第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.247-264

Algebraic Theory of Abelian Varieties via Schemes

小林真一*

1 前書き

この講演では Mumford の Abelian varieties [Mum] の２章 Algebraic theory via varieties と３章 Algebraic theory via schemes について解説する. 内容はアーベル多様体の純代数的な取り扱いについてである. これにより基礎体の標数が正の場合にもアーベル多様体が扱える.

さてこの講演のタイトルは Mumford の本の３章の名前だったのだが, ２章の内容に重点をおき紹介する. そういう意味ではタイトルに偽りありである. しかし内容やアイデアを理解するには２章で十分で, via varieties といっておきながらも, ２章でも scheme 論の強力な定理や道具たちをフル活用するので, 抽象代数幾何的方法を味わうには十分である.

この講演では line bundle が頻出し, 内容は line bundle の研究といってもよいので, これらに馴染みがないとつらいのだが, よく知られているように複素トーラスの line bundle の section は, 複素一意化により theta 関数と思える. したがって line bundle やその section が出てきたら theta 関数が代数的に登場していると思うと理解の助けになるかもしれない. またこの講演では invertible sheaf と line bundle を同一視する. 実際ほとんどの場合 sheaf と思っている.

前書きの最後にアーベル多様体の基本文献について述べておく. Mumford [Mum] の他には, 古典として Lang [L] がよく知られているが, スキームではなく Weil の Foundation の言葉で書かれている. 現代的な解説としては Arithmetic Geometory という本の中で, Milne が書いたもの [Mil1] もよく知られている. また彼の Web page に Lecture Note [Mil2] もおいてある ([Mil1] とは異なる.) 最近の本としては Polishchuk [Pol] がある. また Van der Geer と Moonen が最近アーベル多様体の本を書いており, Geer の Web page に書きかけの draft [GM] (かなりの章が完成しているようにみえる) があり, おもしろい. Mumford [Mum] の他にこれらも参考にしていただけたらと思う.

前書きの最後に, 講演機会をくださった岩手大学の大西良博さんに感謝致します.

*名古屋大学大学院多元数理科学研究科

2　アーベル多様体の基本的な性質と Cube の定理

2.1　アーベル多様体の定義

k を代数閉体とする. k 上の完備 (complete, つまり k 上 proper) な代数多様体 X(integral, separated, finite type over k) と, 群の公理の条件をみたす "２項演算 morphism" , "単位元", "逆元をとる morphism"

$$m : X \times X \to X, \quad e \in X, \quad i : X \to X$$

が与えられているとき, X とその演算の組をアーベル多様体という. ここでは２項演算の可換性は仮定してないが, 下ですぐに見るように, 自動的に可換になるので, m を $+$, e を 0, i を $(-1)_X$ または単に $-$ と書くことにする.

X には群演算があるので X はもしある一点で non-singular だったら平行移動により他の任意の点でも non-singular. X は variety なので必ず non-singular な点はあるから X は non-singular であることがわかる.

次の基本的な補題を使うと演算も自動的にアーベルになることがわかる. ここでは完備であることが非常に効いている. これ以外にも完備性 (compact 性と思ってよい) は群演算をもつ多様体に非常に強い制約を与える. たとえばあとでみるように X は射影多様体になる.

Lemma 2.1 (Rigidity の補題) X を完備代数多様体, Y, Z を任意の代数多様体とする. ここで *morphism*$f : X \times Y \to Z$ がある $y \in Y$ に対し, $X \times \{y\}$ を一点 z_0 につぶすと仮定する. このとき f はある写像 $g : Y \to Z$ と *projection* $p_2 : X \times Y \to Y$ の合成である.

証明　任意の $x_0 \in X$ をとって $g(y) = f(x_0, y)$ とおく. $X \times Y$ の既約性より, これが求める性質をもつことは f と $g \circ p_2$ が空でない開集合上一致することを示せばよい. U を z_0 を含むアフィン開集合とし, このとき X の完備性より p_2 が閉写像であることを使うと, ちょっとした集合論的な議論により Y の空でない開集合 V をとって f が写像 $X \times V \to U$ を引き起こすようにできる. ここで任意の $y \in V$ に対し, 完備な代数多様体は $X \times \{y\}$ はアフィン多様体 U におくられることになるので $f|_{X \times \{y\}}$ は定数写像. これより $(x, y) \in X \times V$ に対し $f(x, y) = f(x_0, y) = g \circ p_2(x, y)$. □

この補題より, 原点を固定する morphism は必ず群の homomorphism になることがわかる. 実際 $f(x+y) - f(y) - f(x)$ (正確には $f(x \cdot y) \cdot f(y)^{-1} \cdot f(x)^{-1}$ と書いた方がよいかもしれない) に Rigidity の補題を適用すればよい. 演算がアーベルであることは逆元をとるという写像は原点を固定するので homomorphism になることからわかる.

これらの性質は簡単に導けたが, たとえば等分点の構造などアーベル多様体の基本的な性質を導くためには, 次の節でみるシーソーの定理や Cube の定理などのツールが必要になる.

2.2　Cube の定理とその応用

アーベル多様体を研究する上での基本的なツールは次のものがある.

Theorem 2.2 (シーソーの定理) X を完備代数多様体. T を任意の代数多様体. $\mathscr{L}$ を $X \times T$ 上の *line bundle* とする. このとき集合

$$T_1 = \{t \in T \mid \mathscr{L}\,|_{X\times\{t\}} \text{は } \textit{trivial line bundle} \text{ と同型}\}$$

は T の閉集合. そしてある T_1 上の *line bundle* $\mathscr{M}$ があって

$$p_2^*\mathscr{M} = \mathscr{L}\,|_{X\times T_1}.$$

ここで p_2 は *second projection* $X \times T_1 \to T_1$.

Theorem 2.3 (Cube の定理) X, Y を完備代数多様体. Z を任意の代数多様体. x_0, y_0, z_0 をそれぞれ X, Y, Z の点とする. このとき $X \times Y \times Z$ 上の *line bundle* $\mathscr{L}$ が *trivial* になるための必要充分条件は次の３つの *line bundle* がすべて *trivial* になることである.

$$\mathscr{L}\,|_{\{x_0\}\times Y\times Z},\quad \mathscr{L}\,|_{X\times\{y_0\}\times Z},\quad \mathscr{L}\,|_{X\times Y\times\{z_0\}}$$

これらの定理の応用としてただちに次のことがわかる.

