第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.177-189

シグマ関数の代数的表示

中屋敷 厚*

1 はじめに

Weierstrass の楕円関数論の大きな特徴は, 楕円曲線の定義方程式に直接結びついた代数的性格にある. Eisenstein 級数の間の関係式の導出などはその帰結の一つである. 楕円関数 $\wp(u)$, 加法的関数 $\zeta(u)$ はシグマ関数の対数微分として記述されるという意味で, シグマ関数が最も基本的である. シグマ関数の代数的性質は, その原点におけるべき級数展開の係数が, 楕円曲線の定義方程式

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \tag{1}$$

の係数 g_2, g_3 の同次多項式 $(\deg g_i = 2i)$ となるという事実の中に基本的には表現しつくされていると思われる. 現今の関数論では, $\wp(u)$ の満たす非線形微分方程式を導いてそれからシグマ関数のべき級数展開を決定するが, これを多変数で一般に実行しようとすると困難が多い. Weierstrass 自身は楕円関数論をシグマ関数を定義することから始めそれを用いて $\wp(u)$, $\zeta(u)$ を定義した. さらにシグマ関数の満たす線形の微分方程式を導出し, べき級数展開を決定している.

さて Klein はシグマ関数を代数的積分を用いて表示する公式を見出した. その直接の帰結としてシグマ関数のべき級数展開の係数は g_2, g_3 の同次多項式になることが分かる. さらに Klein はその公式を拡張することにより種数 2 以上の超楕円曲線に対してシグマ関数の拡張を定義した. それは g 変数の擬周期的正則関数であるが, その定義の仕方から原点におけるべき級数展開の係数は, 超楕円曲線の定義方程式の係数の適当な同次多項式になることが分かる. Klein の公式はシグマ関数の代数的性格を見事に表現したものと言える.

本稿ではまず Weierstrass のシグマ関数に対する Klein の公式について説明し, その後より一般の平面代数曲線のシグマ関数に対する同様の公式について簡単に説明する. 本稿の詳細については [7] を, シグマ関数についての基本的な事柄や本稿で触れていない重要な性質については本報告集中の大西さんによる原稿をご参照ください.

2 Weierstrass のシグマ関数

拡張された場合の記述に都合のよいように, Weierstrass のシグマ関数を 3 次曲線 (1) から出発して定義する. Weierstrass の楕円関数論についての参考文献として [9, 10] をあげて

*九州大学大学院数理学研究院 e-mail: 6vertex@math.kyushu-u.ac.jp

おく．3 次曲線 (1) の判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ とし, それから定義されるコンパクトリーマン面を X とする．

有理型微分

$$du = \frac{dx}{y} \qquad dr = \frac{xdx}{y}$$

はそれぞれ X 上の第一種, 第二種微分を定義する．X 上に標準ホモロジー基底 $\{\alpha, \beta\}$ をとり,

$$2\omega_1 = \int_\alpha du, \quad 2\omega_2 = \int_\beta du, \quad -2\eta_1 = \int_\alpha dr, \quad -2\eta_2 = \int_\beta dr,$$

により 4 つの周期を定義する (大西さんの原稿では, 左辺の 2 はなく, η_i の符号は逆である)．du, dr は 1 次元コホモロジー $H^1(X, \mathbb{C})$ の交叉型式 $\circ$:

$$du \circ dr := \sum \mathrm{Res}\left(\int^p du\right) dr$$

について

$$du \circ dr = 1$$

を満たすので, リーマンの周期関係式から

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \frac{\pi i}{2}$$

が成り立つ．これはルジャンドルの関係式とよばれているものである．またリーマンの不等式から $\omega_1 \neq 0$ であること, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$, $\tau = \omega_1^{-1}\omega_2$ であることがわかる．　従って特に ω_1, ω_2 は $\mathbb{R}$ 上 1 次独立であることが分かる．この ω_1, ω_2, η_1, η_2 を用いて, シグマ関数を次のように定義する．

定義　次の条件を満たす関数 $\sigma(u)$ をシグマ関数という．

(i) $\mathbb{C}$ 上正則である．

(ii) 次の擬周期性を満たす:

$$\frac{\sigma(u+\ell)}{\sigma(u)} = \chi(\ell) \exp\ L(u + \frac{1}{2}\ell, \ell).$$

