第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.191-198

Inversions of Abelian Integrals

難波 誠*

1 Weierstrass の楕円関数論の一解釈

Weierstrass の楕円関数論を幾何学的に解釈すると, 次のようになる:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \middle| \omega_2 \neq 0, \mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0 \right\},$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n_1 & n_2 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}) \right\}$$

とおくと, G は $\mathbb{C} \times W$ に行列群として, 真性不連続, かつ固定点なしに作用[1]する. したがって商空間 $(\mathbb{C} \times W)/G$ は複素多様体になる.

$$V = \left\{ \big((x,y),(g_2,g_3)\big) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}^2 \,|\, y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,\ {g_2}^3 \neq 27{g_3}^2 \right\}$$

($(x,y) = (1:x:y)$ は $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の非斉次座標) とおくと, 正則写像

$$\widetilde{\wp} : (z, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C} \times W \mapsto \big((\wp(z), \wp'(z)), (E_2, E_3)\big) \in V$$

($\wp$ は Weierstrass の $\wp$-関数, E_2, E_3 は Eisenstein 級数 $E_2 = E_2(\omega_1,\omega_2)$, $E_3 = E_3(\omega_1,\omega_2)$) は双正則写像

$$(\mathbb{C} \times W)/G \underset{\cong}{\longrightarrow} V$$

を導く. $\widetilde{\wp}$ の逆写像 $\widetilde{\wp}^{-1}$ (多価写像) は次であたえられる:

$$\big((x,y),(g_2,g_3)\big) \in V \mapsto \left(\int_\infty^{(x,y)} \frac{dx}{y}, \left(\int_\beta \frac{dx}{y}, \int_\alpha \frac{dx}{y} \right) \right) \in \mathbb{C} \times W.$$

ここに α, β はトーラス $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ の homology basis で $\alpha \cdot \beta = 1$ (交点数) となるもの.

*追手門学院大学経済学部, 〒 567-8502 茨木市西安威 2–1–15, Email: namba@res.otemon.ac.jp

[1] $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & n_1 & n_2 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ は $(z,(\omega_1,\omega_2))$ に対して $\gamma(z,(\omega_1,\omega_2)) = (z + n_1\omega_1 + n_2\omega_2, (a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2))$ と作用する.

注意 1.1. 楕円曲線のモジュライ理論, テータ関数論は, この理論の「射影化」と解釈できる.

2 周期積分

上の理論の analogy を genus が高い場合に作りたいが, いくつか困難がある. 以下に述べるのは, 困難でない部分だけを取り上げたものである.

$$\mathbb{H}_g = \{A \in \mathrm{GL}(g, \mathbb{C}) |^t A = A, \mathrm{Im}(A) > 0\}$$

($\mathrm{Im}(A) > 0$ は A の虚部が正定値を意味する) を Siegel の上半空間, ($g \geqq 2$).

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_g = \mathbb{H}_g/\mathrm{PSp}(2g, \mathbb{Z}) : \text{主偏極 } g \text{ 次元アーベル多様体のモジュライ空間},\\
&\dim \mathbb{H}_g = \dim \mathbb{A}_g = \frac{g(g+1)}{2},\\
&\mathbb{M}_g = \text{genus } g \text{ の compact Riemannn 面 の moduli space},\\
&\dim \mathbb{M}_g = 3g - 3.
\end{aligned}$$

X を genus g の compact Riemann 面, $J(X)$ をその Jacobi 多様体とする.

<u>Torelli の定理</u>

$$\iota : [X] \in \mathbb{M}_g \mapsto [J(X)] \in \mathbb{A}_g$$

は holomorphic injection である.

注意 2.1. (1) 元の Torelli の定理は「injection である」だが holomorphic injection ($d\iota$ も injective) がわかったのは, そんな昔ではない.
(2) 像 $\iota(\mathbb{M}_g)$ の特長付けは, Schottky の問題とよばれ, 難問だったが, 近年かなりわかってきた.

さて, $g = 2$, $g = 3$ のときは

$$\begin{aligned}
\dim \mathbb{M}_2 = \dim \mathbb{A}_2 = 3,\\
\dim \mathbb{M}_3 = \dim \mathbb{A}_3 = 6
\end{aligned}$$

と一致している.