Corollary 2.4 X を代数多様体, Y をアーベル多様体とし, *3* つの *morphism* $f, g, h : X \to Y$ を考える. このとき $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(Y)$ に対し,

$$(f+g+h)^*\mathscr{L} \cong (f+g)^*\mathscr{L} \otimes (g+h)^*\mathscr{L} \otimes (h+f)^*\mathscr{L} \otimes f^*\mathscr{L}^{-1} \otimes g^*\mathscr{L}^{-1} \otimes h^*\mathscr{L}^{-1}.$$

証明　下のダイヤグラムより $X = Y \times Y \times Y$ で f, g, h は projection である場合に示せば十分.

$$\begin{tikzcd} & & Y \\ X \arrow[r, "f\times g\times h"] & Y\times Y\times Y \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[dr, "p_3"] & Y \\ & & Y \end{tikzcd}$$

この場合は左辺と右辺の line bundle の商は $x_0 = y_0 = z_0$ を Y のゼロ元として Cube の定理の仮定を満たすことがただちにわかる. したがって trivial. □

Remark 2.5 Y が楕円曲線 E, $X = E \times E \times E$, f, g, h が *projection* とし, $\mathscr{L}$ が原点がつくる *divisor*[0] に対応する *line bundle* $\mathcal{O}_E([0])$ とする. このとき上の系は E の *Weierstrass* σ-関数に対し, 関数

$$\frac{\sigma(z+y+w)\,\sigma(z)\,\sigma(y)\,\sigma(w)}{\sigma(z+w)\,\sigma(y+w)\,\sigma(w+z)}$$

が $E \times E \times E$ 上 *rational,* つまりそれぞれの変数に対し２重周期関数であるというよく知られた事実に他ならない. *(*σ は $\mathscr{L}$ の *(*定数倍をのぞいて*)* 唯一の *global section* に対応しており*, line bundle* が *trivialize* されると普通の *rational function* になる. *)*

Remark 2.6 この系はいわゆる *theta* 関数の *cubical structure* というものを与える *(Breen [Br]).* また *Barsotti, Cristante* の代数的 *(*ベキ級数*)theta* 関数の理論で本質的な役割を果たす *([Bar], [Cri1], [Cri2], [CC]).* つまり Y 上の *line bunde* の *section* から上のようにして *projection* により $Y\times Y\times Y$ 上に引き戻すことで*, line bundle* を *trivialize* し*, rational function* を取り出す*.* この $3dimY$-変数関数を適当な条件下 *(ordinary* など*)* で代数的に *split* させて Y 上の *theta* 関数を取り出す*. (Mazur-Tate* の p*-adic theta* 関数 *[MT]* もこのようにして作ることができる*.)*

Corollary 2.7 X をアーベル多様体*,* n を整数*.* このとき $\mathscr{L}\in\mathrm{Pic}(X)$ に対し*,*

$$n_X^*\mathscr{L}\cong\mathscr{L}^{\otimes\frac{n(n+1)}{2}}\otimes(-1)_X^*\mathscr{L}^{\otimes\frac{n(n-1)}{2}}.$$

証明　上の系において, $X=Y$, $f=(n+1)_X$, $g=1_X$, $h=(-1)_X$ として $(n+2)_X^*\mathscr{L}$, $(n+1)_X^*\mathscr{L}$, $n_X^*\mathscr{L}$ に関する 3 項間の関係式を得る. $n=0,1$ のときは自明だから, 帰納法が成立. □

Intersection theory や line bundle の degree の理論と後で示す ample line bundle の存在を認めると, 上の系からアーベル多様体の n 倍写像の degree が $n^{2\dim X}$ であることがわかる. (degree はその morphism から生じる関数体の拡大の拡大次数.) 実際, D を ample で symmetric ($(-1)^*D=D$) な divisor とする. (たとえば D が ample なら $(-1)^*D+D$ は ample symmetric.) D は symmetric だから上の系より $n_X^*\mathscr{L}\cong\mathscr{L}^{n^2}$ がわかる. このとき Intersection theory から $g=\dim X$ 個の D の self-intersection に関して

$$(\deg n_X)(D,\dots,D)_X=(n_X^*D,\dots,n_X^*D)_X=n^{2g}(D,\dots,D)_X.$$

または line bundle の degree の理論を使うと,

$$n^{2g}\deg\mathscr{L}=\deg\mathscr{L}^{n^2}=\deg(n_X^*\mathscr{L})=\deg n_X\cdot\deg\mathscr{L}.$$

ample 性は $(D,\dots,D)_X$, $\deg\mathscr{L}$ が zero でないことを保証する.

n 倍写像の degree が n^{2g} であることがわかると, 楕円曲線のときと同じような簡単な議論で X の n 等分点がなす群の構造がわかる. (n のすべての約数 d に関しても degree が d^{2g} であることが効く.)

Theorem 2.8 k の標数を p*,* $\dim X=g$ とおく*.*
i) $\deg n_X=n^{2g}$*.*
ii) n が p と素ならば*,* $X_n=\mathrm{Ker}\,n_X=(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$*.*
iii) ある自然数 $0\le i\le g$ があって $X_{p^n}=(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^i$*.*

次の定理は様々な応用上 (双対アーベル多様体の構成, Weil pairing の構成など) 非常に重要である.

Theorem 2.9 (正方形定理) X をアーベル多様体, x, y を X の点とする. このとき $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ に対し,

$$T_{x+y}^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L} \cong T_x^*\mathscr{L} \otimes T_y^*\mathscr{L},$$

あるいは

$$T_{x+y}^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \cong (T_x^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}) \otimes (T_y^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}).$$

ここで T_x は x をたすという平行移動 $X \to X, y \mapsto y + x$.

証明 系 2.4 において, $X = Y$, f をすべての点を x におくるという定数写像, g をすべての点を y におくるという定数写像, h を identity として適用すればよい. $T_x = \mathrm{id} + f$ に注意. □

ここで次の重要な (抽象群としての) 写像を定義する.

Definition 2.10 アーベル多様体 X 上の *line bundle* $\mathscr{L}$ に対し, 写像 $\phi_{\mathscr{L}}$ を次で定義する.

$$\phi_{\mathscr{L}}: \quad X \longrightarrow \mathrm{Pic}(X), \qquad x \longmapsto T_x^*\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}.$$

正方形定理より $\phi_{\mathscr{L}}$ は群の *homomorphism* になる. $\phi_{\mathscr{L}}$ が自明な写像になるような $\mathscr{L}$ の集合を $\mathrm{Pic}^0(X)$ とおく. このときやはり正方形定理より $\phi_{\mathscr{L}}$ の像は $\mathrm{Pic}^0(X)$ に含まれる.

Remark 2.11 楕円曲線 E の場合, $\mathscr{L} = \mathcal{O}_E([0])$ として, *linear equivalence* $\sim$ に対し

$$\phi_{\mathscr{L}}: E \to \mathrm{Pic}^0(E) = \mathrm{Div}^0(E)/\sim, \quad P \mapsto [P] - [0] \text{ の } \textit{class}.$$

双対アーベル多様体の節で, 実は $\phi_{\mathscr{L}} : X \to \mathrm{Pic}^0(X)$ は全射になることをみる. ここではまず $\phi_{\mathscr{L}}$ の核の性質を調べる.

Definition 2.12 $K(L) = \mathrm{Ker}\ \phi_{\mathscr{L}} = \{x \in X \mid T_x^*\mathscr{L} \cong \mathscr{L}\}$

$\phi_{\mathscr{L}}$ は単なる抽象群の写像として定義したので, 次は非自明である.

Proposition 2.13 $K(L)$ は X の *Zariski* 閉部分集合.

証明 閉集合であること以外は自明. 閉集合であることは $X = T$ として $X \times T$ 上の line bundle $m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}$ に対しシーソーの定理を使えばよい. □

次の命題はアーベル多様体の射影埋め込みを与える.