ただし

$$\begin{aligned}
&\ell = 2\omega_1\ell' + 2\omega_2\ell'', \quad \ell', \ell'' \in \mathbb{Z},\\
&L(u, v) = (2\eta_1 v' + 2\eta_2 v'')u, \quad v = 2\omega_1 v' + 2\omega_2 v'', v', v'' \in \mathbb{R}.\\
&\chi(\ell) = (-1)^{\ell' + \ell'' + \ell'\ell''}.
\end{aligned}$$

(iii) 原点におけるべき級数展開は次の形をしている:

$$\sigma(u) = u + O(u^2).$$

条件 (i), (ii) を満たす関数は, ヤコビ-リーマンのテータ関数

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \tau (n+a)^2 + 2\pi i (n+a)(n+b)\right), \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}\tau > 0,$$

を用いて

(2) $$\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}u^2\right)\theta \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} (\frac{u}{2\omega_1},\tau), \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

のように具体的に作ることが出来る. これは奇関数で原点に 1 位の零点を持つこともテータ関数の性質からわかるので, 定数倍して条件 (iii) を満たすようにすればシグマ関数になる. また $\theta(z) = \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z)$ と同じ擬周期性を満たす正則関数は $\theta(z)$ の定数倍に限ることから, 条件 (i)-(iii) を満たす関数は唯一つであることも分かる.Weierstrass のシグマ関数は (i)-(iii) を満たすので, 上で定義したシグマ関数は Weierstrass のシグマ関数に一致する. 従って

(3) $$\wp(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u)$$

と定めると, $(x,y) = (\wp(u), \wp'(u))$ は X 上の点となる. 今

$$p_i = (x_i, y_i) = (\wp(u_i), \wp'(u_i)), \quad i = 1,2$$

として $X \times X$ 上の 2-型式

(4) $$\widehat{\omega}(p_1,p_2) = \wp(u_2-u_1)du_1du_2$$

を考えると, $\wp(u)$ の加法定理により, $\widehat{\omega}$ は

$$\widehat{\omega}(p_1,p_2) = \frac{2y_1y_2 + 4x_1x_2(x_1+x_2) - g_2(x_1+x_2) - 2g_3}{4y_1y_2(x_1-x_2)^2}dx_1dx_2$$

と代数関数 x_i, y_i を用いて表示できることが分かる.

Weierstrass のシグマ関数に対する Klein の公式 [4] とは次のようなものである:

(5) $$\sigma(u_2-u_1) = \frac{x_1-x_2}{\sqrt{y_1y_2}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_{\bar{p}_1}^{\bar{p}_2}\int_{p_1}^{p_2}\widehat{\omega}\right).$$

ただし $\bar{p}_i=(x_i,-y_i)=(\wp(-u_i),\wp'(-u_i))$. 右辺の積分路の不定性による多価性をきちんと記述するには普遍被覆上で定式化する必要があるがその辺を詳しく知りたい方は論文 [7] を参照してください. 以下で述べる一般の場合の公式についても同様である.

この公式は, 解析的表示を用いて次のように簡単にチェックすることが出来る. $\widehat{\omega}$ の解析的表示 (4) と (3) を用いて積分を計算すると

$$\begin{aligned}\exp\left(\int_{\bar{p}_1}^{\bar{p}_1}\int_{p_1}^{p_2}\widehat{\omega}\right) &= \frac{\sigma(2u_1)\sigma(2u_2)}{\sigma(u_1+u_2)^2}\\ &= \frac{\sigma(2u_1)\sigma(2u_2)}{\sigma(u_1+u_2)^2\sigma(u_1-u_2)^2}\sigma(u_1-u_2)^2.\end{aligned}$$

最後の式の $\sigma(u_1-u_2)^2$ 以外の部分は各 u_j について $2\omega_i$ 周期的 $(i=1,2)$ であることが分かるので x_k,y_l の有理関数として記述できるはずである. 実際シグマ関数の加法定理

$$\frac{\sigma(v_1-v_2)\sigma(v_1+v_2)}{\sigma(v_1)^2\sigma(v_2)^2}=\wp(v_2)-\wp(v_1) \tag{6}$$

で, $v_1=u_1+u_2$, $v_2=u_1-u_2$ とすると

$$\frac{\sigma(2u_1)\sigma(2u_2)}{\sigma(u_1+u_2)^2\sigma(u_1-u_2)^2}=\wp(u_1-u_2)-\wp(u_1+u_2).$$

(6) の両辺の $\dfrac{\partial^2}{\partial v_1\partial v_2}\log\cdot$ をとると

$$\wp(v_1-v_2)-\wp(v_1+v_2)=\frac{\wp'(v_1)\wp'(v_2)}{\left(\wp(v_1)-\wp(v_2)\right)^2}.$$

従って

$$\frac{\sigma(2u_1)\sigma(2u_2)}{\sigma(u_1+u_2)^2\sigma(u_1-u_2)^2}=\frac{y_1y_2}{(x_1-x_2)^2}$$

となる. これを先の式に代入して $\sigma(u_1-u_2)$ について解くと (5) が得られる. ただし平方根をとるとき符号は次のように決めた. $g_2,g_3\in\mathbb{R}$, $u_2>u_1>0$ とし u_2 は十分 0 に近いとする. このとき x_i,y_i はともに実数で $0<x_2<x_1$, $y_1,y_2<0$, $\widehat{\omega}$ の積分の exp は正, $\sigma(u_2-u_1)>0$ となる. 変数がこのような条件を満たすとき両辺の符号が一致するようにした. ただしそのような範囲で $\sqrt{y_1y_2}$ は正数の平方根を意味するものとする.

Klein の公式を用いると次のようにしてシグマ関数のべき級数展開を調べることが出来る. ∞ における局所座標 t を

$$x=\frac{1}{t^2},\qquad y=-\frac{2}{t^2}(1-g_2t^4-g_3t^6)^{1/2}$$

を満たすようにとる. この t を用いて変数 u を表すと

$$u = \int_{\infty}^{p} \frac{dx}{y} = t + \frac{g_2}{40}t^5 + \frac{g_3}{56}t^7 + \frac{g_2^2}{384}t^9 + \frac{3g_2g_3}{704}t^{11} + \cdots .$$

これを逆に解いて

$$t = u - \frac{g_2}{40}u^5 - \frac{g_3}{56}u^7 + \cdots .$$

$\widehat{\omega}$ の展開は

$$\widehat{\omega}(p_1,p_2) = \left(\frac{1}{(t_1-t_2)^2} + \frac{g_2}{8}(t_1^2+t_2^2) + \frac{g_3}{8}(t_1^4+t_2^4+3t_1^2t_2^2) + \cdots\right) dt_1dt_2,$$

となりそれを用いて計算すると

$$\exp\left(\frac{1}{2}\int_{\bar{p}_1}^{\bar{p}_2}\int_{p_1}^{p_2}\widehat{\omega}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{t_1t_2}}{t_1+t_2}\left(1 - \frac{g_2}{24}(t_1^4+t_2^4-t_1^3t_2-t_1t_2^3) - \frac{g_3}{240}(11t_1^6+11t_2^6-6t_1t_2^5-6t_1^5t_2-10t_1^3t_2^3) + \cdots\right).$$

また

$$\frac{x_1-x_2}{\sqrt{y_1y_2}} = \frac{t_2^2-t_1^2}{2\sqrt{t_1t_2}}\left(1 + \frac{g_2}{16}(t_1^4+t_2^4) + \frac{g_3}{16}(t_1^6+t_2^6) + \cdots\right)$$

である. これらを用いて計算すると

$$\sigma(u_2-u_1)$$
$$= (t_2-t_1)\left(1 + \frac{g_2}{48}(t_1^4+t_2^4-2t_1^3t_2-2t_1t_2^3) + \frac{g_3}{120}(2t_1^6+2t_2^6+3t_1t_2^5+3t_1^5t_2+5t_1^3t_2^3) + \cdots\right)$$

となる. 最後の式で $t_1=0$, $t=t_2$, $u=u_2$ とすると

$$\begin{aligned}\sigma(u) &= t + \frac{g_2}{48}t^5 + \frac{g_3}{60}t^7 + \cdots \\ &= u - \frac{g_2}{240}u^5 - \frac{g_3}{840}u^7 + \cdots\end{aligned}$$

となる. 展開係数が $\mathbb{Q}[g_2,g_3]$ の元であること, $\deg u = -1$, $\deg g_i = 2i$ により $\sigma(u|g_2,g_3)$ は -1 次同次式であることなどもこのような計算で分かる.

