第 15 回 整数論サマースクール 報告集, pp.291-328

アーベル多様体の Birch-Swinnerton-Dyer 予想についての話題

安田 正大*

1　ごあいさつ

皆さんお早うございます. 本年度のサマースクールもようやく最終日を迎えました. 本日の私の講演では Birch-Swinnerton-Dyer 予想についてお話しいたします.

Birch-Swinnerton-Dyer 予想とは, 大域体上のアーベル多様体の L 関数の特殊値に関する予想です. この講演ではまず Birch-Swinnerton-Dyer 予想について述べたあと, その予想中に現れる高さ対 (height pairing) や Shafarevich-Tate 群といった概念について説明をします. 特に主偏極アーベル多様体の Shafarevich-Tate 群の位数が平方数になるかどうかの判定条件を与える Poonen-Stoll [44] の結果を紹介します. そのあと強い Birch-Swinnerton-Dyer 予想を玉河数に関する公式として解釈できるという Bloch [5] の結果と, 正標数の大域体の場合の強い Birch-Swinnerton-Dyer 予想に関する加藤-Trihan [26] の結果について解説します.

モジュラ楕円曲線や GL_2 型のアーベル多様体など, 楕円モジュラ曲線と関係するアーベル多様体に関しては, