算の後) 両者が等しいことがわかる. しかるに $\mathrm{P} = \mathrm{A}$ または $\mathrm{Q} = \mathrm{B}$ のとき元の両辺はともに 0 であるから, 実際に両辺は等しい. □

命題 3.43 ある定数成分の行列 $\Gamma = [c_{ij}]$ が存在して, 任意の P, Q, A, $\mathrm{B} \in X_\circ$ に対して

$$\mathsf{R}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \tau_{\mathrm{Q,B}} - 2\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} c_{ij} \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_i \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}} \omega_j \tag{3.44}$$

が成り立つ.

証明 $\mathsf{R}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}} - \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \tau_{\mathrm{Q,B}}$ は P の関数として正則であるから第 1 種微分形式の 1 次結合と定数の和で書き表せる. これは Q の関数と見ても同様である. また両辺ともに $\mathrm{P} = \mathrm{A}$ のとき 0 となり, $\mathrm{Q} = \mathrm{B}$ のときも 1.49 の第 2 式を使えば両辺が 0 となることがわかり, 与式が成り立たねばならない. □

以上の状況で,

$$R\big((x,y),(z,w)\big)\, dxdz = \frac{\mathscr{F}\big((x,y),(z,w)\big)}{(x-z)^2 \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \frac{\partial}{\partial w} f(z,w)} dxdz \tag{3.45}$$

と書いたとき, $F\big((x,y),(z,w)\big)$ が x, y, z, w の Sato weight について斉重 (重さ $4g+2$) な多項式であることも容易にわかる. 上で得られた第 2 種微分形式 η_j の周期のなす行列を

$$[\, H' \;\; H''] = \left[\int_{\alpha_i} \eta_j \quad \int_{\beta_i} \eta_j \right]_{i,j=1,2,\cdots,g} \tag{3.46}$$

と記す．これと (3.13) の行列を結合して

$$M=\begin{bmatrix}\Omega' & \omega''\\ H' & H''\end{bmatrix} \tag{3.47}$$

と書く．

既に 1.37 において $\Omega(=[\Omega',\Omega''])$ について Riemann の関係式, 不等式を述べたが, ここでそれ少し別の形で再確認しておきたい．上の M (3.26) の $R(\ ,\ )$ と ω_j と η_j と $[\ ,\ ]$ の関係から Ω', Ω'', H', H'' に間に symplectic な関係があることは予測される．いづれにしても, 実際には次が成り立つ．

補題 3.48 一般 Legendre 関係式 (Weierstrass relations)

$$M\begin{bmatrix} & -1_g\\ 1_g & \end{bmatrix}{}^tM=2\pi\sqrt{-1}\begin{bmatrix} & -1_g\\ 1_g & \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

を満たす．特に 3.43 の記号で

$$\Gamma=-\frac{1}{2}H'\Omega'^{-1}, \tag{3.50}$$

かつ Γ は対称行列であり, $\Omega'^{-1}\Omega''$ は対称行列である．さらに, 良く知られてゐる様に

$$\mathrm{Im}\,(\Omega'^{-1}\Omega'')\quad \text{は正定値行列} \tag{3.51}$$

となつてゐる (1.37 (2), または [FK], Chap.III など).

証明 等式 (3.42) と (3.44) より $\mathrm{P}(x,y)$ について,

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\{[\mathrm{P},\mathrm{Q}]-[\mathrm{P},\mathrm{B}]\}dx+\sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\omega_j\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\eta_j&\\ =\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\tau_{\mathrm{Q,B}}-2\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}c_{ij}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\omega_i\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\omega_j&\end{aligned} \tag{3.52}$$

である．これを P における局所径数 t で微分すると, 1.47 から

$$\begin{aligned}\{[\mathrm{P},\mathrm{Q}]-[\mathrm{P},\mathrm{B}]\}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}+\sum_{j=1}^{g}\frac{x^{j-1}}{2y}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\eta_j&\\ =\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\eta_{\mathrm{P},t}-2\sum_{j=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}c_{ij}\frac{x^{j-1}}{2y}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\omega_j.&\end{aligned} \tag{3.53}$$

次に各 $1\leq k\leq g$ ごとに α_k の上に一点 B をとり, Q を B から α_k に沿って一周させると

$$\begin{aligned}0+H'\,{}^t\left[\frac{1}{2y}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\ \cdots\ \frac{x^{g-1}}{2y}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\right]&\\ =0-2[c_{ij}]\Omega'\left[\frac{1}{2y}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\ \cdots\ \frac{x^{g-1}}{2y}\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0}\right]&\end{aligned} \tag{3.54}$$

を得る. P は任意であるから, これは

$$H'\,{}^{t}\left[\frac{1}{2y}dx \quad \cdots \quad \frac{x^{g-1}}{2y}dx\right] = -2[c_{ij}]\Omega'\,{}^{t}\left[\frac{1}{2y}dx \quad \cdots \quad \frac{x^{g-1}}{2y}dx\right] \tag{3.55}$$

を意味する. $\dfrac{1}{2y}dx, \cdots, \dfrac{x^{g-1}}{2y}dx$ は 1 次独立なので

$$H' = -2\Gamma\Omega' \tag{3.56}$$

でなければならず, 与式を得る. Γ の対称性は 1.49 と 3.43 の c_{ij} の定義からわかる. 次に

$$\mathsf{R}_{\mathrm{P,A}}^{\mathrm{Q,B}} = \mathsf{R}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}}$$

に注意すれば, (3.41) と (3.43) と 1.49 の第 1 式から

$$\mathsf{P}_{\mathrm{Q,B}}^{\mathrm{P,A}} + \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\omega_j\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\eta_j = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\tau_{\mathrm{A,P}} - 2\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}c_{ij}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\omega_j\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{Q}}\omega_j \tag{3.57}$$

が得られる. ここで, B から Q への積分路を β_k へと変形すれば

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} 0\,dx + \sum_{j=1}^{g}\int\omega_j\cdot H''_{jk} = \int_{\beta_k}\tau_{\mathrm{P,A}} - 2\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}c_{ij}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\omega_j\cdot\Omega''_{kj}, \tag{3.58}$$

従つて 1.49 の第 2 式より

$$+\sum_{j=1}^{g}\int\omega_j\cdot H''_{jk} = 2\pi\sqrt{-1}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\hat{\omega}_j - 2\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}c_{ij}\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}}\omega_j\cdot\Omega''_{kj}, \tag{3.59}$$

を得る. ここでさらに A から P へ至る積分路を α_i に近づけることで

$$\Omega' H'' = 2\pi\sqrt{-1}\,1_g - 2\Gamma\Omega'\Omega'' \tag{3.60}$$

となる. これに上の (3.56) を代入すれば

$$\Omega' H'' = 2\pi\sqrt{-1}\,1_g - 2(-\tfrac{1}{2}H')\Omega'^{-1}\Omega'\Omega'' \tag{3.61}$$

つまり

$$\Omega' H'' - \Omega'' H' = 2\pi\sqrt{-1}\,1_g \tag{3.62}$$

がわかる. □

4 Sigma 函数 (General case)

4.1 σ function for an (n,s)-curve

この節では, 一般の (d,s) 曲線 $C: f(x,y)=0$ について, σ 函数の定義を述べる. 曲線 C に付随する **sigma 函数**とは種数（$g=(d-1)(s-2)/2$）個の変数 $u_1, \cdots, u_g$ の整型函数であり, ここからほとんど全ての理論が構築される. いま

$$\delta = \begin{bmatrix}\delta' \\ \delta''\end{bmatrix} \in \left(\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^{2g} \tag{4.1}$$

を, C の基点を ∞ としたときの $[\Omega' \ \Omega'']$ に関して Riemann 定数を与へる theta characteristic ([Mu1], pp.163–166, または [BEL1], p.15, (1.19)) とする. 微分形式 (3.9) を見れば C の標準因子類 (canonical divisor class) は $2(g-1)\infty$ になつてゐることがわかるので, 任意の theta characteristic は $\left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^{2g}$ に属する ([Mu1], p.166, Coroll. 3.11).

定義 4.2 曲線 C の discriminant D を以下の様に定める:

$$\begin{aligned} R_1 &= \mathrm{rslt}_x\big(\mathrm{rslt}_y\big(f(x,y), f_x(x,y)\big), \mathrm{rslt}_y\big(f(x,y), f_y(x,y)\big)\big), \\ R_2 &= \mathrm{rslt}_y\big(\mathrm{rslt}_x\big(f(x,y), f_x(x,y)\big), \mathrm{rslt}_x\big(f(x,y), f_y(x,y)\big)\big), \\ R_3 &= \gcd(R_1, R_2) \end{aligned} \tag{4.3}$$

とすると R_3 は

$$\mathbb{Z}[\lambda_{s-\lfloor s/d\rfloor d}, \cdots, \lambda_{ds}] \tag{4.4}$$

の中で平方元になる. そこで C discriminant を

$$D = \sqrt{R_3} \tag{4.5}$$

と定義する

定義 4.6 $a, b \in \mathbb{R}^g$ (縦ベクトル) と周期のなす行列 T に対して **指標付き theta 函数** を

$$\begin{aligned} \vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z) &= \vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z;T) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\left[2\pi i\left\{\tfrac{1}{2}\ {}^t(n+a)T(n+a) + {}^t(n+a)(z+b)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

で定義する.