さて, 種数 g のリーマン面に対するシグマ関数の表示を作ろうと思うと $\sigma(\sum_{i=1}^{g} u_i)$ のようなものを記述することになる. Weierstrass のシグマ関数に対してはそのような関数を 2

変数の関数 $\sigma(u-v)$ を用いて記述する公式がある．Frobenius-Stickelberger の公式というのがそれで, 少し書き換えると次のようになる:

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(\sum_{i=1}^{N}(u_i-v_i)\right) &= \frac{\prod_{i,j=1}^{N}\sigma(u_i-v_j)}{\prod_{i<j}\sigma(u_i-u_j)\sigma(v_j-v_i)\prod_{i,j=1}^{N}\left(\wp(v_j)-\wp(u_i)\right)}D_N \\
D_N &= \det\left(\wp^{(i-1)}(u_j)\right)_{1\le i,j\le 2N},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ただし D_N において $u_{N+j}=-v_j$, $1\le j\le N$ とおいた．Klein はシグマ関数の高種数への拡張を, (5), (7) を手掛かりに同様の公式を作ることで与えたのである．

3 (n,s)-曲線のシグマ関数

n, s を互いに素な自然数で $s>n\ge 2$ をみたすものとする．このとき

$$f(x,y)=y^n-x^s-\sum_{ni+sj<ns}\lambda_{ij}x^iy^j$$

の形の多項式を考える．$f(x,y)=0$ で定義される代数曲線は非特異であると仮定し, 対応するコンパクトリーマン面を X とする．X を (n,s) 曲線とよぶ．種数は $g=1/2(n-1)(s-1)$ である．

さてシグマ関数を変換性を用いて楕円曲線の場合のように定義しようとするとき必要になるデータは周期である．その周期は勝手ではなく, 変換性が矛盾なく定義出来るようなものでなくてはならない．Weierstrass のシグマ関数の場合, 4 つの周期はルジャンドルの関係式をみたしていた．そのような関係式が必要である．以下で与えるデータの満たす条件は, そのような要請から出てくるものである．

シグマ関数を定義するために以下のようなデータを用意する．

(i) 標準ホモロジー基底 $\{\alpha_i,\beta_j\}$. i.e. 交点数が次を満たす:

$$\alpha_i\cdot\beta_j=\delta_{ij},\quad \alpha_i\cdot\alpha_j=\beta_i\cdot\beta_j=0.$$

(ii) 標準コホモロジー基底 $\{du_i, dr_j\}$.　ただし $\{du_i\}$ は第一種微分の基底, dr_j は第二種微分．条件はコホモロジー $H^1(X,\mathbb{C})$ の交叉型式 $\circ$ について

$$du_i\circ dr_j=\delta_{ij},\quad du_i\circ du_j=dr_i\cdot dr_j=0.$$

このデータを用いて 4 つの周期行列を

$$2\omega_1=\left(\int_{\alpha_j}du_i\right),\quad 2\omega_2=\left(\int_{\beta_j}du_i\right),\quad -2\eta_1=\left(\int_{\alpha_j}dr_i\right),\quad -2\eta_2=\left(\int_{\beta_j}dr_i\right),$$

で定義する. $\{du_i, dr_j\}$ の交叉条件からリーマンの関係式は次の形になる:

$$MJ^tM = -\frac{\pi i}{2}J, \quad M = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

これは

$$^tMJM = -\frac{\pi i}{2}J \tag{8}$$

と同値である. 実際変換性を示すときに使うのはこちらの形である. またリーマンの不等式から

$$\det \omega_1 \neq 0, \quad \mathrm{Im}\tau > 0, \quad \tau = \omega_1^{-1}\omega_2, \tag{9}$$

が成り立つ. ただし >0 は正定値であることを意味する.