$\iota(\mathbb{M}_2)$ は $\mathbb{A}_2$ の中の Zariski open set で $\mathbb{A}_2 - \iota(\mathbb{M}_2)$ は elliptic curves の積であるアーベル曲面の locus である. $\iota(\mathbb{M}_3)$ も同様である. この辺りの詳細は, 上野-清水 [2] を参照されたい.

さて

$$\kappa : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{A}_2 = \mathbb{H}_2/\mathrm{PSp}(4, \mathbb{Z})$$

を自然な射影とするとき, $\kappa^{-1}(\iota(\mathbb{M}_2))$ は $\mathbb{H}_2$ の Zariski open set である.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \Omega \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})^2 \middle| \Omega_1 {\Omega_2}^{-1} \in \kappa^{-1}(\iota(\mathbb{M}_2)) \right\}$$

とおく. W は次の写像で $\kappa^{-1}(\iota(\mathbb{M}_2)) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ と双正則で, $\dim W = 7$ である:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \in W \mapsto \begin{pmatrix} \Omega_1 {\Omega_2}^{-1} \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \in \kappa^{-1}(\iota(\mathbb{M}_2)) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}).$$

今

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(5,\mathbb{Z}) \;\middle|\; m = (m_1, m_2),\ n = (n_1, n_2),\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z}) \right\}$$

とおく. G は $\mathbb{C}^2 \times W$ に行列群として, 真正不連続, かつ固有点なしに作用する. したがって $(\mathbb{C}^2 \times W)/G$ は複素多様体である.

$$\begin{aligned} U = \{ & a = (a_0, a_1, \cdots, a_6) \in \mathbb{C}^7 \mid \\ & X_a : y^2 = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6 \text{ が genus 2 の compact Riemann 面} \} \end{aligned}$$

とおく. この条件は, $a_0 \neq 0$ のときは右辺の多項式の判別式がゼロでないことであり, $a_0 = 0$ のときは右辺の 5 次の多項式の判別式がゼロでないことである. $\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$ を $H_1(X_a, \mathbb{Z})$ の symplectic basis ($\alpha_i \cdot \beta_j = \delta_{ij}$) とし, 多価正則写像 (周期積分を用いた周期写像)

$$\Omega : a \in U \mapsto \Omega(a) \in W$$

を考える. ここに

$$\Omega(a) = \begin{pmatrix} \Omega_1(a) \\ \Omega_2(a) \end{pmatrix}, \quad \Omega_1(a) = \begin{pmatrix} \int_{\beta_1} \frac{xdx}{y} & \int_{\beta_1} \frac{dx}{y} \\ \int_{\beta_2} \frac{xdx}{y} & \int_{\beta_2} \frac{dx}{y} \end{pmatrix}, \ \Omega_2(a) = \begin{pmatrix} \int_{\alpha_1} \frac{xdx}{y} & \int_{\alpha_1} \frac{dx}{y} \\ \int_{\alpha_2} \frac{xdx}{y} & \int_{\alpha_2} \frac{dx}{y} \end{pmatrix}.$$

定理 2.2. Ω は次の双正則写像を導く:

$$U \to W/\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z}).$$

系 2.3. $\Lambda = \Omega^{-1} : W \to U$ は, 上への well-defined 正則写像で, $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$-不変かつ双正則写像 $W/\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z}) \cong U$ を導く. さらに Λ は次式を満たす:

$$\Lambda\Big(\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} {}^t A \Big) = \frac{1}{(\det A)^2} R_6(A) \Big(\Lambda \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \Big).$$

ここに $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ で, $R_6(A)$ は A の 6 次既約表現である.

注意 2.4. これと類似の定理が $g=3$ の場合, すなわち非特異平面 4 次曲線の場合もなりたつと考えている.

定理の証明は, 二段に分かれていて, 次の順で行なう.

(1) 各点 $a \in U$ で $(d\Omega)_a$ の rank は 7 である. したがって局所的に双正則である.
(2) 大域的に injective である.