以上の準備の下で,

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \sigma(u;M) = \sigma(u_1, u_2, \cdots, u_g; M) \\ &= c\ \exp(-\tfrac{1}{2}uH'\Omega'^{-1}\ {}^tu)\vartheta[\delta]\,(\Omega'^{-1}\ {}^tu;\ \Omega'^{-1}\Omega'') \\ &= c\ \exp(-\tfrac{1}{2}uH'\Omega'^{-1}\ {}^tu) \\ &\qquad \times \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp\big[2\pi\sqrt{-1}\big\{\tfrac{1}{2}\ {}^t(n+\delta')\Omega'^{-1}\Omega''(n+\delta') \\ &\qquad\qquad + {}^t(n+\delta')(\Omega'^{-1}u+\delta'')\big\}\big] \end{aligned} \tag{4.8}$$

と定義する[8].

これは (3.51) により収束する．ここに

$$c = \frac{1}{\sqrt[8]{D}}\left(\frac{\pi^g}{|\Omega'|}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.9}$$

である．但し D は (4.2) で定義した判別式, π は円周率, $|\Omega'|$ は (3.14) の周期行列の行列式である．また 8 乗根の取り方は後の 6.19 で定める．この定数 c は一般化された Thomae の公式を利用して [Mu2], p.3.120, §8 の方法で決定されるのであるが, 以下ではあまり重要ではないので, ここでは省略する．

以下では, 与へられた $u \in \mathbb{C}^g$ に対して u' および u'' で

$$u = u'\Omega' + u''\Omega'' \tag{4.10}$$

となる $\mathbb{R}^g$ の元を示す．このとき $u, v \in \mathbb{C}^g$ と $\ell \ (= \ell'\Omega' + \ell''\Omega'') \in \Lambda$ について

$$\begin{aligned} L(u,v) &:= {}^t u(H'v' + H''v''), \\ \chi(\ell) &:= \exp\left\{2\pi\sqrt{-1}\left({}^t\ell'\delta'' - {}^t\ell''\delta' + \tfrac{1}{2}{}^t\ell'\ell''\right)\right\} \ (\in \{1,-1\}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

とおく．以上の準備の下で $\sigma(u;M)$ の一般的な重要性質は次の様に述べられる；

補題 4.12 あらゆる $u \in \mathbb{C}^g$ と $\ell \in \Lambda$, および $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ について
(1) $\sigma(u+\ell;M) = \chi(\ell)\sigma(u;M)\exp L(u+\frac{1}{2}\ell,\ell)$,
(2) $\sigma(u;\gamma M) = \sigma(u;M)$, ($\gamma$ は定数 c に含まれる Ω' にも作用),
(3) $u \longmapsto \sigma(u;M)$ は $\kappa^{-1}(\Theta)$ に 1 位の零を持つ,
(4) また $\sigma(u;M) = 0 \iff u \in \kappa^{-1}(\Theta)$ が成り立つ.

証明 主張 (1) は [Ba1], p.286, ℓ.22 の特殊な場合に他ならない．主張 (2) は γ による M の変換が (3.10) の積分路 α_j, β_j の取り換へに対応してゐることから（？）示される．詳しくは [BEL1], pp.10–15 を参照されたい．主張 (3) と (4) は [Ba1], p.252 に解説されてゐる．また一部の主張は [BEL1] の p.12, Theorem 1.1 と p.15 にも解説されてゐる． □

注意 4.13 いま (3.49) と (3.51) を満たす行列 M が与へられたとき, $L(\ ,\ )$ の定める Riemann 形式 $E(u,v) = L(u,v) - L(v,u)$ の Pfaffian が 1 であることがわかるので (たとへば) [L], p.93, Th.4.1 により, 4.12(1) を満たすものは $\mathbb{C}$ 上 1 次元しかなく, それゆゑ, その自明でない解は (2), (3), (4) を自動的に満たす．つまり 4.12 は sigma 函数を定数倍を除いて, 特徴付けるものなのである．$g=1$ のときの $\sigma(u)$ については Weierstraß によるの無限積表示

$$\sigma(u) = \prod_{\substack{\ell\in\Lambda \\ \ell\neq 0}} \left(1 - \frac{u}{\ell}\right)\exp\left(\frac{u}{\ell} + \frac{u^2}{2\ell^2}\right) \tag{4.14}$$

[8]函数 $\sigma(u)$ の定義 (4.8) において 3.26 の fundamental 2-forms of second kind を (3.30) で指定したものから別のものに取り換へ, それに応じて (3.46) の周期行列を再定義したならば, 対応する $\sigma(u)$ は指数函数の部分のみが変ることに注意されたい．ただし, その際に H' と H'' が変化するので, 2 次形式 $L(\ ,\ )$ も変更を受けることに注意.

があり, この $\sigma(u)$ は H' と H'' に依存しない形に書けてゐる. 一方, $g>1$ の場合は, H', H'' を元の H', H'' に Ω' や Ω'' の張る空間の元（weight homogeneousness を考慮した）を加へたものと置き代へると trivial theta が倍されるだけである.

次の事実の一般的な証明は正に中屋敷氏の報告 [N] の主結果であるので証明は省略する. $(3,4)$-curve の別証明が [EEMOP] にあるが, それは, このノートの最後 8.34 で述べる $\sigma(u)$ の満たす微分方程式に相当する物を先に導出する方法によつてゐるのでやや複雑である.

命題 4.15 函数 $\sigma(u)$ を $u_1,\cdots,u_g$ の冪級数に展開するとき,

$$\sigma(u)\in\mathbb{Q}[\mu_{ds-\lfloor s/d\rfloor d},\cdots,\mu_{ds}][[u_1,u_2,\cdots,u_g]] \tag{4.16}$$

であつて, その weight は $(s^2-1)(d^2-1)/24$ 次で斉重である

補題 4.17 $\sigma(u)$ は奇函数または偶函数である. つまり

$$\sigma([-1]u)=-(-1)^{(d^2-1)(s^2-1)/24}\sigma(u) \tag{4.18}$$

が成り立つ.

証明 周期格子について $[-1]\Lambda=\Lambda$ が成り立つ. これは各周期 $\ell\in\Lambda$ を与へる積分の積分路を逆にした積分を考へればよい. このことと 4.13 とを合はせれば, 定数 K が存在して

$$\sigma([-1]u)=K\sigma(u) \tag{4.19}$$

となることがわかる. あとは後述の 6.19 を考慮することで $K=-1$ であることがわかる. □

以後では,

$$\sigma_j(u)=\frac{\partial}{\partial u_j}\sigma(u),\quad \sigma_{ij}(u)=\frac{\partial^2}{\partial u_i\partial u_j}\sigma(u) \tag{4.20}$$

などと略記する.

5 超楕円曲線に付随する σ 函数と $\wp$ 函数

5.1 超楕円函数についての Riemann 定数と判別式

ここでは 2.14 の式を後に述べる後述の 5.24 に変形する.

Riemann 定数

超楕円的 Riemann 面の場合は Riemann の定数はつぎのようになる.

定理 5.1 X を前節 3 で定義された超楕円的 Riemann 面とせよ．このとき Riemann の定数 K (2.8) は

$$K = \sum_{j=1}^{g} \int_{\infty}^{\mathrm{A}_j} \hat{\omega} \tag{5.2}$$

で与えられる．

証明 以下

$$\hat{w}_j(\mathrm{P}) = \int_{\infty}^{\mathrm{P}} \omega_j \tag{5.3}$$

と書く．(2.7) から

$$\begin{aligned} K_i &= -\frac{1}{2}T_{ii} - \hat{w}_i(\alpha_j \text{ の始点}) + \sum_{j=1}^{g} \int_{\alpha_j} \hat{w}_i(\mathrm{P})\hat{\omega}_j(\mathrm{P}) \\ &\equiv -\frac{1}{2}\tau_{ii} - \frac{1}{2}\int_{\alpha_i} \hat{\omega}_i + \sum_{j=1}^{g} \int_{\alpha_j} \hat{w}_i(\mathrm{P})\hat{\omega}_j(\mathrm{P}) \mod \hat{\Lambda}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

まず $j = i$ については

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_j} \hat{w}_j(\mathrm{P}) d\hat{w}_j =& \frac{1}{2}\int_{\alpha_j} d(\hat{w}_j(\mathrm{P}))^2 \\ =& \frac{1}{2}\{\hat{w}_j(\alpha_j \text{ の始点})^2 - \hat{w}_j(\alpha_j \text{ の終点})^2\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで X 上では α_j の終点は α_j の始点であり，$\int_{\alpha_j} \hat{\omega}_j = 1$ であるから，

$$\begin{aligned} =& \frac{1}{2}\{\hat{w}_j(\alpha_j \text{ の始点})^2 - (\hat{w}_j(\alpha_j \text{ の始点}) - 1)^2\} \\ =& \hat{w}_j(\alpha_j \text{ の始点}) - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

$j \neq i$ のときは，

$$\int_{\alpha_j} \hat{w}_i(\mathrm{P})\hat{\omega}_j(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{C}_j}^{\mathrm{A}_j} \left(\hat{w}_i(\mathrm{P}) + \hat{w}_i(\overline{\mathrm{P}})\right) \hat{\omega}_j(\mathrm{P}). \tag{5.7}$$

ここで $d(\hat{w}_i(\mathrm{P}) + \hat{w}_i(\overline{\mathrm{P}})) = \hat{\omega}_i(\mathrm{P}) + \hat{\omega}_i(\overline{\mathrm{P}}) = 0$ なので $\hat{w}(\mathrm{P}) + \hat{w}(\overline{\mathrm{P}})$ は定数 $(= 2\hat{w}_i(\mathrm{A}_j))$ である．また $\int_{\mathrm{C}_j}^{\mathrm{A}_j} \hat{\omega}_j = \frac{1}{2}\int_{\alpha_j} \hat{\omega}_j = \frac{1}{2}$ なので

$$= \hat{w}_i(\mathrm{A}_j) = \int_{\infty}^{\mathrm{A}_j} \hat{\omega}_i \tag{5.8}$$

となって目的の結果が得られた． □

補題 5.9 2.12 に言ふ A_j は (3.5) の超楕円曲線 X については $\mathrm{A}_j(a_j, 0)$ である．

補題 5.10 いま

$$\delta'' = {}^t\left[\tfrac{1}{2} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{2}\right], \quad \delta' = {}^t\left[\tfrac{g}{2} \quad \tfrac{g-1}{2} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{2}\right] \tag{5.11}$$

とするとき, $\mathrm{A}_j(a_j,0)$ に対して

$$\sum_{j=1}^{g}\int_{\infty}^{\mathrm{A}_j}\hat{\omega} = \delta' + T\delta'' \quad \left(\text{あるいは} \quad \sum_{j=1}^{g}\int_{\infty}^{\mathrm{A}_j}\omega = \Omega'\delta' + \Omega''\delta''\right) \tag{5.12}$$

が成り立つ.

証明 $\mathrm{C}(c,0)$ とする. 下の図を参考にして まづ

$$\int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}_g}\hat{\omega} = -\frac{1}{2}\int_{\beta_g}\hat{\omega} = T\ {}^t\left[0 \quad 0 \quad \cdots \quad \frac{1}{2}\right]. \tag{5.13}$$

$j \neq g$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}}^{\mathrm{A}_j}\hat{\omega} &= -\frac{1}{2}\int_{\beta_j}\hat{\omega} - \frac{1}{2}\sum_{i=j+1}^{g}\int_{\alpha_i}\hat{\omega} \\ &= {}^t\begin{array}{ccccccccc}\Big[& 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} & \Big] \\ & & & & & j & & & \end{array} + T\ {}^t\begin{array}{ccccccc}\Big[& 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \Big] \\ & & & j & & & \end{array}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

また

$$\int_{\infty}^{\mathrm{C}}\hat{\omega} = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{g}\int_{\alpha_j}\hat{\omega} = {}^t\left[\tfrac{1}{2} \quad \cdots \quad \tfrac{1}{2}\right]. \tag{5.15}$$

以上より

$$\int_{\infty}^{\mathrm{A}_j}\hat{\omega} = {}^t\begin{array}{ccccccccc}\Big[& \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \Big] \\ & & & j & & & & \end{array} + T\ {}^t\begin{array}{cccccc}\Big[& 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \cdots 0 & \Big] \\ & & & j & & \end{array}. \tag{5.16}$$

したがって与式が得られる. □

判別式

超楕円曲線の場合の discriminant は以下の様になる.

補題 5.17 超楕円曲線 $y^2 = f(x)$ について, 4.2 で定義した discriminant R_3 は $f(x) = 0$ の g 個の根の差積の平方に一致する.

5.2 Sigma function for a hyperelliptic curve

定義 5.18 我々の超楕円的 Riemann 面 X に対し, σ **函数** を

$$\sigma(u) = \sigma(u; X) = \ c\exp(-\tfrac{1}{2}\ {}^t\!uH'\Omega'^{-1}u)\vartheta\begin{bmatrix}\delta'' \\ \delta'\end{bmatrix}(\Omega'^{-1}u;\ T) \tag{5.19}$$

で定義する. 定数 c は 4.9 で定義したものである.

命題 5.20 $\sigma(u)$ は $\lfloor (g+1)/2 \rfloor$ の偶奇に応じて偶函数か奇函数である.

定理 2.9 を σ 函数に訳せば $\sigma(u)$ の零点集合は丁度 $\Theta + \Lambda$ になっていることがわかる.

定理 5.21 P_j, $\mathrm{Q}_j \in X$, $(j = 1, \cdots, g)$, に対して

$$u = \sum_{j=1}^{g} \int_{\infty}^{\mathrm{P}_j} \omega, \quad u' = \sum_{j=1}^{g} \int_{\infty}^{\mathrm{Q}_j} \omega \tag{5.22}$$

とおくとき

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{g} \mathsf{R}_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j}^{\mathrm{P},\mathrm{Q}}\right) = \frac{\sigma\Big(\displaystyle\int_{\infty}^{\mathrm{P}} \omega - u\Big)\sigma\Big(\displaystyle\int_{\infty}^{\mathrm{Q}} \omega - u'\Big)}{\sigma\Big(\displaystyle\int_{\infty}^{\mathrm{P}} \omega - u'\Big)\sigma\Big(\displaystyle\int_{\infty}^{\mathrm{Q}} \omega - u\Big)} \tag{5.23}$$

が成り立つ.

$g = 1$ のときは [Ta], p.187, ℓ.5-6 がほぼこの式にあたる.

証明 点 $\mathrm{A}_j(a_j, 0)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{r,s} c_{rs}\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_r - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j} \omega_r\right)\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_s - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j} \omega_s\right) \\
&-\sum_{r,s} c_{rs}\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Q}} \omega_r - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j} \omega_r\right)\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Q}} \omega_s - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{P}_j} \omega_s\right) \\
&+\sum_{r,s} c_{rs}\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_r - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j} \omega_r\right)\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} \omega_s - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j} \omega_s\right) \\
&-\sum_{r,s} c_{rs}\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Q}} \omega_r - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j} \omega_r\right)\left(\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{Q}} \omega_s - \sum_{j=1}^{g}\int_{\mathrm{A}_j}^{\mathrm{Q}_j} \omega_s\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{g}\sum_{r,s} c_{rs}\int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}} \omega_r \int_{\mathrm{Q}_j}^{\mathrm{P}_j} \omega_s \\
&= \sum_{j=1}^{g}\Big(\mathsf{R}_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j}^{\mathrm{P},\mathrm{Q}} - \int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}} \tau_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j}\Big)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

最後の等号は 3.43 による. これの指数函数を取り, それを (2.16) の式の両辺に掛ける. このとき 3.50, 5.10 および σ 函数の定義 5.18 から与式が導かれる. □

注意 5.25 もし P_j, Q_j を $\overline{\mathrm{P}_j}$, $\overline{\mathrm{Q}_j}$ と入れ替えるならば, 対応する積分の符号が逆転する.

5.3 σ 函数の変換公式

$u \in \mathbb{C}^g$ に対し, 記号 u', u'' でもって

$$u = \Omega' u' + \Omega'' u'', \tag{5.26}$$

となるような $\mathbb{R}^g$ の元を表すことにする. さらに $\mathbb{C}$ に値を持つ $\mathbb{R}$-双線型形式 $L(\quad,\quad)$ を

$$L(u,v) = {}^t u(H'v' + H''v''), \quad (u, v \in \mathbb{C}^g) \tag{5.27}$$

で定める. 格子点 $\ell = \Omega'\ell' + \Omega''\ell'' \in \Lambda$ に対し

$$\chi(\ell) = \exp[2\pi i({}^t\ell'\delta'' - {}^t\ell''\delta') - \pi i {}^t\ell'\ell''], \tag{5.28}$$

ここに δ' および δ'' は 5.10 で定義したものである.

補題 5.29 (変換公式) σ 函数 $\sigma(u)$ は任意の $u \in \mathbb{C}^g$ と $\ell \in \Lambda$ について

$$\sigma(u + \ell) = \chi(\ell)\sigma(u) \exp L(u + \tfrac{1}{2}\ell, \ell) \tag{5.30}$$

を満たす.

証明 もちろん平行移動公式 (2.3) を変形するのであるが, ここでは [Ba1], p.286, ℓ.21 を参照されたい. □

以下のことはあとでする $\wp$ 函数の定義には必要でないが参考までに述べておく. まづ

$$E(u,v) = L(u,v) - L(v,u), \quad (u, v \in \mathbb{C}^g) \tag{5.31}$$

とおくと明らかに $E(\quad,\quad)$ は $\mathbb{C}$ に値をとる $\mathbb{R}$ 上の双線型形式で $E(u,v) = -E(v,u)$ をみたす. この $E(\quad,\quad)$ を $\sigma(u)$ の **Riemann 形式** とよぶ.

補題 5.32 次が成り立つ:
(1) $E(iu, v) = E(iv, u)$.
(2) $E(u,v) = 2\pi i({}^t u'v'' - {}^t u''v')$.
特に $E(\quad,\quad)$ は一般に $i\mathbb{R}$ に値をとり $\Lambda \times \Lambda$ 上では $2\pi i\mathbb{Z}$ 値をとる.

証明 (1) は [L], p.85, Theorem 1.2 に示されている.
(2) を示そう.

$$\begin{aligned}
E(u,v) =& L(u,v) - L(v,u) \\
=& {}^t u(H'v' + H''v'') - {}^t v(H'u' + H''u'') \\
=& {}^t uH'v' + {}^t uH''v'' - {}^t vH'u' - {}^t vH''u'' \\
=& {}^t u {}^t\Omega'^{-1} {}^t\Omega' H'v' + {}^t u {}^t\Omega''^{-1} {}^t\Omega'' H''v'' \\
& - {}^t v {}^t\Omega'^{-1} {}^t\Omega' H'u' - {}^t v {}^t\Omega''^{-1} {}^t\Omega'' H''u''.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

ここで, (3.49) より ${}^t\Omega' H'$ と ${}^t\Omega'' H''$ は対称行列である. ゆゑに

$$
\begin{aligned}
&={}^t v'{}^t\Omega' H'\Omega'^{-1}u + {}^t v'{}^t\Omega'' H''\Omega''^{-1}u - {}^t u'{}^t\Omega' H'\Omega'^{-1}v - {}^t u''{}^t\Omega'' H''\Omega''^{-1}v \\
&={}^t v'{}^t\Omega' H'(u' + Tu'') + {}^t v'{}^t\Omega'' H''(T^{-1}u' + u'') \\
&\quad - {}^t u'{}^t\Omega' H'(v' + Tv'') - {}^t u''{}^t\Omega'' H''(T^{-1}v' + v'').
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

また ${}^t\Omega' H'$ と T も対称行列だから

$$
\begin{aligned}
{}^t\Omega' H' T &= {}^t T{}^t\Omega' H' = {}^t\Omega''{}^t\Omega'^{-1}{}^t\Omega' H' = {}^t\Omega'' H', \\
{}^t\Omega'' H'' T &= {}^t T{}^t\Omega'' H'' = {}^t\Omega'{}^t\Omega''^{-1}{}^t\Omega'' H'' = {}^t\Omega' H''
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

であり, ${}^t\Omega'' H'$ と ${}^t\Omega' H''$ も対称行列である. したがって, 再び ${}^t\Omega' H'$ と ${}^t\Omega'' H''$ が対称行列であることと一般の Legendre 関係式 (3.49) ${}^t\Omega' H'' - {}^t\Omega'' H' = 2\pi i 1_g$ を用いて

$$
\begin{aligned}
&={}^t u'{}^t\Omega' H' v' + {}^t u''{}^t\Omega'' H' v' + {}^t u'{}^t\Omega' H'' v'' + {}^t u''{}^t\Omega'' H'' v'' \\
&\quad - {}^t v'{}^t\Omega' H' u' - {}^t v''{}^t\Omega'' H' u' - {}^t v'{}^t\Omega' H'' u'' - {}^t v''{}^t\Omega'' H'' u'' \\
&=2\pi i({}^t u' v'' - {}^t u'' v').
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

□

5.4 $\wp$ 函数の定義

いよいよ $\wp$ 函数の定義である.

定義 5.37 我々は

$$
\wp_{ij}(u) = -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}\log\sigma(u) = \frac{\sigma_i(u)\sigma_j(u) - \sigma_{ij}(u)\sigma(u)}{\sigma(u)^2} \tag{5.38}
$$

と定め, これを $\wp$ **函数** とよぶ. ここで $\sigma_i(u) = \dfrac{\partial}{\partial u_i}\sigma(u)$, $\sigma_{ij}(u) = \dfrac{\partial}{\partial u_i}\sigma_j(u)$ である. 変換公式から σ 函数は u を $u + \ell$ $(\ell \in \Lambda)$ に変えても u_i の 1 次式の指数函数がかかるだけであるが, $\wp$ 函数は σ 函数の対数をとって 2 回微分しているのでそのような指数函数の部分は消えてしまう. したがって $\wp_{ij}(u)$ は Λ を周期とする周期函数であることがわかる. また 4.12 から $\wp_{ij}(u)$ は Θ で 2 位の極を持ち, それ以外では正則であることがわかる. このことは普通 $\wp_{ij}(u) \in \Gamma(J, \mathscr{O}(2\Theta))$ とかかれる.

命題 5.39 $\wp_{ij}(u)$ は偶函数である.

補題 5.40 $\mathrm{P}_j(x_j, y_j)$ $(j = 1, \cdots, g)$ と $\mathrm{P}(x, y)$ に対して

$$
v = {}^t[v_1, \cdots, v_g] = \int_\infty^{\mathrm{P}} \omega + \sum_{j=1}^{g}\int_\infty^{\mathrm{P}_j}\omega \tag{5.41}
$$

とおくとき

$$
4y_r y\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x} = \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} x_r^{i-1}x^{j-1}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}. \tag{5.42}
$$

証明 Jacobi の定理 1.84 により, P, P_1, $\cdots$, P_g が動くとき v_1, $\cdots$, v_g は $\mathbb{C}^g$ 全体を動くことに注意する. このとき

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_r \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\sum_{i=1}^{g}\frac{\partial v_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{g}\left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_r \partial x}\frac{\partial}{\partial v_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_r}\left(\sum_{j=1}^{g}\frac{\partial v_j}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}\right)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}\frac{x_r^{i-1}}{2y_r}\frac{x^{j-1}}{2y}\frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j}.\end{aligned} \tag{5.43}$$

この両辺に $4y_r y$ を掛ければよい. □

次の関係式は, 第 8 節でも Jacobi 多様体の定義方程式系を美しく構成するのに使はれる非常に重要なものである. $g=1$ の場合は $\wp(u)$ の代数的加法公式であつて, 竹内 [Ta] の p.142, $\ell.-2$ の式に他ならない.

定理 5.44 $F(x,z)$ は (3.35) で定義したものとする.

$$\frac{F(x_r,x)+2y_r y}{(x_r-x)^2} = \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}\wp_{ij}\left(\int_\infty^{\mathrm{P}}\omega - u\right)x_r^{i-1}x^{j-1} \tag{5.45}$$

証明 まづ, $\mathrm{P}(x,y)$, $\mathrm{P}_j(x_j,y_j)$, $\mathrm{Q}_j \in X$ について

$$\begin{aligned} 2y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\mathsf{R}^{\mathrm{P},\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j} &= \int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}}\frac{F(x,x_j)-2yy_j}{4(x-x_j)^2}\frac{dx}{2y},\\ 4yy_j\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_j}\mathsf{R}^{\mathrm{P},\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}_j,\mathrm{Q}_j} &= \frac{F(x,x_j)-2yy_j}{4(x-x_j)^2}\end{aligned} \tag{5.46}$$

であることに注意する (右辺の分子が差になっている！). (5.43) の作用素を (5.23) の両辺の対数にそれぞれ施せば, 所望の式を得る. □

定理 5.47 いま X 上の g 個の点 (x_1,y_1), $\cdots$, (x_g,y_g) について

$$u = \sum_{j=1}^{g}\int_\infty^{(x_j,y_j)}\omega \tag{5.48}$$

とおく. このとき

$$\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g}\wp_{ij}(u)x_r^{i-1}x_s^{j-1} = \frac{F(x_r,x_s)-2y_r y_s}{(x_r-x_s)^2}, \qquad x_r^g - \sum_{j=1}^{g}\wp_{jg}(u)x_r^{j-1} = 0 \tag{5.49}$$

が任意の (x_r,y_r) と (x_s,y_s) $(r,s=1,\cdots,g)$ について成り立つ. 特に, 第 2 式より

$$(-1)^{g-j}\wp_{jg}(u) = \text{“}x_1,\ \cdots,\ x_g \text{ の } g-j+1 \text{ 次基本対称式”} \tag{5.50}$$

である.

証明 基本関係式 (5.45) において, $g \geq 2$ のときは $\mathrm{P} \to \overline{\mathrm{P}_r}$ としたあとで $\mathrm{P}_s \to \infty$ とすれば求める最初の式が得られる. また両辺を x^{g-1} で割ったあとで $\mathrm{P} \to \infty$ とするとき, $F(x_r, x)$ の x についての最高次の項は $x_r^g x^{g+1}$ であり $\dfrac{y}{x^{g-1+2}} \to 0$ であるから求める第 2 の式が得られる. □

定理 5.51 函数 $\sigma(u)$ を $u_1, \cdots, u_g$ の冪級数に展開するとき,

$$\sigma(u) \in \mathbb{Q}[\lambda_2, \cdots, \lambda_{4g+2}][[u_1, u_2, \cdots, u_g]] \tag{5.52}$$

であつて, その weight は $g(g+1)/2$ 次で斉重である

証明 まづ (5.49) を $\wp_{ij}(u)$ の方程式と見れば, それを解くことにより, $\wp_{ij}(u)$ の (x_1, y_1), $\cdots$, (x_g, y_g) による表示が得られるわけだが, 方程式が斉重なので, $\wp_{ij}(u)$ も斉重でなければならない. それゆゑ $\sigma(u)$ も斉重である. その weight については方程式 (5.49) の weight および $\wp_{ij}(u)$ と $\sigma(u)$ の関係から $g(g+1)/2$ 次であるとわかる. 前半は (5.49) と後の 8.34 を併用して, 帰納的に証明される. □

6 退化 σ 函数

6.1 The Schur-Weierstrass Polynomial

ここでは Schur-Weierstraß多項式についての基礎事項をまとめる. 主な文献は [Ma] and [BEL2].

しばらくは g は単なる正整数であると考へる. $u_g^{(1)}$, $\cdots$, $u_g^{(g)}$ は不定元とする. 整数 n $(0 \leqq n \leqq g)$ を固定する. 以下では単に $\boldsymbol{u}_g$ と書いて, 変数 $u_g^{(1)}$, $\cdots$, $u_g^{(n)}$ の集合, あるいはこれらを成分とする vector を表はすことにする.