Proposition 2.14 D をアーベル多様体の *effective divisor.* $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(D)$ とおく. このとき次は同値.

i). X の部分群 $H = \{x \in X \mid T_x^*D = D\}$ は有限. *(divisor class* ではなく *divisor* としての等号.*)*

ii). $K(\mathscr{L})$ は有限.

iii). linear system

$$|2D| = \{D_0 \mid D_0 \text{ は } \textit{effective} \text{ で } D_0 \sim 2D\}$$

は *base point* をもたなく, それから誘導される $X \to \mathbb{P}^N$ *(*$N = \dim\Gamma(X, \mathscr{L}) - 1$*)* は *finite morphism.*

iv). $\mathscr{L}$ は *ample.*

Remark 2.15 おおざっぱなイメージとしては, *linear system* $|D|$ は $\mathcal{O}_X(D)$ に付随する正則 *theta* 関数の *divisor* になるものたち. *base point* がないとは $\mathcal{O}_X(D)$ に付随する正則 *theta* 関数たちは共通零点をもたないということ. したがって $\Gamma(X, \mathscr{L})$ の基底をつくる *theta* 関数 *(section)* たちを射影座標にならべて *morphism* $X \to \mathbb{P}^N$ を作ることができる. *(*古典的な *theta* 関数による射影埋め込み.*)* これらの正確な *scheme theoretic* な扱いや任意のスキーム X に一般化したものは *Hartshorne §7, Chapter II* にある.

$\mathscr{L}$ が *ample* とは非常に大雑把にいうと *global section* が十分にあるということ. $\mathscr{L}$ が *ample* になるための必要十分条件はある自然数 n があって $\mathscr{L}^n$ は *base point* がなくそこから誘導される $X \to \mathbb{P}^N$ が *closed immersion* になることである *(Hartshorne §7, Chapter II.)*

証明 iii) ⇒ iv) は一般論. Serre の ample 性に関するコホモロジカルな判定法により, finite morphism による pull back で ample 性は保たれるから (Hartshorne, ex 5.7, Chapter III.)

iv) ⇒ ii) を示す. 完備代数多様体 X の Zariski 閉集合 $K(\mathscr{L})$ が有限でないとすると, 0 を含む連結成分 Y は positive な次元をもつアーベル多様体になる. このとき $\mathscr{L}$ の Y への制限 $\mathscr{L}_Y$ も ample. $Y \subset K(\mathscr{L})$ よりシーソーの定理から $m^*\mathscr{L}_Y \otimes p_1^*\mathscr{L}_Y^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}_Y^{-1}$ は trivial であることがわかる. これから $\mathscr{L}_Y \otimes (-1)_Y * \mathscr{L}_Y$ も trivial であることがわかる. しかし $\mathscr{L}_Y$ が ample だからこの Y の trivial bundle も ample. これは次元が 0 でないと起こりえない.

ii) ⇒ i) は自明.

i) ⇒ iii) を示す. base point がないことは $T_x^*D + T_{-x}^*D \in |2D|$ をみることでわかる. なぜなら任意の $u \in X$ に対し, $\mathrm{Supp}D \pm u$ は codimension 1 なので $u \pm x \notin \mathrm{Supp}D$ となる x がとれる. したがって $u \notin T_x^*D + T_{-x}^*D$. これより basis $s_1, \ldots, s_{N+1} \in \Gamma(X, \mathscr{L})$ を $\mathbb{P}^N$ の座標にならべて $f : X \to \mathbb{P}^N$ を作れる. つまり $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = \mathscr{L}$ で $f^*z_i = s_i$ となるように作れる. ここで z_i は $\mathbb{P}^N$ の i-座標関数が定める section. f が finite でなかったとしよう. このとき X に含まれる曲線 C で f で一点 $z \in \mathbb{P}^N$ につぶれるものがある. ここで任意の $D' \in |2D|$ に対して, D' は $f(D')$ が z を含むかどうかに応じて $C \subset D'$ または $C \cap D' = \emptyset$ である. 実際, $\Gamma(X, \mathscr{L})$ の basis の取り方で $f : X \to \mathbb{P}^N$ は単に $\mathbb{P}^N$ の自己同型だけ違うだけだから, 最初から D' は section s_1 の zero-divisor としてよい. このとき $x \in D'$ であるための必要十分条件は $f(x)$ の第一成分が 0 である. これから z の第一成分が 0 かどうかに応じて $C \subset D'$ または $C \cap D' = \emptyset$ である. したがってある $x \in X$ に対し, C と $T_x^*D + T_{-x}^*D$ は disjoint である. (上でみたようにこの形の divisor たちは base point をもたないから.) E をこのような $T_x^*D + T_{-x}^*D$ の既約成分とする. i) の条件より $T_xE = E$ となる無限個の x を構成すればよい. X の元で C の 2 つの元の差として表されるものに対してはこれが成り立つことを示す.

任意の x に対し, T_x^*E と E は同じ degree で C に制限しても同じ degree だが, E と C は交わらないので degree 0. ところが $T_x^*E|_C$ は non-negative divisor なので全体か空集合でなけ

ればならない. これから任意の x に対し $T_x^*(C) \subset E$ または $T_x^*C \cap E = \emptyset$ がわかる. ここで $c_1, c_2 \in C, u \in E$ に対し, $u \in T_{u-c_2}^*(C) \cap E$ なので $T_{u-c_2}^*(C) \cap E$ は空ではなく, したがって $T_{u-c_2}^*(C) \subset E$. とくに $u - c_2 + c_1 \in E$. ここで $u \in E$ は任意なので $T_{c_1-c_2}^*E \subset E$. 次元と既約性より $T_{c_1-c_2}^*E = E$. □

Corollary 2.16 アーベル多様体は射影的.

証明 U を X のアフィン開集合とする. X は完備代数多様体なのでよく知られているように補集合 $D = X - U$ は divisor になる. (任意の点 $P \in X - U$ に対し, U で正則で P では定義されないような有理関数 (関数体の元) がとれる. したがってこの関数体の元の極 divisor D は 作り方から $P \in D \subset X - U$. したがって $X - U$ は divisor の合併.) D は ample になることを示す. 平行移動で $0 \in U$ としてよい. もし $T_x^*D = D$ とすると $T_x^*U = U$ で $0 \in U$ だから $x \in U$. したがって完備な $K(\mathscr{L})$ がアフィン開集合 U に含まれることになるので, $K(\mathscr{L})$ は有限集合でなければならない. ゆえに上の命題から ample であることがわかる. □

2.3 Cube の定理の証明

シーソーの定理, Cube の定理の証明に使われるのは, 次の Grothendieck による上半連続定理である.