次の du_i は第一種微分の基底となる:

$$du_i = -\frac{x^{a_i-1}y^{n-1-b_i}dx}{f_y}, \tag{10}$$

ここで $\{(a_i, b_i)\}$ は

$$1 \leq b \leq n-1, 1 \leq a \leq [\frac{sb-1}{n}],$$

を満たす非負整数の組 (a, b) を $-na_1 + sb_1 < \cdots < -na_g + sb_g$ を満たすように並べたものである. 以下この du_i をデータ (ii) の du_i とする.

X はアフィン代数曲線 $f(x, y) = 0$ に 1 点を付け加えて出来るが, その 1 点を ∞ であらわす. ∞ における gap sequence を $w_1 < \cdots < w_g$ とする.

例

$(n, s) = (2, 2g+1)$: $(w_1, ..., w_g) = (1, 3, ..., 2g-1)$,

$(n, s) = (3, 4)$, $g = 3$: $(w_1, w_2, w_3) = (1, 2, 5)$,

$(n, s) = (4, 5)$, $g = 6$: $(w_1, ...w_6) = (1, 2, 3, 6, 7, 11)$,

変数 u_i の次数を

$$\deg u_i = -w_i$$

で定義する. 基点を ∞ としたときのリーマン定数の指標を

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta' \\ \delta'' \end{bmatrix} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^{2g}$$

とする. du_i を上のように指定したとき, (i), (ii) のデータに対しシグマ関数を次のように定義する [2].

$\boxed{\textbf{定義}}$ 次の条件を満たす関数 $\sigma(u)$ をシグマ関数という.

(i) $\mathbb{C}^g$ 上正則である.

(ii) 次の擬周期性を満たす:

$$\frac{\sigma(u+\ell)}{\sigma(u)} = \chi(\ell)\exp\ L(u+\frac{1}{2}\ell,\ell).$$

ただし

$$\begin{aligned}
&\ell = 2\omega_1\ell' + 2\omega_2\ell'', \quad \ell',\ell'' \in \mathbb{Z}^g,\\
&L(u,v) = (2\eta_1 v' + 2\eta_2 v'')u, \quad v = 2\omega_1 v' + 2\omega_2 v'', v', v'' \in \mathbb{R}^g.\\
&\chi(\ell) = (-1)^{2({}^t\delta'\ell' + {}^t\delta''\ell'') + {}^t\ell'\ell''}.
\end{aligned}$$

(iii) 原点におけるべき級数展開は次の形をしている:

$$\sigma(u) = S_{\lambda(n,s)}(T)|_{T_{w_i}=u_i} + \cdots .$$

ただし $S_{\lambda(n,s)}(T)$ はシューア関数とよばれる $\{T_i\}$ の多項式で, $S_{\lambda(n,s)}(T)|_{T_{w_i}=u_i}$ は $\{u_i\}$ の同次多項式となる. $\cdots$ 部分は $\deg S_{\lambda(n,s)}(T)|_{T_{w_i}=u_i}$ より次数の小さい同次多項式の（無限）和である.

楕円曲線の場合と同様に条件 (i), (ii) を満たす関数はリーマンのテータ関数を用いて簡単に作ることが出来るがそれについては大西さんの原稿を見てください. 条件 (iii) は自明ではなく, Klein の公式の拡張を作ることでシグマ関数の存在が証明される.

先に進む前にここでシューア関数 $S_{\lambda(n,s)}(u)$ についてごく簡単に説明する. 詳しくは [6, 7, 8, 3] などをご覧ください.

T_1, T_2,... の多項式 $p_n(T)$ を

$$\exp(\sum_{n=1}^{\infty} T_n k^n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(T)k^n,$$

で定める.

$$p_0 = 1, \quad p_1 = T_1, \quad p_2 = T_2 + T_1^2/2, \quad p_3 = T_3 + T_1T_2 + T_1^3/6$$