各 $k \geqq 0$ に対して $(-1)^k U_k^{[n]}(\boldsymbol{u}_g)$ は k **次の完全対称式** (complete symmetric polynomial) を表すものとする. 即ち, それは変数 $u_g^{(1)}$, $\cdots$, $u_g^{(n)}$ の, 全次数が k なる全ての単項式の単純和である. 我々は, それが n 変数であることを添字 $[n]$ を付けて表すのである. もし $k < 0$ であれば, $U_k^{[n]}(\boldsymbol{u}_g)$ は 0 であると見做すことにする.

さて, 行列式

$$|U_{g-2i+j+1}^{[g]}(\boldsymbol{u}_g)|_{1 \leqq i,j \leqq g}. \tag{6.1}$$

を考へる. いま単に $U_k = U_k^{[g]}(\boldsymbol{u}_g)$ と書けば $k < 0$ なら $U_k = 0$ なので, この行列式は具体的には

$$\begin{vmatrix} U_g & U_{g+1} & U_{g+2} & \cdots & U_{2g-2} & U_{2g-1} \\ U_{g-2} & U_{g-1} & U_g & \cdots & U_{2g-4} & U_{2g-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_1 & U_2 & U_3 & \cdots & * & * \\ & U_0 & U_1 & \cdots & * & * \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & U_0 & U_1 \end{vmatrix} \qquad (g \text{ が奇数のとき}) \tag{6.2}$$

$$
(6.3) \qquad \begin{vmatrix}
U_g & U_{g+1} & U_{g+2} & U_{g+3} & \cdots & U_{2g-2} & U_{2g-1} \\
U_{g-2} & U_{g-1} & U_g & U_{g+1} & \cdots & U_{2g-4} & U_{2g-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
U_0 & U_1 & U_2 & U_3 & \cdots & * & * \\
 & & U_0 & U_1 & \cdots & * & * \\
 & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & U_0 & U_1
\end{vmatrix} \qquad (g \text{ が偶数のとき})
$$

と書かれる. 以下においては

$$
(6.4) \qquad \begin{aligned}
p_j &:= (u_g^{(1)})^j + \cdots + (u_g^{(g)})^j, \\
u_j^{(i)} &:= \tfrac{1}{2(g-j)+1}(u_g^{(i)})^{2(g-j)+1}, \\
u^{(i)} &:= (u_1^{(i)}, \cdots, u_g^{(i)}), \\
u_j &:= u_j^{(1)} + u_j^{(2)} + \cdots + u_j^{(g)} = \tfrac{1}{2(g-j)+1} p_{2(g-j)+1}, \\
u &:= u^{(1)} + u^{(2)} + \cdots + u^{(g)} = (u_1, u_2, \cdots, u_g)
\end{aligned}
$$

と記す. ここで, $|U^{[g]}_{g-2i+j+1}(\boldsymbol{u}_g)|_{1\leqq i,j\leqq g}$ が [BEL2] の $S_{2,2g+1}$ に他ならないことを説明しておく. その為に, 新たな変数 s_1, s_2, $\cdots$, s_{2g-1} を用意し, これらは

$$
(6.5) \qquad p_j = -{s_1}^j - {s_2}^j - \cdots - {s_{2g-1}}^j, \quad (1 \leqq j \leqq 2g-1)
$$

を満すものとする. 実際, この様な s_j は以下の理由から存在する. まづ, $\varepsilon_k(\boldsymbol{s})$ ($\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_{2g-1})$) で s_j 達の k 次の基本対称式とするとき (6.5) を満たす s_1, s_2, $\cdots$, s_{2g-1} は

$$
(6.6) \qquad \varepsilon_k(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix}
-p_1 & 1 & & & \\
-p_2 & -p_1 & 2 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
-p_{k-1} & -p_{k-2} & -p_{k-3} & \cdots & k-1 \\
-p_k & -p_{k-1} & -p_{k-2} & \cdots & -p_1
\end{vmatrix} = (-1)^k U_k^{[g]}(\boldsymbol{u}_g)
$$

の解に他ならない. このことは [Ma], p.29, $\ell.-4$ と p.28, $\ell.13$ に書かれてゐる. 代数方程式の基本的な定理からこの方程式系はいつも解を持つ. よつて, $|U_k^{[g]}(\boldsymbol{u}_g)|$ が [BEL2] の Theorem 4.3 の Schur-Weierstrass 多項式 $S_{2,2g+1}(-p_1, -p_3, \cdots, -p_{2g-1})$ に他ならないことがわかつた.

注意 6.7 ここで, 我々の記号 u_j は [BEL2] の記号 z_j と少し異なり, $z_j = -(2j-1)u_{g-j+1}$ であることを注意しておく. さらに積分 (5.47) と [BEL2] の definition (5.3) とは積分の方向と乗定数が異なるこにも注意して欲しい.

多項式 $|U^{[g]}_{g-2i+j+1}(\boldsymbol{u}_g)|$ の値はもちろん $u_g^{(1)}$, $\cdots$, $u_g^{(g)}$ によつて定まるが, 実は次のことが成り立つ.

命題 6.8 上の多項式 $|U^{[g]}_{g-2i+j+1}(\boldsymbol{u}_g)|_{1\leqq i,j\leqq g}$ は上に定義した g 個の値 $-p_1, -p_3, \cdots, -p_{2g-1}$ だけで定まる．つまり $u_1, u_2, \cdots, u_g$ の値だけにより定まる．

証明 [BEL2] の p.86 の Theorem 4.1 を参照されたい． □

ここでは

$$S(u) := |U^{[g]}_{g-2i+j+1}(\boldsymbol{u}_g)|_{1\leqq i,j\leqq g}. \tag{6.9}$$

と書いて, これを **Schur-Weierstrass 多項式**と呼ぶ．

ここで, 上の変数について u_j の重さを $2(g-j)+1$ とする**重さ**を定義することができる．これを **Sato weight** と呼ぶことがある．このとき $S(u)$ はこの重さに関して $\frac{1}{2}g(g+1)$ 次の斉重となる．

いま m を正の整数として固定し, $\xi_1, \cdots, \xi_m$ を不定元とする．不定元 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ についての全次数 k の単項式の単純和の $(-1)^k$ 倍を $U^{[m]}_k(\xi)$ と記す．ここで ξ は $\xi_1, \cdots, \xi_m$ の全体を略記したものである．

定義 6.10 上の様に m, ξ_i および $U^{[m]}_k(\xi)$ を定める．どの行も両方向数列

$$\cdots, 0, 0, 1, U^{[m]}_1(\xi), U^{[m]}_2(\xi), \cdots \tag{6.11}$$

の連続した $(m+1)$ 項である様な行列 M について, それが

$$0, \cdots, 0, 0, 1 \tag{6.12}$$

なる行を含まないとき, M を $\xi_1, \cdots, \xi_m$ に関する**単純な行を持たない基本行列**（fundamental matrix without a simple row）であるといふ．

補題 6.13 正整数 m について, $\xi_1, \cdots, \xi_m$ と $U^{[m]}_k(\xi)$ は上の通りであるとする．いま M は $\xi_1, \cdots, \xi_m$ に関する単純な行を持たない基本行列であるとする．さらに $\varepsilon_j(\xi)$ で $\xi_1, \cdots, \xi_m$ の j 次基本対称式を表す．このとき

$$M\begin{bmatrix}\varepsilon_m(\xi)\\ \varepsilon_{m-1}(\xi)\\ \vdots\\ \varepsilon_1(\xi)\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix} \tag{6.14}$$

となる．

証明 [Ma], p.21, (2.6′) を参照． □

次の事実はこの本では使はれないが, Riemann singularity theorem に深く関係するものであるからここに述べておく．

補題 6.15 $S(u)$ は変数 $u^{(1)}_g, \cdots, u^{(g-1)}_g, u^{(g)}_g$ についての多項式として $u^{(g)}_g = 0$ のとき恒等的に消える:

$$S(u^{(1)} + \cdots + u^{(g-1)}) = 0. \tag{6.16}$$

証明 これは 6.13 で $m=g-1$ とし M として, (6.9) の右辺の中の行列を取れば良い. □

注意 6.17 いくつかの例を挙げておく.
(1) $g=1$ のとき $S(u)=u$.
(2) $g=2$ のとき $S(u_1,u_2)=u_1-\frac{1}{3}{u_2}^3$.
(3) $g=3$ のとき $S(u_1,u_2,u_3)={u_2}^2-u_1u_3$.
(4) $g=4$ のとき

$$\begin{aligned}S(u_1,u_2,u_3,u_4)=&\tfrac{1}{4725}{u_4}^{10}-\tfrac{1}{105}u_3{u_4}^7+\tfrac{1}{15}u_2{u_4}^5\\&-\tfrac{1}{3}u_1{u_4}^3+u_2u_3{u_4}^2-{u_1}^3u_4+(u_1u_3-{u_2}^2).\end{aligned}\tag{6.18}$$

定理 6.19 $\sigma(u)$ の u_j 達に関する冪級数展開は

$$\mathbf{Q}[\mu_2,\mu_4,\cdots,\mu_{4g+2}][[u_1,u_2,\cdots,u_g]]\tag{6.20}$$

に属し, 1 の 8 乗根 ε が存在して

$$\sigma(u)=\varepsilon\,S(u)+\text{“higher terms of }\mu_j\text{s”}\tag{6.21}$$

となつてゐる.