Theorem 2.17 *$f : X \to Y$ を Noether スキームの proper morphism とする. また $\mathscr{F}$ を X 上の coherent sheaf で Y 上 flat なものとする. このとき次が成り立つ.*
a) 任意の整数 $p \geq 0$ に対し, 次の関数

$$Y \to \mathbb{Z}, \qquad y \;\mapsto\; \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$$

は *upper-semicontinuous (*任意の自然数 n に対し $[n, \infty) \cap \mathbb{Z}$ の逆像が閉集合*.)*
b) 関数

$$Y \to \mathbb{Z}, \qquad y \;\mapsto\; \chi(\mathscr{F}_y) := \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$$

は Y 上局所定数.
c) もし Y が *reduced* かつ *connected* ならば次の *i), ii)* は同値.
i) $Y \to \mathbb{Z},\ y \;\mapsto\; \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$ は定数関数.
ii) $R^p f_* \mathscr{F}$ は Y 上の *locally free sheaf* で, 任意の $y \in Y$ に対し, 自然な写像

$$R^p f_* \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \;\longrightarrow\; H^p(X_y, \mathscr{F}_y)$$

は同型. またもしこの同値な条件がみたされるならば任意の $y \in Y$ に対し, 次も同型

$$R^{p-1} f_* \mathscr{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \;\longrightarrow\; H^{p-1}(X_y, \mathscr{F}_y).$$

シーソーの定理の証明 : 一般に完備代数多様体 X とそれ上の line bundle $\mathscr{L}$ が trivial になるための必要十分条件は

$$\dim_k \Gamma(X, \mathscr{L}) \geq 1 \quad \text{かつ} \quad \dim_k \Gamma(X, \mathscr{L}^{-1}) \geq 1.$$

なぜならば上の条件が満たされると, non-zero な $\mathcal{O}_X$-module の homomorphism

$$\rho : \quad \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

がある. ρ による 1 の行き先は $\mathcal{O}_X$ の non-zero section だから X が proper なことより定数 $(\neq 0)$. これよりこの写像は (non-zero な) 定数倍. 従って上の 2 つの射は全部同型.

この判定法と上半連続定理より T_1 が閉集合であることがわかる. 最後のパートは T と T_1 を入れ替えて $T = T_1$ とすると (ただし T はもはや代数多様体ではなく単なる k 上 finite な reduced scheme), 任意の $t \in T$ に対し $\mathscr{L}\,|_{X\times\{t\}}$ は trivial で

$$\dim_{k(t)} H^0(X \times \{t\}, \mathscr{L}\,|_{X\times\{t\}}) = 1.$$

よってやはり上半連続定理より $\mathscr{M} = p_{2*}\mathscr{L}$ は invertible sheaf で

$$\mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} k(t) \to H^0(X \times \{t\}, \mathscr{L}\,|_{X\times\{t\}})$$

は同型. $\mathscr{L}\,|_{X\times\{t\}}$ が trivial であることを使うと自然な射 $\varphi : p_2^*\mathscr{M} \to \mathscr{L}$ は $X \times \{t\}$ 上では trivial sheaf の射 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$. この射は global section では上の同型を引き起こすので zero ではない. これより任意の $t \in T$ に対し φ は $X \times \{t\}$ 上では同型. これより中山の補題から φ は全射, 従って (invertible sheaf 間の射なので) 同型であることがわかる. □

Cube の定理の証明 :

Lemma 1. シーソーの定理より任意の $x \in X$, $z \in Z$ に対し, $\mathscr{L}$ が $\{x\} \times Y \times \{z\}$ 上で trivial をいえばよい. (シーソーより下図の line bundle $\mathscr{M}$ が存在し, $\mathscr{L}|_{X\times\{y\}\times Z}$ が trivial だから $\mathscr{M}$ も trivial.)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{L} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & {}^{\exists}\mathscr{M} \arrow[d] \\
X \times Y \times Z \arrow[r, "p_{13}"] & X \times Z \\
X \times \{y\} \times Z \arrow[u] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Lemma 2. X は non-singular curve としてよい.
なぜならば x と x_0 を結ぶ X の curve C' をとる. (例えば Chow の補題を使って X が projective な場合に帰着し, Bertini の定理などを使って x, x_0 を通る超平面で X を切断して C' を得る.)　$C \to C'$ を normalization とすれば写像

$$\{x\} \times Y \times \{z\} \to C \times Y \times Z \to X \times Y \times Z$$

を得る. Step 1 より $\mathscr{L}|_{C\times Y\times Z}$ が trivial を言えばよいから. ($C\times Y\times Z$ 上で Cube の定理の仮定も満たされている.)

Lemma 3. Z を z_0 を含む空でない開集合 Z' に取り替えてもよい.
シーソーより $\mathscr{L}|_{X\times Y\times\{z\}}$ が trivial なるような z 達は閉集合だから, Z の既約性より開集合 Z' を含めば全体 Z に一致するから.

Key idea. 簡単のため $(y,z)\in Y\times Z$ に対し $\mathscr{L}|_{X\times\{y\}\times\{z\}}$ を $\mathscr{L}_{(y,z)}$ と書く. Cube の定理を証明するためには, $\mathscr{L}_{(y,z_0)}$ の自明性から $\mathscr{L}_{(y,z)}$ の自明性を導けばよい. (このとき Lemma 1 と同じで $\mathscr{L}$ 自身が trivial になる.) 方法は上半連続定理で, とくに c) の ii) の部分から $p=0$ に対し $\mathscr{L}_{(y,z_0)}$ と $\mathscr{L}_{(y,z)}$ を fibre として結びつける $p_{23*}\mathscr{L}$ を使って自明性を導きたい. そのためには $p=0$ に対し c) の i) が成り立つことを示さないといけないが, これを直接示すのは難しい. しかし上半連続定理の b) で Euler 指標の定数性はわかっているので, もし $\mathscr{L}_{(y,z)}$ の 0 次以外のコホモロージが全部消えていれば c) の i) が $p=0$ で成り立つ. $\mathscr{L}_{(y,z)}$ 自身は trivial になると予想されているのでこのような都合のよいことになっていないが, 証明のアイデアは $\mathscr{L}$ の無害な twist を考えることでこの状況にもっていくことである.

Step 1. $\mathscr{L}$ の twist $\mathscr{L}'$.
非特異カーブ X の種数を g とする. つまり $g=\dim H^0(X,\Omega^1)$. このとき X の点 $P_1,\dots,P_g$ で divisor $D=\sum_{i=1}^g P_i$ に対し, $\dim H^0(X,\Omega^1\otimes\mathcal{O}_X(-D))=0$ となるものが取れる. ($H^0(X,\Omega^1)$ の basis $\omega_1,\dots,\omega_g$ に対し, $X^g=X\times\cdots\times X$ で projection p_i に対し, $\begin{vmatrix} p_1^*\omega_1 & \cdots & p_1^*\omega_g \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_g^*\omega_1 & \cdots & p_g^*\omega_g \end{vmatrix}$ の support として定義される X^g の閉集合の外から $(P_i)\in X^g$ を取ればよい.) $p_1: X\times Y\times Z\to X$ に対し $\mathscr{L}'=\mathscr{L}\otimes p_1^*\mathcal{O}_X(D)$ とおく. このとき $\mathscr{L}'$ は次の性質 **1**, **2** をもつ.
1. z_0 を含むある開集合 Z' で, 任意の $z\in Z'$ に対し $H^i(X,\mathscr{L}'_{(y,z)})=0\ \ (i\neq 0)$.
X は非特異曲線なので $i=1$ としてよい. $\mathscr{L}'_{(y,z_0)}=\mathcal{O}_X(D)$ なので $z=z_0$ に対しては,

$$\dim H^1(X,\mathscr{L}'_{(y,z_0)})=\dim H^0(X,\Omega^1\otimes\mathcal{O}_X(-D))=0.$$

したがって集合 $F=\{(y,z)\in Y\times Z\mid \dim H^1(X,\mathscr{L}'_{(y,z)})\geq 1\}$ は z_0 を含まない. 上半連続定理より F は閉集合だから, Y の proper 性とこの F を使って Z の中で $\dim H^i(X,\mathscr{L}'_{(y,z)})\geq 1$ となる z を削って, 求めたい開集合 Z' を見つけることができる.