このうち (1) を示すには, $\partial(\dfrac{xdx}{y})/\partial a_j$, $\partial(\dfrac{dx}{y})/\partial a_j$ が第二種アーベル微分 (すなわり留数が各極でゼロになる有理型微分) であることを用いて, de Rham-Hodge の定理を使う. (2) を示すには, (1) と Torelli の定理と, 次の知られていることを用いる:

$$\begin{aligned}
X_a &: y^2 = a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_6,\\
X_b &: y^2 = b_0x^6 + b_1x^5 + \cdots + b_6
\end{aligned}$$

が双正則 $\iff \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ such that

$$\begin{aligned}
x &= \frac{az+b}{cz+d},\\
y &= \frac{w}{(cz+d)^3},\\
a_0 &= b_0p^6 + b_1p^5r + \cdots + b_6r^6,\\
&\cdots\\
a_6 &= b_0q^6 + b_1q^5s + \cdots + b_6s^6.
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}.$$

そしてこのとき

$$\left(\frac{xdx}{y}, \frac{dx}{y}\right) = \left(\frac{zdz}{w}, \frac{dz}{w}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(\det A)$$

という変換則がある.

3 基本アーベル関数

$\mathbb{C}$ 上で考える. $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ を対称積 $\mathrm{S}^n\mathbb{P}^1$ と同一視する. この同一視は, 非斉次座標を用いて,

$$\begin{aligned}
&\pi : (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{P}^1)^n \longmapsto (a_0 : a_1 : \cdots : a_n) \in \mathbb{P}^n,\\
&\frac{a_1}{a_0} = -(x_1 + \cdots + x_n),\\
&\frac{a_2}{a_0} = (x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n),\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\\
&\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n x_1 \cdots x_n
\end{aligned}$$

で与えられる. ($x_1, \cdots, x_n$ のうちの k 個が $\infty \iff a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$.) さて, $f(x, y)$ を規約多項式,

$$\begin{aligned}
&C = \{f(x, y) = 0\} \text{ の } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \text{ での閉包},\\
&\mu : M = \widetilde{C} \longrightarrow C \quad \text{正規化}
\end{aligned}$$

とおく. $\dim C = 1$ なので, 正規化 = 非特異化で, M は compact Riemann 面である. この genus を g とする. M 上の有理型関数の作る体 $\mathbb{C}(M)$ は, 代数関数体 $\mathbb{C}(x, y)$ と一致する. さて, 次の可換 diagram を考える:

$$\begin{tikzcd}
 & M^g \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi"] & C^g \subset (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^g \simeq (\mathbb{P}^1)^g \times (\mathbb{P}^1)^g \arrow[d, "\pi"] & \\
 & \mathrm{S}^g M \arrow[r, "\hat{\mu}"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{P}^g \times \mathbb{P}^g \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
\mathbb{C}^g \arrow[r, "\rho"] & J(M) = \mathbb{C}^g/\Gamma \quad \mathbb{P}^g & & \mathbb{P}^g
\end{tikzcd}$$

ここで, $\mathrm{S}^g M$ は M の g 次対称積, $\hat{\mu}$ は μ より induce された正則写像, π, ρ, π_1, π_2 は自然な射影である. $\hat{\mu}$ は, $\mathrm{S}^g M$ から $\mathbb{P}^g \times \mathbb{P}^g$ への有限正則写像で, しかも generically injective になっている. したがって像 $\hat{\mu}(\mathrm{S}^g M)$ は projective variety で

$$\hat{\mu} : \mathrm{S}^g M \to \hat{\mu}(\mathrm{S}^g M)$$

は双有理な正則写像である. φ は Abel-Jacobi map で, 次で定義される:

$$P_1 + \cdots + P_g \in \mathrm{S}^g M \to \Big(\sum_{i=1}^{g} \int_{P_i^0}^{P_i} \omega_1, \cdots, \sum_{i=1}^{g} \int_{P_i^0}^{P_i} \omega_g \Big) \ (\bmod \Gamma) \in J(M)$$

(Γ : 周期の加群, $P_i^0 + \cdots + P_g^0 = D^0$: 固定因子.) φ は上への双有理正則写像 (Jacobi inversion) で, $J(M)$ の各元の逆像は, 完備な一次系になっている (Abel の定理). さて, 上への有理型写像

$$\wp^x : \mathbb{C}^g \dashrightarrow \mathbb{P}^g, \quad \wp^y : \mathbb{C}^g \dashrightarrow \mathbb{P}^g$$