以下では (4.9) の根号を $\varepsilon=1$ となる様に取るものとする.
証明 中屋敷氏の報告 [N] を参照いただきたい. □

7 $\wp$ 函数に関する代数的加法公式

7.1 一般論

この章では 次の方針で $\wp_{k\cdots\ell}(u+v)$ を $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$ および $\wp_{hij}(v)$ 等の有理函数として表すことを目標とする. まづ, これまでのことから

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}$$

は $\wp_{ij}(u)$ と $\wp_{ij}(v)$ 達の $\mathbb{Q}$ 係数の多項式で書かれるはづである. それができれば, 両辺に

$$\frac{\partial}{\partial u_i}\Big(\frac{\partial}{\partial u_j}+\frac{\partial}{\partial v_j}\Big)\log$$

を作用させることで所望の式を得ることができる.

7.2 基底

命題 7.1 (3.5) の超楕円曲線において $g=2$ のとき

$$\Gamma(J, \mathscr{O}(2\Theta)) = \mathbb{C}1 \oplus \mathbb{C}\wp_{11} \oplus \mathbb{C}\wp_{12} \oplus \mathbb{C}\wp_{22}$$

証明 次元の公式 ([Mu3], 小林氏の報告 [Ko]) より

$$\dim \Gamma(J, \mathscr{O}(2\Theta)) = 2^2 = 4. \tag{7.2}$$

一方 4.12 から $\wp_{ij} \in \Gamma(J, \mathscr{O}(2\Theta))$ である．ところが, 6.19 と 6.17(2) から容易に $\wp_{11}$, $\wp_{12}$, $\wp_{22}$ が 1 次独立であることがわかるので, 主張が示された. □

これにより,

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = a[\wp_{11}(u) - \wp_{11}(v)] + b[\wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u)]$$

であるが, 6.17(2) から

$$\sigma(u) = u_1 - \tfrac{1}{3}{u_2}^3 + \cdots$$

なので, これを代入することで, 容易に a, b を求めることができる．結果は $a=b=1$ であり,

定理 7.3 (3.5) の超楕円曲線において $g=2$ のとき

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v) + \wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u)$$

7.3 $\wp$ 函数に関する代数的加法公式

命題 7.4 $\dfrac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2}$ は $g(g+1)$ 個の函数 $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$ の $\mathbb{Q}$ 上の多項式として表される．たとえば

(1) $g=1$ のときは

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v),$$

(2) $g=2$ のときは

$$\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} = \wp_{11}(u) - \wp_{11}(v) + \wp_{12}(u)\wp_{22}(v) - \wp_{12}(v)\wp_{22}(u),$$

(3) $g=3$ のときは

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma(u)^2\sigma(v)^2} \\ &= (\wp_{31}(u) - \wp_{31}(v))^2 - (\wp_{33}(u) - \wp_{33}(v))(\wp_{11}(u) - \wp_{11}(v)) \\ &\quad + (\wp_{21}(u) - \wp_{21}(v))(\wp_{23}(u) - \wp_{23}(v)) \\ &\quad - (\wp_{22}(u) - \wp_{22}(v))(\wp_{31}(u) - \wp_{31}(v)). \end{aligned} \tag{7.5}$$

証明 (1) については [Ta], p.141 を, その他については [Ba2] を参照されたい. □

系 7.6 各 $\wp_{ij\cdots r}(u+v)$ は $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$ および $\wp_{hij}(v)$ 達の $\mathbb{Q}(\lambda_0, \cdots, \lambda_{2g+1})$ 上の有理式として表される.

証明 7.4 の式を u と v のそれぞれに関して対数微分したあと, その両者を辺々加えると $2(\log\sigma(u+v) - 2\log\sigma(u) - 2\log\sigma(v))$ の $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$. および $\wp_{hij}(v)$ 達による式が得られる. それに $\dfrac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j}$ を施せば $\wp_{ij}(u+v)$ が $\wp_{ij}(u)$, $\wp_{ij}(v)$, $\wp_{hij}(u)$, $\wp_{hij}(v)$, $\wp_{ijk\ell}(u)$, $\wp_{ijk\ell}(v)$, $\wp_{ijk\ell m}(u)$ および $\wp_{ijk\ell m}(v)$ 達の有理式として表される. あとは後述の 8.34 の等式達を用いて結論を得る. □

$g = 2$ の時の詳しい議論が [Gr] にある.

8 Set of Defining Equations of the Jacobian Variety

8.1 Matrix whose entries are $\wp$-functions

Fundamental formula to a matrix

いま u は C 上の g 個の点 (x_1, y_1), $\cdots$, (x_g, y_g) と

$$u = \Big(\int_\infty^{(x_1,y_1)} + \int_\infty^{(x_2,y_2)} + \cdots + \int_\infty^{(x_g,y_g)}\Big)\omega \tag{8.1}$$

なる関係があるとせよ. このとき fundamental relation

$$\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} \wp_{ij}\Big(u - \int_\infty^{(x,y)}\Big){x_r}^{i-1}x^{j-1} = \frac{F(x_r, x) - 2y_r y}{(x_r - x)^2} \tag{8.2}$$

が成り立つ. これから Jacobi 多様体の自然な方程式系を導くのが本節の目標である. まづ (8.2) から, いくつかの必要な式を導いておく. (8.2) の分母を払つて,

$$(x_r - x)^2 \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} \wp_{ij}\Big(u - \int_\infty^{(x,y)}\Big){x_r}^{i-1}x^{j-1} - \big(F(x_r, x) - 2y_r y\big) = 0 \tag{8.3}$$

を得る. ここで $x = 1/t^2$, $y = 1/t^{2g+1} + \cdots$ として, (8.3) の左辺を t で展開すれば, その t に関する各係数が消える. 特に最低次とその次の項が消えることから, 各 r について

$$\begin{aligned} 2y_r &= \wp_{ggg}{x_r}^{g-1} + \wp_{gg,g-1}{x_r}^{g-2} + \cdots + \wp_{gg2}x_r + \wp_{gg1}, \\ x_r^g &= \wp_{gg}{x_r}^{g-1} + \wp_{g,g-1}{x_r}^{g-2} + \cdots + \wp_{g2}x_r + \wp_{g1} \end{aligned} \tag{8.4}$$

が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} \wp_{ij}(u){x_r}^{i-1}{x_s}^{j-1} = \frac{F(x_r, x_s) - 2y_r y_s}{(x_r - x_s)^2} \tag{8.5}$$

つぎに $r \neq 1$ についての (8.3) において $(x_1, y_1) \to \infty$ としてから, $(x, y) \to (x_1, -y_1)$ とすれば

$$(x_r - x_1)^2 \sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} \wp_{ij}(u) {x_r}^{i-1} {x_1}^{j-1} - \big(F(x_r, x_1) - 2y_r y_1\big) = 0 \tag{8.6}$$

となる. (x_1, y_1) 以外についても同様な操作が可能であるから, すべての r, s について

$$(x_r - x_s)^2 \sum_{i=1}^{g} \sum_{j=1}^{g} \wp_{ij}(u) {x_r}^{i-1} {x_s}^{j-1} - \big(F(x_r, x_s) - 2y_r y_s\big) = 0 \tag{8.7}$$

が成り立つ. これを

$$2\, y_r y_s = {}^t W(x_r) H W(x_s) \tag{8.8}$$

の形に変形する. 但し,

$$W(x) = {}^t[1,\ x,\ \cdots,\ x^{g-1},\ x^g,\ x^{g+1}] \tag{8.9}$$

である. このときの $H = [h_{ij}]$ の成分は

$$\begin{aligned} h_{ij} = 2\wp_{i-1,j-1} - \wp_{i-2,j} - \wp_{i,j-2} + \delta_{ij}(\mu_{2g+6-4i} + \mu_{2g+6-4j}) \\ + (\delta_{i,j+1}\mu_{4g+8-4i} + \delta_{i+1,j}\mu_{4g+8-4j}) \end{aligned} \tag{8.10}$$

となる. 例へば $g = 4$, つまり

$$y^2 = x^9 + \mu_2 x^8 + \mu_4 x^7 + \cdots + \mu_{18} \tag{8.11}$$

のときは

$$H = \begin{bmatrix} 2\mu_{18} & \mu_{16} & -\wp_{11} & -\wp_{12} & -\wp_{13} & -\wp_{14} \\ \mu_{16} & 2\wp_{11} + 2\mu_{14} & \wp_{12} + \mu_{12} & 2\wp_{13} - \wp_{22} & 2\wp_{14} - \wp_{23} & -\wp_{24} \\ -\wp_{11} & \wp_{12} + \mu_{12} & 2\wp_{22} - 2\wp_{13} + 2\mu_{10} & \wp_{23} - \wp_{14} + \mu_8 & 2\wp_{24} - \wp_{33} & -\wp_{34} \\ -\wp_{12} & 2\wp_{13} - \wp_{22} & \wp_{23} - \wp_{14} + \mu_8 & 2\wp_{33} - 2\wp_{24} + 2\mu_6 & 2\wp_{34} - \wp_{34} + \mu_4 & -\wp_{44} \\ -\wp_{13} & 2\wp_{14} - \wp_{23} & 2\wp_{24} - \wp_{33} & 2\wp_{34} - \wp_{34} + \mu_4 & 2\wp_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -\wp_{14} & -\wp_{24} & -\wp_{34} & -\wp_{44} & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.12}$$