とくに Lemma 3 から $Z=Z'$ としてよい. このとき
2. 任意の $(y,z)\in Y\times Z$ に対し $\dim H^0(X,\mathscr{L}'_{(y,z)})=1$.
なぜならば性質 **1**, 上半連続定理の b) の Euler 指標の定数性と Riemann-Roch から

$$\dim H^0(X,\mathscr{L}'_{(y,z)})=\chi(\mathscr{L}'_{(y,z)})=\chi(\mathscr{L}'_{(y_0,z_0)})=\chi(\mathcal{O}_X(D))=1-g+\deg D=1.$$

性質 **2** より $p_{23}: X\times Y\times Z\to Y\times Z$ に対し, $\mathscr{L}'$ には上半連続定理の c) の ii) が $p_{23*}\mathscr{L}'$ は invertible sheaf で次は同型.

$$p_{23*}\mathscr{L}'\otimes k(y,z)\ \longrightarrow\ H^0(X,\mathscr{L}'_{(y,z)}).$$

$\mathscr{L}_{(y,z)}$ の自明性を示すということは $\mathscr{L}'_{(y,z)}$ が $\mathcal{O}_X(D)$ と同型であることを示すことである. つまり 1 次元ベクトル空間 $H^0(X, \mathscr{L}'_{(y,z)})$ の非自明 section の zero-divisor が D を示すことである.

Step 2. $X \times Y \times Z$ 上の divisor $\widetilde{D}$ で $\widetilde{D}|_{X\times\{y\}\times\{z\}}$ が $H^0(X, \mathscr{L}'_{(y,z)})$ の非自明 section の zero-divisor になるものの構成.

$Y \times Z$ の open cover (U_i) で U_i 上 invertible sheaf $p_{23*}\mathscr{L}'$ を trivial にするようなものをとる. 生成元

$$\sigma_{U_i} \in \Gamma(U_i, p_{23*}\mathscr{L}') = \Gamma(p_{23}^{-1}U_i, \mathscr{L}')$$

の $p_{23}^{-1}U_i$ 上の zero-divisor を $\widetilde{D}_{U_i}$ とする. σ_{U_i} と σ_{U_j} は $U_i \cap U_j$ 上どこでも消えない正則関数倍しか違わないから, $\widetilde{D}_{U_i}$ は U_i ごと張り合って $X \times Y \times Z$ 上の divisor $\widetilde{D}$ を作る. 作り方から $\widetilde{D}$ の $X \times \{y\} \times \{z\}$ への制限は $H^0(X, \mathscr{L}'_{(y,z)})$ の非自明 section の zero-divisor に等しい. とくに $\widetilde{D}$ の $X \times \{y_0\} \times \{z\}$, $X \times \{y\} \times \{z_0\}$ への制限は D.

Step 2 より次を示せば Cube の定理の証明は完成する.

Final Step. $\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{g} \{P_i\} \times Y \times Z$.

ある自然数に対し $\widetilde{D} = \sum_{i=1}^{g} n_i\{P_i\} \times Y \times Z$ を示せば, $X \times \{y_0\} \times \{z_0\}$ への制限より $n_i = 1$ がわかるので, Supp $\widetilde{D} = \cup_i\{P_i\} \times Y \times Z$ を示せば十分. そのためには任意の $P \neq P_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ に対し

$$S = \mathrm{Supp}\,\widetilde{D} \cap (\{P\} \times Y \times Z) = \emptyset$$

を示せば, Supp $\widetilde{D} \subset \cup_i\{P_i\} \times Y \times Z$ で両方とも pure codimiension 1 で $X \times \{y_0\} \times \{z_0\}$ への制限を考えれば一致することがわかる. S が空集合であることは次のようにしてわかる. S の projection $\{P\} \times Y \times Z \to Z$ による像は Z 全体にならない (z_0 は像に入らない.)

したがってある Z の codimension 1 の閉集合 $T_i (i = 1, \ldots, m)$ で $S \subset \cup_{i=1}^{m}\{P_i\} \times Y \times T_i$ となるものがある. S が空集合でないとすると両方とも pure codimiension 1 であるから $S = \cup_{i=1}^{n}\{P_i\} \times Y \times T_i$ の形. しかし $S \cap (\{P\} \times \{y_0\} \times Z) = \emptyset$ だから矛盾する. □

Remark 2.18 実は非特異曲線の *Jacobi* 多様体の存在を認めると *Cube* の定理は簡単に示せる. X が非特異曲線の場合に帰着させるまでは同じで, このとき X の *Jacobi* 多様体を J とおく. 示したいのは $\mathscr{L}_{(y,z)}$ の自明性だが, $(y, z) \in Y \times Z$ に対し, $\mathscr{L}_{(y,z)}$ を対応させて, *morphism* $f : Y \times Z \to J$ を得る. ($y = y_0$ または $z = z_0$ のとき $\mathscr{L}_{(y,z)}$ は自明で, 特に *degree* は 0. したがって一般の (y, z) に対しても $\mathscr{L}_{(y,z)}$ の *degree* は 0 で, 集合論的に射 f が定まる. この集合論的射が代数多様体の *morphism* になるのは *Jacobi* 多様体の重要な性質で自明ではない. *Cube* の定理より難しい?) $f(\{y_0\} \times Z) = 0$ なので *Rigidity* の補題と z_0 での自明性より, f は 0 写像であることがわかる. したがって $\mathscr{L}_{(y,z)}$ は *trivial.*

3　双対アーベル多様体

アーベル多様体 X の双対アーベル多様体とは大雑把にいうと (閉点の集合が) 抽象群として $\mathrm{Pic}^0(X)$ に同型なアーベル多様体である. “大雑把に”というのは, これだけでは特徴づけにならないからである. $\mathrm{Pic}^0(X)$ に代数多様体としての構造が複数入るかもしれないし, 我々は同型を除いて unique に定めたい. とくに標数が正のときは purely inseparable な isogeny があるので閉点の構造だけでは同型を除いて unique に定めることができない. ここで登場するのが Poincaré bundle で, この bundle と組にすることで, 双対アーベル多様体は同型を除いて unique に定まる.

3.1　双対アーベル多様体の定義と性質

Definition 3.1 *X をアーベル多様体とする. 次の性質をもつアーベル多様体 $\widehat{X}$ と $X \times \widehat{X}$ 上の line bundle $\mathscr{P}$ の組 $(\widehat{X}, \mathscr{P})$ を考える.*

i). 任意の $\alpha \in \widehat{X}$ に対し, $\mathscr{P}$ の埋め込み $X \times \{\alpha\} \to X \times \widehat{X}$ による *pull-back* は $\mathrm{Pic}^0(X)$ の元で, 抽象群としての同型 $\widehat{X} \cong \mathrm{Pic}^0(X)$ を引き起こす.

ii). (Rigidity) $\mathscr{P}|_{\{0\}\times\widehat{X}}$ は *trivial.*

iii). (Universality) 任意の *normal* な代数多様体 S, と $X \times S$ 上の *line bundle* $\mathscr{K}$ で次の性質 *1. 2.* をもつものを考える.
1. ある閉点 $s \in S$ に対し (従って結果として任意の閉点 $s \in S$ に対し), $\mathscr{K}|_{X\times\{s\}} \in \mathrm{Pic}^0(X)$.
2. $\mathscr{K}|_{\{0\}\times S}$ は *trivial.*
このとき代数多様体の *morphism* $f : S \to \widehat{X}$ で集合の圏での図式

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[dr, "s \mapsto \mathscr{K}|_{X\times\{s\}}"'] & \widehat{X} \arrow[d, "i)\ \text{の同型}"] \\ & \mathrm{Pic}^0(X) \end{tikzcd}$$

を可換にし, $\mathscr{K} \cong (1_X \times f)^*\mathscr{P}$ となるものがただ一つ存在する.

i), ii) の性質とシーソの定理からこのような組 $(\widehat{X}, \mathscr{P})$ は存在すれば同型を除いてただひとつであることがわかる. $\widehat{X}$ を X の双対アーベル多様体, $\mathscr{P}$ を *Poincaré bundle* という.