等である. 整数の組 $(\lambda_1,...,\lambda_l)$ が $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 0$ をみたすとき分割という. 分割 λ とその後に 0 を任意個付け加えた分割 $(\lambda_1,...,\lambda_l,0,...,0)$ を同一視し, $\lambda_k = 0$, $k \geq l+1$ と置く. 分割 $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_l)$ に対して T_1, T_2,... の多項式 $S_\lambda(T)$ と t_1, t_2,... の対称多項式 $s_\lambda(t)$ を

$$S_\lambda(T) = \det\left(p_{\lambda_i - i + j}(T)\right)_{1\leq i,j\leq l}, \tag{11}$$

$$s_\lambda(t_1,...,t_n) = \frac{\det(t_j^{\lambda_i+l-i})_{1\leq i,j\leq l}}{\prod_{1\leq i<j\leq l}(t_i - t_j)}, \quad n \geq l \tag{12}$$

により定める．どちらもシューア関数という．2 つのシューア関数は次の関係で結ばれている:

$$S_\lambda(T) = s_\lambda(t_1, ..., t_n), \qquad T_i = \frac{\sum_{j=1}^n t_j^i}{i}. \tag{13}$$

例 $S_{(1)}(T) = T_1, \qquad S_{(2,1)}(T) = \dfrac{T_1^3}{3} - T_3, \qquad S_{(3,2,1)}(T) = \dfrac{1}{45}T_1^6 - \dfrac{1}{3}T_1^3T_3 - T_3^2 + T_1T_5,$

$$s_{(g,g-1,...,1)}(t_1, ..., t_g) = \prod_{i=1}^g t_i \prod_{1\le i<j\le g}(t_i + t_j),$$
$$s_{(g,g-1,...,1)}(t_1, ..., t_{g+1}) = \prod_{1\le i<j\le g+1}(t_i + t_j).$$

これらの例からも見て取れるように, 一般に

$$\deg T_i = -i, \qquad \deg t_i = -1$$

と定めると, $S_\lambda(T)$, $s_\lambda(t)$ はそれぞれの変数に関して $-|\lambda|$ 次の同次多項式になる．ただし $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_l)$ に対し $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l$ とする．ここで次数を負にしたのはシグマ関数との関係でそうしたので, シューア関数のみ論じる分には正にしてもよい（むしろそれが普通である）．

分割 $\lambda(n, s)$ を

$$\lambda(n, s) = (w_g, ..., w_1) - (g - 1, ..., 1, 0).$$

で定める．このとき次が知られている [3]:

命題

(i) $S_{\lambda(n,s)}(T)$ は T_{w_1}, ..., T_{w_g} にしかよらない．

(ii) $\deg S_{\lambda(n,s)}(T) = |\lambda(n, s)| = -\dfrac{1}{24}(n^2 - 1)(s^2 - 1).$

さて標準コホモロジー基底 $\{du_i, dr_j\}$ の dr_j をどうやって具体的に作るかという問題が残っているが, それは Weierstrass の場合の $\widehat{\omega}$ に対応する 2 型式を構成することにより構成される．

$p_i = (x_i, y_i) \in X$, $i = 1, 2$ とし

$$\Omega(p_1, p_2) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_1^i [\frac{f(z,w)}{w^{i+1}}]_+|_{(z,w)=(x_2,y_2)}}{(x_1 - x_2)f_y(p_1)} dx_1,$$

とする．ここで

$$[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n]_+ = \sum_{n\geq 0} a_n w^n.$$

である．これを用いて次のような形の $\widehat{\omega}$ を考える．

$$\widehat{\omega}(p_1,p_2) = d_{p_2}\Omega(p_1,p_2) + \sum_{i=1}^{g} du_i(p_1)dr_i(p_2), \tag{14}$$

ただし dr_i は次の形をしているとする:

$$dr_i = \sum c_{i;jk}\frac{x^j y^k}{f_y}dx.$$

このとき, $\widehat{\omega}(p_1,p_2) = \widehat{\omega}(p_2,p_1)$ が成り立てば, dr_j は ∞ のみに極を持つ第二種微分で, $\{du_i, dr_j\}$ は標準コホモロジー基底となる．このような $\widehat{\omega}$ は $X\times X$ 上の有理型 2 型式で次の性質をみたすものである．

(i) 対角線 $\{(p,p)|p\in X\}$ にのみ 2 位の極をもつ．

(ii) $p\in X$ のまわりの局所座標を t とするとき, (p,p) のまわりでの展開が次の形になる:

$$dt_1 dt_2/(t_1-t_2)^2 + \cdots$$

ただし $\cdots$ 部分は t_1, t_2 の正べきの級数である．

このような $\widehat{\omega}$ は唯一つではないが, その不定性は完全に記述することが出来る．
λ_{ij}, x, y, dx の次数を

$$\deg\lambda_{ij} = ns - ni - sj, \quad \deg x = \deg dx = n, \quad \deg y = s,$$

により定める．

命題 次の条件を満たす $\{dr_j\}$ が存在する．

(i) $\widehat{\omega}(p_1,p_2) = \widehat{\omega}(p_2,p_1)$.