このとき, もちろん

$$-2f(x_r) = {}^t W(x_r) H W(x_r). \tag{8.13}$$

いま

$$U(x) = {}^t[1,\ x,\ \cdots,\ x^{g-1},\ x^g] \tag{8.14}$$

とおき, (8.8) を

$${x_r}^g = \wp_{gg} {x_r}^{g-1} + \wp_{g2} {x_r}^{g-2} + \cdots + \wp_{g,g-1} x_r + \wp_{gg} \tag{8.15}$$

を利用して ${}^tU(x_r)KU(x_s)$ の形に変形すれば, この K は

$$K = \left[\det H\begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix}\right]_{1\leqq i\leqq g,1\leqq j\leqq g} \tag{8.16}$$

となる. 実際,

(8.17)

$$W'(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{g-1} \\ x^g \end{bmatrix}, \quad U(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{g-1} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ {}^tH_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad H_{11} = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ {}^tH'_{12} & h_{g+1,g+1} \end{bmatrix},$$

とするとき

$$\begin{aligned}
&{}^tW(x_r)HW(x_r) \\
&\quad = [{}^tW'(x_r) \quad {x_r}^{g+1}] \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ {}^tH_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tW'(x_s) \\ {x_s}^{g+1} \end{bmatrix} \\
&\quad = [{}^tW'(x_r)H_{11} + {x_r}^{g+1t}H_{12} \quad 0] \begin{bmatrix} {}^tW'(x_s) \\ {x_s}^{g+1} \end{bmatrix}, \quad ((8.16)) \\
&\quad = {}^tW'(x_r)H_{11}W'(x_s) + {x_r}^{g+1t}H_{12}\,{}^tW'(x_s) \\
&\quad = {}^tW'(x_r)H_{11}W'(x_s) + {x_r}^{g+1} \cdot 0 \\
&\quad = {}^tU(x_r)H'_{11}U(x_s) + {x_r}^g\,{}^tH'_{12}U(x_s) + {}^tU(x_r)H'_{12}{x_s}^g + {x_r}^g h_{g+1,g+1}{x_s}^g \\
&\quad = {}^tU(x_r)H'_{11}U(x_s) \\
&\qquad + {}^tU(x_r) \begin{bmatrix} \wp_{1g} \\ \vdots \\ \wp_{gg} \end{bmatrix} {}^tH'_{12}U(x_s) \\
&\qquad + {}^tU(x_r)H'_{12}[\wp_{1g} \quad \cdots \quad \wp_{gg}]U(x_s) \\
&\qquad + {}^tU(x_r) \begin{bmatrix} \wp_{1g} \\ \vdots \\ \wp_{gg} \end{bmatrix} h_{g+1,g+1}[\wp_{1g} \quad \cdots \quad \wp_{gg}]U(x_s) \\
&\quad = {}^tU(x_r)\left[\det\ H\begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix}\right]U(x_s).
\end{aligned}$$

(ここの計算は全く形式的なもの). また,

$$2\,y_r = \wp_{ggg}{x_r}^{g-1} + \wp_{gg,g-1}{x_r}^{g-2} + \cdots + \wp_{gg2}x_r + \wp_{gg1}$$

なので,

$$4\,y_r y_s = \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} \wp_{ggi}\wp_{ggj}\, {x_r}^{i-1}{x_s}^{j-1}$$
$$= {}^tU(x_r)\begin{bmatrix} \wp_{gg1}\wp_{gg1} & \wp_{gg1}\wp_{gg2} & \cdots & \wp_{gg1}\wp_{ggg} \\ \wp_{gg2}\wp_{gg1} & \wp_{gg2}\wp_{gg2} & \cdots & \wp_{gg2}\wp_{ggg} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \wp_{ggg}\wp_{gg1} & \wp_{ggg}\wp_{gg2} & \cdots & \wp_{ggg}\wp_{ggg} \end{bmatrix} U(x_s)$$

である. ここで $[{}^tU(x_1)\ {}^tU(x_2)\ \cdots\ {}^tU(x_g)]$ は generic には正則行列なので,

$$\tfrac{1}{2}\wp_{ggi}\wp_{ggj} + \det H\begin{bmatrix} i & g+1 & g+2 \\ j & g+1 & g+2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (i,\, j = 1,\, \cdots,\, g) \tag{8.18}$$

である. これが Jacobi 多様体を定義する十分な量の方程式を含んでゐることを示さう. いま

$$\{P_{11}, \cdots, P_{gg}\},\ \{P_{gg1}, \cdots, P_{ggg}\} \tag{8.19}$$

をその 1 つの解とせよ. (どれがどの変数に対応してゐるかは言ふまでもないと思ふが).
このとき

$$\begin{aligned} y &= P_{ggg}x^{g-1} + P_{gg,g-1}x^{g-2} + \cdots + P_{gg2}x + P_{gg1}, \\ x^g &= P_{gg}x^{g-1} + P_{g,g-1}x^{g-2} + \cdots + P_{g2}x + P_{g1} \end{aligned} \tag{8.20}$$

が与へる g 個の根を

$$(x_1, y_1),\ \cdots,\ (x_g, y_g) \tag{8.21}$$

とし, これから

$$u = \left(\int_\infty^{(x_1,y_1)} + \int_\infty^{(x_2,y_2)} + \cdots + \int_\infty^{(x_g,y_g)}\right)\omega \tag{8.22}$$

を定めると, 先の等式 $y_r = \wp_{gg1}{x_r}^{g-1} + \cdots$, $x^g = \wp_{g1}{x_r}^{g-1} + \cdots$ により,

$$P_{g1} = \wp_{g1}(u), \cdots, P_{gg} = \wp_{gg}(u),\ P_{gg1} = \wp_{gg1}(u), \cdots, P_{ggg} = \wp_{ggg}(u) \tag{8.23}$$

となる. 後は方程式を i, j の大きい方から順に辿つて, 順に, その他の組 (i, j) について $P_{ij} = \wp_{ij}(u)$ が了解される. 実際, 例へば $g = 4$ なら, まづ

$$\frac{1}{2}\,{\wp_{444}}^2 = -\begin{vmatrix} 2\wp_{33} - 2\wp_{24} + 2\mu_6 & \wp_{34} + \mu_4 & -\wp_{44} \\ \wp_{34} + \mu_4 & 2\wp_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -\wp_{44} & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{8.24}$$

と

$$\frac{1}{2}\,{P_{444}}^2 = -\begin{vmatrix} 2P_{33} - 2P_{24} + 2\mu_6 & P_{34} + \mu_4 & -P_{44} \\ P_{34} + \mu_4 & 2P_{44} + 2\mu_2 & 1 \\ -P_{44} & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{8.25}$$

より $P_{33}=\wp_{33}(u)$ でなければならない. さらに

$$\frac{1}{2}\wp_{443}\wp_{444}=-\begin{vmatrix}\wp_{23}-\wp_{14}+2\mu_8 & 2\wp_{24}-\wp_{33} & -\wp_{34}\\ \wp_{34}+\mu_4 & 2\wp_{44}+2\mu_2 & 1\\ -\wp_{44} & 1 & 0\end{vmatrix} \tag{8.26}$$

と

$$\frac{1}{2}P_{443}P_{444}=-\begin{vmatrix}P_{23}-P_{14}+2\mu_8 & 2P_{24}-P_{33} & -P_{34}\\ P_{34}+\mu_4 & 2P_{44}+2\mu_2 & 1\\ -P_{44} & 1 & 0\end{vmatrix} \tag{8.27}$$

により, $P_{23}=\wp_{23}(u)$ でなければならない. 以下順に進めると $P_{gg,i+1}P_{gg,j+1}$ についての方程式から $P_{ij}=\wp_{ij}(u)$ が得られて, 結局, すべての i, j について $P_{ij}=\wp_{ij}(u)$, $P_{ggj}=\wp_{ggj}(u)$ となるで, 上の解 $\{P_{ij},P_{ggj}\}$ は Jacobi 多様体の上の座標を与へる.

従つてこれらの解は, 確かに Jacobi 多様体の 1 つの点の座標を与へる. 以上から上の方程式系は Jacobi 多様体の定義方程式系である. ちなみに Jacobi 多様体の次元 g は変数

$$\{\wp_{11},\ \wp_{12},\ \cdots,\wp_{gg}\},\ \{\wp_{gg1},\cdots,\wp_{ggg}\} \tag{8.28}$$

の個数 $\frac{1}{2}g(g+1)+g$ から, 方程式の個数 $\frac{1}{2}g(g+1)$ を差し引いたものと一致してゐて, 辻褄が合つてゐる.

以上を定理としてまとめておく.

定理 8.29 超楕円曲線 C の Jacobi 多様体の 1 つの model の定義方程式は

$$\tfrac{1}{2}\wp_{ggi}\wp_{ggj}+\det H\begin{bmatrix} i & g+1 & g+2\\ j & g+1 & g+2\end{bmatrix}=0 \qquad (i,\ j=1,\ \cdots,\ g) \tag{8.30}$$

で与へられる. これは特異点を含み得る.

注意 8.31 これは特異点を含み得るが, それはこの方程式系を偏微分して得られる方程式により（座標を $\wp_{ijk\ell}$ などで増やせば）解消されていく.