Remark 3.2 *X が楕円曲線 E のときは, E 自身が双対アーベル多様体で Poincaré bundle は $E \times E$ の divisor $\Delta - (E \times \{0\}) - (\{0\} \times E)$ に対応する line bundle である. ここで Δ は足し算 $m : X \times X \to X, (x, y) \mapsto x + y$ の核. とくに Weierstrass σ-関数に対し,*

$$\frac{\sigma(z+w)}{\sigma(z)\sigma(w)}$$

は E の Poincaré bundle の section. この関数は本質的に CM 楕円曲線の 2 変数 p- 進 L 関数の母関数になることが知られている (cf. [BK]).

3.2 双対アーベル多様体の構成のアイデア

$\mathscr{L}$ を ample line bundle とする. このとき今まで見てきたように,

$$\phi_{\mathscr{L}} : X \to \mathrm{Pic}^0(X)$$

の核は有限群 $K(\mathscr{L})$ であった. もし $\mathrm{Pic}^0(X)$ にアーベル多様体の構造が入り, $\phi_{\mathscr{L}}$ が scheme の射になるなら, 核の有限性より $\phi_{\mathscr{L}}$ は isogeny であり, 全射であることがわかる. したがって $\phi_{\mathscr{L}}$ の "**スキームとしての核**"を $\widetilde{K}(\mathscr{L})$ とすると $\mathrm{Pic}^0(X)$ は抽象群として X の有限群スキーム $\widetilde{K}(\mathscr{L})$ による商と同型でなければならない. ここで $\widetilde{K}(\mathscr{L})$ と $K(\mathscr{L})$ には $\widetilde{K}(\mathscr{L})$ を被約化したものが $K(\mathscr{L})$ という関係があるはずである. (位相空間としては同型だが, のっている関数環が無限小レベルで違う.) 双対アーベル多様体はこれを逆手にとって次のように構成する.

i). $\phi_{\mathscr{L}} : X \to \mathrm{Pic}^0(X)$ の全射性を証明する.

ii). 有限群 $K(\mathscr{L})$ に適切な有限群スキームとしての構造を入れ, 商多様体 $X/K(\mathscr{L})$ を構成する.

iii). これが Poincaré bundle による双対アーベル多様体の特徴付けをみたすことを示す.

ii) についてだが, もし基礎体 k の標数が 0 ならば, すべての isogeny は separable で, 核はétale な有限群スキームになる. つまりスキームの構造は忘れて単なる有限群と思ってよい (trivial なスキーム構造). とくに $\widetilde{K}(\mathscr{L}) = K(\mathscr{L})$ であり, 欲しい商多様体は X を普通の有限群 $K(\mathscr{L})$ で割ればよいので, ii) の部分は簡単になる.

Mumford の２章では "有限群"による商多様体の一般論を展開し, 双対アーベル多様体を標数 0 の場合に構成している. ３章では, シーソーの定理をスキーム論的に一般化し (無限小の厚みをつける), 単なる集合ではなく $K(\mathscr{L})$ を scheme として構成する. そして今度は" 有限群スキーム"による商多様体の一般論を展開し, 双対アーベル多様体を任意の標数で構成する. ２章も３章も方法論的にまったく同じで, ２章の内容は３章の内容に完全に含まれてしまうが, アイデアを理解するためには２章だけで十分で, 証明も簡略化される (それが Mumford が２章を挿入した理由であろう.) この講演でも２章の内容のみを紹介してきた. ３章を説明するためには, シーソーの定理, Cube の定理を代数多様体だけでなく, さらにスキーム論的に無限小の厚みをつける必要がある.

3.3 $\phi_{\mathscr{L}}$ の全射性

アーベル多様体 X に対し, 次が命題が成り立つことはシーソーの定理や Cube の定理からただちにわかる.

Proposition 3.3 *i).* $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(X) \Longleftrightarrow m^*\mathscr{L} \cong p_1^*\mathscr{L} \otimes p_2^*\mathscr{L}$ *on* $X \times X$.

ii). 任意のスキーム S と $f, g : S \to X$ と $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ に対し, $(f+g)^*\mathscr{L} \cong f^*\mathscr{L} \otimes g^*\mathscr{L}$. とくに $n_X^*\mathscr{L} \cong \mathscr{L}^n$.

iii). S を任意の代数多様体. $s_1, s_2 \in S$ とする. このとき $X \times S$ 上の任意の *line bundle* $\mathscr{L}$ に対し,

$$\mathscr{L}_{s_1} \otimes \mathscr{L}_{s_2}^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(X).$$

ここで $\mathscr{L}_s = \mathscr{L}|_{X \times \{s\}}$. つまり一つの *fibre* で $\mathrm{Pic}^0(X)$ の元ならほかの *fibre* でもそうである.

Proposition 3.4 $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ に対し, もし $\mathscr{L}$ が *non-trivial* ならば, 任意の i に対し $H^i(X, \mathscr{L}) = 0$.

証明 $H^0(X, \mathscr{L})$ がゼロでなかったとすると non-trivial な global section の divisor D を考えると D は non-negative で $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X(D)$. ここで

$$\mathcal{O}_X \cong \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \cong \mathscr{L} \otimes (-1)^* \mathscr{L}$$

だから non-negative divisor $D + (-1)_X^* D$ が 0 に linealy equivalent になるので $D = 0$. $\mathscr{L}$ が non-trivial に矛盾. 写像 $s_1 : X \to X \times X, x \mapsto (x, 0)$ を考えると $m \circ s_1$ は恒等写像で,

$$H^i(X, \mathscr{L}) \xleftarrow{s_1^*} H^i(X \times X, m^* \mathscr{L}) \xleftarrow{m^*} H^i(X, \mathscr{L})$$

も恒等写像. ところが $m^* \mathscr{L} \cong p_1^* \mathscr{L} \otimes p_2^* \mathscr{L}$(前命題) より Künneth formula を使うと

$$H^i(X \times X, m^* \mathscr{L}) \cong H^i(X \times X, p_1^* \mathscr{L} \otimes p_2^* \mathscr{L}) \cong \sum_{k+l=i} H^k(X, \mathscr{L}) \otimes H^l(X, \mathscr{L}).$$

帰納法を使えばこの群は 0 としてよい. よって恒等写像がゼロ写像を引き起こすことになり $H^i(X, \mathscr{L}) = 0$. □

Theorem 3.5 $\mathscr{L}$ をアーベル多様体 X の *ample* な *line bundle* とする. このとき任意の $\mathscr{M} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ に対して, ある $x \in X$ があって

$$\mathscr{M} \cong T_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}$$

とかける. つまり $\phi_{\mathscr{L}}$ は全射.