(ii) $c_{i;jk}$ はすべて $\{\lambda_{lm}\}$ の同次多項式である．

(iii) $\deg dr_i = -\deg du_i = w_i$.

この命題を満たす $\{dr_i\}$ は一般には唯一つではないが, 以下この命題の条件を満たす $\{dr_i\}$ を一つ固定し対応する $\widehat{\omega}$ を考える．ほかの $\{dr_i\}$ をとった場合のことはこの場合から分かる．また dr_i や $\widehat{\omega}$ の具体形も, 超楕円曲線の場合や種数の小さいいくつかの場合には知られている．

さてこれから $\widehat{\omega}$ を用いてシグマ関数の代数的表示を作ってゆく．いくつか記号の準備が必要である．

$\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を $\pi(x,y)=x$ で定義する. $p=(x,y)\in X$ に対して

$$\pi^{-1}(x)=\{p^{(0)},p^{(1)},...,p^{(n-1)}\},\qquad p^{(0)}=p$$

とする. $p^{(0)}$ 以外の番号のつけ方は以下で問題にならないので勝手につけてよい.

x^iy^j, $i\geq 0$, $0\leq j\leq n-1$ を次数の小さい順に並べて f_1, f_2,... とする. 最初の 2 つは $f_1=1$, $f_2=x$ である.

まず Weierstrass のシグマ関数の表示 (5) と同様の表示を持つ関数を導入する:

$$\tilde{E}(p_1,p_2)=\frac{x(p_2)-x(p_1)}{\sqrt{f_y(p_1)f_y(p_2)}}\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{p_1^{(i)}}^{p_2^{(i)}}\int_{p_1}^{p_2}\widehat{\omega}\right),$$

この $\tilde{E}(p_1,p_2)$ は p_i が X のサイクルを回るとき, シグマ関数と同じ変換性に従う. 公式 (7) で与えられた処方箋に従って, $N\geq g$ に対してつぎのような関数を考える:

$$M_N=\frac{\prod_{i,j=1}^N\tilde{E}(p_i,q_j)}{\prod_{i<j}\left(\tilde{E}(p_i,p_j)\tilde{E}(q_i,q_j)\right)\prod_{i,j=1}^N(x(p_i)-x(q_j))}.$$

この関数は, シグマ関数と同じ変換性を持つ. あとは X^N 上の適当な有理型関数を掛けて正則になるように出来ればよい. 最終的に次の公式が得られる. $N\geq g$ に対して

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^N\int_{p_i}^{q_i}du\right)=C_N\ M_N\ F_N,$$

ただし $du={}^t(du_1,...,du_g)$ で,

$$\begin{aligned}
F_N &= \frac{D_N}{\prod_{i<j}(x(q_i)-x(q_j))^{n-2}\prod_{k=1}^N\prod_{1\leq j\leq n-1}\left(y(q_k^{(i)})-y(q_k^{(j)})\right)},\\
D_N &= \det\left(f_i(p_j)\right)_{1\leq i,j\leq nN},\\
C_N &= (-1)^{\frac{1}{24}(n^2-1)(s^2-1)+\frac{1}{2}nN(N-1)}\left(\frac{\epsilon(s)}{\epsilon(1)}\right)^N\\
&\quad\times\epsilon_n^{\frac{1}{2}N(N-1)-\frac{1}{4}N(N-1)(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}Nn(n-1)-\frac{1}{2}gNn(n-3)},\\
\epsilon_n &= \exp(2\pi i/n),\qquad \epsilon(r)=\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(\epsilon_n^{ri}-\epsilon_n^{rj}).
\end{aligned}\tag{15}$$

である. D_N の定義式の中で

$$p_{N+(n-1)(k-1)+j}=q_k^{(j)},\qquad 1\leq k\leq N,\quad 1\leq j\leq n-1$$

と置いた.