8.2 $\wp$ 函数のみたすその他の微分方程式

Weierstraßの $\wp$ 函数は $\wp'(u)^2=4\wp(u)^3-g_2\wp(u)-g_3$ なる微分方程式を満たす. 超楕円函数の場合も $\wp_{ij}(u)$ はいくつかの微分方程式を満たす. 本章では [Ba3] に従つてこのことについて説明する.

8.2.1 種数 3 以下の場合

任意の $j,\ k,\ \cdots,\ r\in\{1,\cdots,g\}$ に対して

$$\wp_{jk\cdots r}(u)=\frac{\partial}{\partial u_j}\wp_{k\cdots r}(u) \tag{8.32}$$

と定めると $\wp_{jk\cdots r}(u)$ はすべて Λ を周期とする周期函数つまり **Jacobi 多様体** $J = \mathbf{C}^g/\Lambda$ 上の有理型函数になっている．種数 $g=1$ のときは $\wp_{11}(u)$ は (定数の差を除いて) いわゆる Weierstraßの $\wp$ 函数である．

σ 函数は $\Theta+\Lambda$ を 1 位の零の因子としているので, 定義 5.37 にも述べたように,

$$\wp_{ij}(u) \in \Gamma(J, \mathscr{O}(2\Theta)), \quad \wp_{ijk}(u) \in \Gamma(J, \mathscr{O}(3\Theta)) \tag{8.33}$$

となることがわかる．ここで $\Gamma(J, \mathcal{O}(n\Theta))$ は Θ に n 位の極をもち, 他の点では正則であるような J 上の函数全体のなす空間をあらわす.

命題 8.34 X はいままで通り, (3.5) の方程式 $y^2 = \mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_{2g+1}x^{2g+1}$ で定義されているものとする．簡単のために $\wp_{ijk\ell} = \wp_{ijk\ell}(u)$, $\wp_{ij} = \wp_{ij}(u)$ とかくと以下の方程式が $g = 1$, 2 または 3 のとき成り立つ:

$$\begin{aligned}
&(1) && \wp_{3333} - 6\wp_{33}^2 = 2\mu_5\mu_7 + 4\mu_6\wp_{33} + 4\mu_7\wp_{32},\\
&(2) && \wp_{3332} - 6\wp_{33}\wp_{32} = 4\mu_6\wp_{32} + 2\mu_7(3\wp_{31} - \wp_{22}),\\
&(3) && \wp_{3331} - 6\wp_{31}\wp_{33} = 4\mu_6\wp_{31} - 2\mu_7\wp_{21},\\
&(4) && \wp_{3322} - 4\wp_{32}^2 - 2\wp_{33}\wp_{22} = 2\mu_5\wp_{32} + 4\mu_6\wp_{31} - 2\mu_7\wp_{21},\\
&(5) && \wp_{3321} - 2\wp_{33}\wp_{21} - 4\wp_{32}\wp_{31} = 2\mu_5\wp_{31},\\
&(6) && \wp_{3311} - 4\wp_{31}^2 - 2\wp_{33}\wp_{11} = 2\Delta,\\
&(7) && \wp_{3222} - 6\wp_{32}\wp_{22} = -4\mu_2\mu_7 - 2\mu_3\wp_{33} + 4\mu_4\wp_{32} + 4\mu_5\wp_{31} - 6\mu_7\wp_{11},\\
&(8) && \wp_{3221} - 4\wp_{32}\wp_{21} - 2\wp_{31}\wp_{22} = -2\mu_1\mu_7 + 4\mu_4\wp_{31} - 2\Delta,\\
&(9) && \wp_{3211} - 4\wp_{31}\wp_{21} - 2\wp_{32}\wp_{11} = -4\mu_0\mu_7 + 2\mu_3\wp_{31},\\
&(10) && \wp_{3111} - 6\wp_{31}\wp_{11} = 4\mu_0\wp_{33} - 2\mu_1\wp_{32} + 4\mu_2\wp_{31},\\
&(11) && \wp_{2222} - 6\wp_{22}^2 = -8\mu_2\mu_6 + 2\mu_3\mu_5 - 6\mu_1\mu_7\\
& && \quad - 12\mu_2\wp_{33} + 4\mu_3\wp_{32} + 4\mu_4\wp_{22} + 4\mu_5\wp_{21} - 12\mu_6\wp_{11} + 12\Delta,\\
&(12) && \wp_{2221} - 6\wp_{22}\wp_{21} = -4\mu_1\mu_6 - 8\mu_0\mu_7 - 6\mu_1\wp_{33} + 4\mu_3\wp_{31} + 4\mu_4\wp_{21}\\
& && \quad - 2\mu_5\wp_{11},\\
&(13) && \wp_{2211} - 4\wp_{21}^2 - 2\wp_{22}\wp_{11} = -8\mu_0\mu_6 - 8\mu_0\wp_{33} - 2\mu_1\wp_{32} + 4\mu_2\wp_{31}\\
& && \quad + 2\mu_3\wp_{21},\\
&(14) && \wp_{2111} - 6\wp_{21}\wp_{11} = -2\mu_0\mu_5 - 8\mu_0\wp_{32} + 2\mu_1(3\wp_{31} - \wp_{22}) + 4\mu_2\wp_{21},\\
&(15) && \wp_{1111} - 6\wp_{11}^2 = -4\mu_0\mu_4 + 2\mu_1\mu_3 + 4\mu_0(4\wp_{31} - 3\wp_{22})\\
& && \quad + 4\mu_1\wp_{21} + 4\mu_2\wp_{11}.
\end{aligned}$$

ここに

$$\Delta = \wp_{32}\wp_{21} - \wp_{31}\wp_{22} + \wp_{31}^2 - \wp_{33}\wp_{11}. \tag{8.35}$$

ただし, $g = 1$ または 2 のときは $j > g$ なる添字を含むような $\wp$ 函数や $i > 2g+1$ なる添字を含む μ_i はすべて 0 とする.

とくに $g=1$ のときは方程式 (15) のみ意味があるが, それは $\wp'(u)^2 = 4f(\wp(u))$ から導かれる.

証明 [Ba3] を参照されたい. そこでは, 一般の種数に対して一般的な見地から議論がなされている. □

参考文献

[Ba1] Baker, H.F. : *Abelian functions – Abel's theorem and the allied theory including the theory of the theta functions* – Cambridge Univ. Press, 1897

[Ba2] Baker, H.F. : On the hyperelliptic sigma functions Amer. J. of Math., XX(1898)301-384

[Ba3] Baker, H.F. : On a system of differential equations leading to periodic functions, Acta math., 27(1903)135-156

[Ba4] Baker, H.F. : *An introduction to the theory of multiply periodic functions* Cambridge Univ. Press, (1907)

[BEL1] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V. : Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, Reviews in Math. and Math. Physics, 10(1997)1–125

[BEL2] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V. : Rational analogs of Abelian functions, Functional Anal. Appl., **33**(1999)83–94

[BEL3] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V. : Uiformaization of Jacobi varaieties of trigonal curves, Functional Anal. Appl., **34**(2000)159-171

[BG] Bauldwin, S., and Gibbons, J. : Genus 4 trigonal reduction of the Benney equations, J.Phy. A, **39**(2006)3607-3639

[EEMOP] Eilbeck, J.C., Enolskii, V.Z., Matsutani, S., Ônishi, Y. and Previato, E. : Abelian functions of trigonal curves of genus three, to appear in "Int. Math. Res. Notices",

[FK] Farkas, H.M. and Kra, I. : *Riemann Surfaces* (2nd ed.), Grad. Text in Math.,71

[Gr] Grant, D. : Formal groups in genus two, J. reine angew. Math., 411(1990)96–121

[Gu] 軍司圭一 : Abel-Jacobi の定理 I, 本報告集

[HL] Hensel, K. and Landsberg, G. : *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Teubner, 1902

[I] 岩澤健吉： 代数函数論, 1952, 岩波書店

[Kl] Klein, F.: 19 世紀の数学, 1995, 共立出版

[Ko] 小林 真一： Algebraic theory of Abelian varieties via schemes 本報告集

[Ku] 楠 幸男： 函数論, 1973, 朝倉書店

[L] Lang, S. : *An introduction to Algebraic and Abelian Functions* (2nd ed.), Springer-Verlag, 1982

[Ma] Macdonald, I.G. : *Symmetric functions and Hall polynomials*, 1995, Clarendon Press, Oxford

[Mu1] Mumford, D. : *Tata lectures on theta I* (Prog. in Math. 28), 1983, Birkhäuser

[Mu2] Mumford, D. : *Tata lectures on theta II* (Prog. in Math. 43), 1984, Birkhäuser

[Mu3] Mumford, D. : Abelian varieties, 1985, Oxford Univ. Press

[N] 中屋敷 厚： シグマ函数の代数的表示 本報告集

[Og] 小川裕之： 代数曲線の Riemann-Roch の定理, 本報告集

[OU] 尾崎 学, 梅垣敦紀： Abel-Jacobi の定理 II, 本報告集

[Ta] 竹内端三： 楕圓函數論, 1936, 岩波全書

[TD] 田中俊一 · 伊達悦朗： KdV 方程式 （第５・６章）, 1979, 紀伊國屋数学叢書 16

[Wei] Weil, A. : 数学の創造, 1983, 日本評論社

[Wey] Weyl, H. : *Die Idee der Riemanschen Fläche,* Tuebner, 1913, 「リーマン面」, 田村二郎訳, 岩波書店, 1974

[Y] 吉富賢太郎： リーマン面と代数曲線, 本報告集