証明 アイデアは $X \times X$ 上の line bundle

$$\mathscr{K} = m^* \mathscr{L} \otimes p_1^* \mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathscr{M}^{-1}$$

のコホモロジーをみることである. 定義から任意の $x \in X$ に対し,

$$\mathscr{K}|_{\{x\} \times X} \cong T_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \otimes \mathscr{M}^{-1}, \quad \mathscr{K}|_{X \times \{x\}} \cong T_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}.$$

このとき 2 つの projection $X \times X \to X$ に関する Leray スペクトル系列

$$H^l(X, R^k p_{1*} \mathscr{K}) \ \Rightarrow \ H^{k+l}(X \times X, \mathscr{K}),$$

$$H^l(X, R^k p_{2*}\mathscr{K}) \;\Rightarrow\; H^{k+l}(X \times X, \mathscr{K})$$

を考える. もしこの定理の主張が正しくないとすると $\mathscr{K}|_{\{x\}\times X}$ は常に non-trivial になる. したがって前命題より $\mathscr{K}|_{\{x\}\times X}$ のすべてのコホモロジーは消える. よって上半連続定理より $R^k p_{1*}\mathscr{K}$ の fibre はすべて trivial で, $R^k p_{1*}\mathscr{K}$ 自身が trivial になる. これより最初のスペクトル系列からすべての k に対し $H^k(X \times X, \mathscr{K}) = 0$. つぎに同様の議論で

$$\mathrm{Supp}(R^k p_{2*}(\mathscr{K})) \subset K(\mathscr{L})$$

がわかる. $K(\mathscr{L})$ は有限集合だから 2 番目のスペクトル系列から

$$\oplus_{x\in K(\mathscr{L})} R^k p_{2*}(\mathscr{K})_x \subset H^k(X \times X, \mathscr{K}) = 0.$$

これから全て x に対し, $H^k(X, \mathscr{K}|_{X\times\{x\}}) = 0$. しかし $\mathscr{K}|_{X\times\{0\}}$ は trivial だから non-trivial な global section をもつので矛盾. □

3.4 双対アーベル多様体の構成

$\phi_{\mathscr{L}}$ は全射であることがわかったので, ample line bundle $\mathscr{L}$ に対し, X の有限群による $K(\mathscr{L}), X/K(\mathscr{L})$ は抽象群として $\mathrm{Pic}^0(X)$ と同型になることがわかった. したがって $\mathrm{Pic}^0(X)$ にアーベル多様体としての構造をいれることができた. しかし双対アーベル多様体の構成のアイデアでのべたように, 一般にはこれが双対アーベル多様体 $\widehat{X}$ であるとは期待できない. もし基礎体の標数が 0 ならばそうであると期待できるのであった. 以下では基礎体の標数は 0 として, Poincaré bundle の構成と $X/K(\mathscr{L})$ が双対アーベル多様体になることをみる.

3.4.1 Poincaré bundle の構成

$\widehat{X} = X/K(\mathscr{L})$ とおき, 自然な projection $X \to \widehat{X}$ を π とおく. このとき容易にわかるように Poincaré bundle $\mathscr{P}$ が存在するならば, $\mathscr{P}$ の

$$X \times X \xrightarrow{1\times\pi} X \times \widehat{X}$$

による pull-back は

$$\mathscr{M} := m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}$$

でなければならない. これより $X \times X$ への有限群 $\{0\} \times K(\mathscr{L})$ の作用を $\mathscr{M}$ に自然にのばして商 $\mathscr{M}/\{0\} \times K(\mathscr{L})$ を $\mathscr{P}$ とおけばよいことがわかる.

一般に有限群 G の X への作用を X 上の line bundle に自然にのばすことはできないが (たとえば G がいわゆる Mumford の theta 群だったら ample symmetric line bundle に作用をのばすことができるというのが Mumford の theta 理論の核心で, まったく自明でない), しかしながら この $\mathscr{M}$ には次のようにして $\{0\} \times K(\mathscr{L})$ の作用をのばせる. 作用をのばすためには任意の $a \in K(\mathscr{L})$ に対し, canonical に同型 $T^*_{(0,a)}\mathscr{M} \cong \mathscr{M}$ を与えてあげればよい. (いい加減にあたえると作用の結合性などが成り立たなくなる.) $a \in K(\mathscr{L})$ より同型 $T_a^*\mathscr{L} \cong \mathscr{L}$

が存在するので, このような同型 f_a をひとつとって固定する. f_a の取り方には定数倍の曖昧さがあることに注意しておく. そして同型

$$T^*_{(0,a)}\mathscr{M} \cong m^*T^*_a\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*T^*_a\mathscr{L}^{-1} \cong m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1} = \mathscr{M}$$

を考える. ここで最初の同型はcanonicalで2番目は $f_a \otimes \mathrm{id} \otimes f_a^{\otimes -1}$ である. f_a はconstant倍の自由度があるが, この同型は f_a と $f_a^{\otimes -1}$ がconstant倍の曖昧さを打ち消し合って f_a の取り方に依存しなくcanonicalである. このcanonical同型 $T^*_{(0,a)}\mathscr{M} \cong \mathscr{M}$ を使って $\{0\} \times K(\mathscr{L})$ の $\mathscr{M}$ への作用が定まる.

さて基礎体の標数が0のときはこのようにしてできた組 $(\widehat{X}, \mathscr{P})$ が実際に双対アーベル多様体を特徴づける性質をもつことを示そう. 特徴付けの性質のうち, iii) のUniversalityのみが非自明である. 実際正標数のときはこれが成り立つとは限らず, この組は双対アーベル多様体を定めない. しかし標数0という仮定をつけるとこれが成り立つ. 特徴付けのii)と同じ記号を使う.

アイデアは欲しい $f : S \to \widehat{X}$ のグラフ $\Gamma = \{(x, f(x)|x \in S\} \subset S \times \widehat{X}$ に注目することである.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \subset S \times \widehat{X} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ S & & \widehat{X} \end{tikzcd}$$

もし欲しい f があったとすると (集合論の圏ではあるので), Γ の見当はつき, 幾何的に構成できる. つまり $X \times S \times \widehat{X}$ 上のline bundle $\mathscr{E} = p_{12}^*(\mathscr{K}) \otimes p_{13}^*(\mathscr{P}^{-1})$ に対して

$$\Gamma := \{(s, \alpha) \in S \times X \mid \mathscr{E}\,|_{X\times\{(s,\alpha)\}} \text{は trivial }\}$$

とおけばシーソの定理よりこれはZariski閉集合で, 集合論的には存在する f のグラフになっていることがわかる. よってスキームの間の射である p_1 は集合論的に Γ と S にbijectionを引き起こす. ここで標数が0を使うと, これは Γ と S の (代数多様体の射としての) birational equivalenceであることがわかる. (標数が0を使うのはここのみ!) ここで S はnormalだからZariskiの主定理より, p_1 は Γ と S の代数多様体としての同型を引き起こすことがわかる. よってこの逆写像を p_1^{-1} とすれば欲しい f を $p_2 \circ p_1^{-1}$ として得る. ほかの主張はシーソの定理をつかって容易に証明できる.