を

$$\wp^x = \pi_1 \circ \hat{\mu} \circ \varphi^{-1} \circ \rho, \quad \wp^y = \pi_2 \circ \hat{\mu} \circ \varphi^{-1} \circ \rho$$

で定義する. $\mathbb{P}^g$ の斉次座標を用いて

$$\wp^x(z) = (1 : \xi_1(z) : \cdots : \xi_g(z)), \quad \wp^y(z) = (1 : \eta_1(z) : \cdots : \eta_g(z))$$

とおくと, $\xi_1(z)$, $\cdots$, $\xi_g(z)$, $\eta_1(z)$, $\cdots$, $\eta_g(z)$ はアーベル関数で, これらが Riemann の基本アーベル関数である岩澤 ([1]). 上に述べた事から, ただちに

$$\mathbb{C}(J(M)) = \mathbb{C}\big(\xi_1(z), \cdots, \xi_g(z), \eta_1(z), \cdots, \eta_g(z)\big)$$

がわかる. これら $\xi_1(z)$, $\cdots$, $\xi_g(z)$, $\eta_1(z)$, $\cdots$, $\eta_g(z)$ の間の基本関係式は

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) = 0,\ \cdots,\ f(x_g, y_g) &= 0, \\ \xi_1 &= -(x_1 + \cdots + x_g), \\ &\cdots\cdots \\ \xi_g &= (-1)^g\, x_1 \cdots x_g, \\ \eta_1 &= -(y_1 + \cdots + y_g), \\ &\cdots\cdots \\ \eta_g &= (-1)^g\, y_1 \cdots y_g \end{aligned}$$

より x_1, $\cdots$, x_g, y_1, $\cdots$, y_g を消去して得られる. (一般に, この計算はめんどうである.)

4 $g = 2$ の場合の基本アーベル関数

$g = 2$ の場合は, 計算が実行できる: $a = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ を固定し, 二つの方程式

$$\begin{aligned} {y_1}^2 &= a_0 {x_1}^6 + a_1 {x_1}^5 + \cdots + a_5 x_1 + a_6 \\ {y_2}^2 &= a_0 {x_2}^6 + a_1 {x_2}^5 + \cdots + a_5 x_2 + a_6 \end{aligned}$$

を辺々加え, または掛ける. それらを

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -(x_1 + x_2), \quad \xi_2 = x_1 x_2 \\ \eta_1 &= -(y_1 + y_2), \quad \eta_2 = y_1 y_2 \end{aligned}$$

であらわす:

$$\begin{aligned} {\eta_1}^2 - 2\eta_2 = a_0&({\xi_1}^6 - 6{\xi_1}^4\xi_2 + 9{\xi_1}^2{\xi_2}^2 - 2{\xi_2}^3) \\ &+ a_1(-{\xi_1}^5 + 5{\xi_1}^3\xi_2 - 5\xi_1{\xi_2}^2) \\ &+ a_2({\xi_1}^4 - 4{\xi_1}^2\xi_2 + 2{\xi_2}^2) \\ &+ a_3(-{\xi_1}^3 + 3\xi_1\xi_2) \\ &+ a_4({\xi_1}^2 - 2\xi_2) + a_5(-\xi_1) \\ &+ 2a_6, \end{aligned} \tag{1}$$

$$(2)\qquad {\eta_2}^2 = {a_6}^2{\xi_2}^6 + a_0 a_6 {\xi_2}^5(-\xi_1) + \cdots + a_5 a_6(-\xi_1) + {a_6}^2.$$

これら (1), (2) が $\xi_1(z)$, $\xi_2(z)$, $\eta_1(z)$, $\eta_2(z)$ の間の基本関係式である. なお, (1), (2) は (上の記号で) $\hat{\mu}(\mathrm{S}^2M)$ の $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ における定義方程式でもある.

$\wp^x$, $\wp^y$ を有理 (型) 写像

$$\wp^x : J(M) \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$
$$\wp^y : J(M) \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

を見ると, これらは surjective で, (1), (2) によりその mapping degree は, それぞれ 4, 12 になっている.