$(n,s)=(2,2g+1)$ の場合, つまり超楕円曲線の場合は, $F_N=D_N$ となり上の公式は定数倍を除いて Klein の公式 [5, 1] に一致する. この場合 $(x_i,y_i)=(x(p_i),y(p_i))$, $(X_i,Y_i)=(x(q_i),y(q_i))$ と書くと D_N, C_N は

$$D_N=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & & x_N & X_1 & & X_N \\ x_1^2 & & x_N^2 & X_1^2 & & X_N^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^g & & x_N^g & X_1^g & & X_N^g \\ y_1 & & y_N & -Y_1 & & -Y_N \\ x_1^{g+1} & & x_N^{g+1} & X_1^{g+1} & & X_N^{g+1} \\ x_1y_1 & \cdots & x_Ny_N & -X_1Y_1 & \cdots & -X_NY_N \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

$$C_N=(-1)^{\frac{1}{2}g(g+1)+\frac{1}{2}N(N+1)+gN}$$

となる.

すべての $q_i\longrightarrow\infty$ とすることにより $\sigma(\sum_{i=1}^N\int_\infty^{p_i}du)$ の表示を得ることが出来る. $\tilde{E}(p_1,p_2)$ は p_1,p_2 に関して反対称で, $p_1=\infty$ に $g-1$ 位の零点を持つ. そこで ∞ のまわりの局所座標 t を

$$x=\frac{1}{t^n},\qquad y=\frac{1}{t^s}(1+O(t))$$

を満たすようにとり $t_i=t(p_i)$ としたとき

$$\tilde{E}(p_1,p_2)=\tilde{E}(\infty,p_2)t_1^{g-1}+O(t_1^g)$$

により $\tilde{E}(\infty,p)$ を定義する. $\tilde{E}(\infty,p)$ は $\tilde{E}(p_1,p_2)$ のようなきれいな表示を持たないのが難点である. しかし, ともかくこれを用いると次の公式が $N\geq g$ に対して成り立つ.

$$\sigma(\ \sum_{i=1}^N\int_\infty^{p_i}du\ )\ =\ \frac{\prod_{i=1}^N\tilde{E}(\infty,p_i)^N}{\prod_{i<j}\tilde{E}(p_i,p_j)}\ \det(f_i(p_j))_{1\leq i,j\leq N}. \tag{16}$$

右辺を $t_i=t(p_i)$ で展開すると

$$s_{\lambda(n,s)}(t_1,...,t_N)+\cdots$$

の形になる. これを

$$(u_1,...,u_g):=\sum_{k=1}^N\int_\infty^{p_k}du=(\frac{\sum_{j=1}^Nt_j^{w_1}}{w_1},...,\frac{\sum_{j=1}^Nt_j^{w_N}}{w_N})+\cdots$$

により $u_1, ..., u_g$ で書き換えることにより, シグマ関数の定義の中の条件 (iii) がみたされることが示される. また $\sigma(u)$ の展開係数が, $\{\lambda_{ij}\}$ の同次多項式になることもこの公式を用いて $g=1$ の場合と同様にして示される.

参考文献

[1] H. F. Baker, *Abelian functions*, 1897, Cambridge University Press.

[2] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V., Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications, in *Reviews in Math. and Math. Phys.* **Vol.10**, No.2, Gordon and Breach, London, 1997, 1-125.

[3] Buchstaber, V.M., Enolskii, V.Z. and Leykin, D.V., Rational analogue of Abelian functions, *Funct. Annal. Appl.* **33-2** (1999), 83-94.

[4] F. Klein, Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen, *Math. Ann.* **27** (1886),341-464 .

[5] F. Klein, Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen (Zweiter Aufsatz), *Math. Ann.* **32** (1888), 351-380.

[6] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, second edition*, Oxford University Press, 1995.

[7] A. Nakayashiki, On algebraic expressions of sigma functions for (n, s) curves, preprint.

[8] 野海　正俊, パンルヴェ方程式, , 朝倉書店, 2000.

[9] 梅村　浩, 楕円関数論, , 東京出版会, 2000.

[10] E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, 1902.