標数が p のときは, $K(\mathscr{L})$ に適切なスキーム構造を入れた後, 同様に双対多様体を定義し, Universalityも上と同様にグラフ Γ を考えてまったく同様な方針で証明される. しかし p_1 が Γ 上で同型であることを示すのはテクニカルにずっと困難になる. Mumfordの本ではその過程で次の重要な事実も証明される.

Proposition 3.6

$$H^i(X \times \widehat{X}, \mathscr{P}) = \begin{cases} 0 & (i \neq g), \\ 1\text{次元ベクトル空間 } k & (i = g). \end{cases}$$

4 Riemann-Rochの定理と直線束のコホモロジー

Theorem 4.1 (Riemann-Roch) *$\mathscr{L}$ をアーベル多様体 X の line bundle $\mathcal{O}_X(D)$ とする. このとき*

$$\chi(\mathscr{L}) = \frac{(D^g)}{g!}, \quad \chi(\mathscr{L})^2 = \deg \phi_{\mathscr{L}}.$$

ここで (D^g) は g 個の D の self-intersection number.

証明 まず $\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2^{-1} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ ならば, $\chi(\mathscr{L}_1) = \chi(\mathscr{L}_2)$ である. これは $\mathrm{Pic}^0(X)$ は $\mathscr{P}$ によりパラメータづけられ, 上半連続定理よりオイラー指標は fibre で constant であることからわかる. したがってオイラー指標の計算は modulo $\mathrm{Pic}^0(X)$ ですればよい. 任意の line bundle は symmetric な bundle と $\mathrm{Pic}^0(X)$ の元の積としてかけるので, $\mathscr{L}$ は symmetric としてよい. このとき Corollary 2.7 より任意の整数 n に対し, $n_X^*\mathscr{L} = \mathscr{L}^{n^2}$ で,

$$\chi(\mathscr{L}^{n^2k}) = \chi(n_X^*\mathscr{L}^k) = \deg n_X \cdot \chi(\mathscr{L}^k) = n^{2g}\chi(\mathscr{L}^k).$$

いま $\chi(\mathscr{L}^k)$ は k に関する多項式 (Hilbert polynomial) なので,

$$\chi(\mathscr{L}^k) = \text{constant} \times k^g$$

の形でなければならない. よって $\chi(\mathscr{L}^k) = a(\mathscr{L}) \cdot k^g/g!$ とおいて, $a(\mathscr{L}) = (D^g)$ を示せばよい. 任意の line bundle は適当な very ample line bundle (section たちをならべてできる射影空間への写像が閉埋め込みを定義するような bundle) $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ を使って $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2^{-1}$ と書ける. ここである多項式 $P(x, y)$ があって $P(n_1, n_2) = \chi(\mathscr{L}_1^{n_1} \otimes \mathscr{L}_2^{n_2})$ とかけることと, intersection number の線形性を使うと, ちょっとした議論により, 結局 very ample な $\mathscr{L}$ について証明すればよいことがわかる. このときは $\mathscr{L}$ の global section $\sigma_0, \dots, \sigma_g$ を使って morphism $\phi : X \to \mathbb{P}^g$ を作ることができる. その際, $\sigma_1, \dots, \sigma_g$ を適当に取り替えてそれらの zero-divisor が transversal に交わるようにできる. したがってこれらの divisor の交わりは異なる (D^g) 個の点である. とくに点 $(1 : 0 : \cdots : 0) \in \mathbb{P}^g$ の ϕ による逆像は (D^g) 個の点であり, $\deg \phi = (D^g)$ である. 一方

$$a(\mathscr{L}) \cdot \frac{k^g}{g!} = \chi(\mathscr{L}^k) = \chi(\phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^g}(k)) = \deg \phi \cdot \chi(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^g}(k)) = \deg \phi \cdot \frac{k^g}{g!}.$$

□

Proposition 4.2 *$\mathscr{L}$ をアーベル多様体 X の ample line bundle とする. このときある非負整数 i_0 があって, $i \neq i_0$ ならば $H^i(X, \mathscr{L}) = 0$. また $H^{i_0}(X, \mathscr{L}) \neq 0$.*

証明 Proposition 3.6 では $\mathscr{P}$ のコホモロジーを計算したが, そこから標準的な議論で $m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathscr{L}^{-1}$ のコホモロジー (second projection による higher direct image) を計算できる. これから

$$\dim H^i(X \times \widehat{X}, m^*\mathscr{L} \otimes p_1^*\mathscr{L}^{-1}) = \begin{cases} 0 & (i \neq g), \\ \deg \phi_{\mathscr{L}} & (i = g). \end{cases}$$

$h^i(\mathscr{L}) = H^i(X, \mathscr{L})$ とおくと, Künneth formula より

$$\sum_{i=0}^{q} h^i(\mathscr{L}) h^{q-i}(\mathscr{L}^{-1}) = \begin{cases} 0 & (q \neq g), \\ \deg \phi_{\mathscr{L}} & (q = g). \end{cases}$$

主張はこのことから従う. □

Corollary 4.3 *J を non-singular curve C の Jacobian. Θ を C の theta divisor とする. このとき*

$$\dim \Gamma(J, \mathcal{O}_J(n\Theta)) = n^g.$$

証明 divisor $n\Theta$ は effective なので global section をもつ. よって前定理よりコホモロジーは H^0 のみ zero でない. したがって Riemann-Roch より H^0 の次元は (Θ^g) を計算すればわかる. しかし $(\Theta^g) = g!$ であることが知られている. □

参考文献

[BK] K. Bannai and S. Kobayashi, p-adic interpretation of Eisenstein-Kronecker numbers and algebraic theta functions, preprint.

[Bar] I. Barsotti, Considerazioni sulle funzioni theta, In: *Symposia Mathematica*, Vol. III (INDAM, Rome, 1968/69), pp. 247–277, Academic Press, London, 1970.

[Br] L. Breen, Fonctions thêta et théorème du cube. Lecture Notes in Mathematics, 980. Springer-Verlag, Berlin, 1983. xiii+115 pp.

[CC] M. Candilera, V. Cristante, Bi-extensions associated to divisors on abelian varieties and theta functions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **10** (1983), no. 3, 437–491.

[Cri1] V. Cristante, Theta functions and Barsotti-Tate groups. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **7** (1980), no. 2, 181–215.

[Cri2] V. Cristante, p-adic theta series with integral coefficients. p-adic cohomology, Astérisque No. **119-120** (1984), 6, 169–182.

[GM] G. van der Geer, B. Moonen, Lecture note, Abelian varieties. http://staff.science.uva.nl/ bmoonen/boek/BookAV.html

[L] S. Lang, Abelian varieties. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. No. 7 Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London 1959 xii+256 pp.

[MT] B. Mazur and J. Tate, The p-adic sigma function, Duke. Math. **62**, No. 3, (1991), 663-688.

[Mil1] J. Milne, Abelian varieties. In Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 103–150, Springer, New York, 1986.

[Mil2] J. Milne, Lecture note, Abelian varieties.
http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/math731.html

[Mum] D. Mumford, Abelian varieties. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 5 Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; Oxford University Press, London 1970 viii+242 pp.

[Pol] A. Polishchuk, *Abelian varieties, theta functions and the Fourier transform*, Cambridge Tracts in Mathematics **153**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.