また (1) より η_2 は ξ_1, ξ_2, η_1 の多項式であらわされるので

$$\mathbb{C}(J(M)) = \mathbb{C}\big(\xi_1(z), \xi_2(z), \eta_1(z)\big)$$

であり, $\xi_1(z)$, $\xi_2(z)$, $\eta_1(z)$ の間の基本関係式はその多項式を (2) に代入することにより得られる.

偏導関数 $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial z_1}$ 等も $J(M)$ 上の有理型関数 (アーベル関数) なので, $\xi_1(z)$, $\xi_2(z)$, $\eta_1(z)$, $\eta_2(z)$ の有理式で書けるはずである. 実際, 上記の可換 diagram を用いて

$$d\wp^x = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial z_2} \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial z_2} \end{pmatrix}$$

を計算すると

$$d\wp^x = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1} & \dfrac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} \\ \dfrac{{x_2}^2 y_1 - {x_1}^2 y_2}{x_2 - x_1} & \dfrac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1} \end{pmatrix}$$

となる. 各成分の分母, 分子に $y_1 + y_2 = -\eta_1$ をかけると, それらは ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 であらわされ, 結局

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \xi_2}{\partial z_2} = \frac{1}{\eta_1}\big\{&\eta_2 - a_0({\xi_1}^4\xi_2 - 3{\xi_1}^2{\xi_2}^2 + {\xi_2}^3) \\ &+ a_1({\xi_1}^3\xi_2 - 2\xi_1{\xi_2}^2) - a_2({\xi_1}^2\xi_2 - {\xi_2}^2) + a_3\xi_1\xi_2 - a_4\xi_2 + a_6\big\} \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial z_2} = \frac{1}{\eta_1}\big\{&a_0(-{\xi_1}^5 + 4{\xi_1}^3\xi_2 - 3\xi_1{\xi_2}^2) \\ &+ a_1({\xi_1}^4 - 3{\xi_1}^2\xi_2 + {\xi_2}^2) + a_2(-{\xi_1}^3 + 2\xi_1\xi_2) \\ &+ a_3({\xi_1}^2 - \xi_2) - a_4\xi_1 + a_5\big\} \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \xi_2}{\partial z_1} = \frac{1}{\eta_1}\big\{&\xi_1\eta_2 - a_0({\xi_1}^3{\xi_2}^2 - 2\xi_1{\xi_2}^3) + a_1({\xi_1}^2{\xi_2}^2 - {\xi_2}^3) \\ &- a_2\xi_1{\xi_2}^2 + a_3{\xi_2}^2 - a_5\xi_2 + a_6\xi\big\} \end{aligned}$$

がえられる. $\dfrac{\partial \eta_1}{\partial z_1}$ 等の方は, より複雑であるが, 同様に得られる.

(4) より η_1 が $\xi_1, \xi_2, \dfrac{\partial \xi_1}{\partial z_2}$ で逆に解け, 従って

$$\mathbb{C}(J(M)) = \mathbb{C}\big(\xi_1(z), \xi_2(z), \frac{\partial \xi_1}{\partial z_2}(z)\big)$$

となっている.

加法定理も, 複雑な式になるが計算できる.

以上の議論において, 我々は $a = (a_0, \cdots, a_6)$ を固定し, 固定された

$$X_a = M : y^2 = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6$$

についての $J(M)$ 上のアーベル関数を議論してきた. 次に a を動かすことを考える. その場合は積分の始点となる因子 $D^0 = P_1^0 + P_2^0$ は $\infty_1 + \infty_2$ と取る. (∞_1, ∞_2 は無限遠点 $(\infty, \infty) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に対応する M の点.) そして, アーベル積分とその逆写像を考えるのである.

5 まとめ

以上から $g = 2$ の場合は, 有理型写像

$$(\wp^x, \wp^y, \Lambda) : \mathbb{C}^2 \times W \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times U$$

とその像が, §2 の群 G による商多様体 $(\mathbb{C}^2 \times W)/G$ を「おおよそ」実現していると考えられる.

文 献

[1] 岩澤健吉 : 代数函数論, 岩波書店, 1952

[2] 上野健爾・清水勇二 : モジュライ理論 3, 岩波書店, 1999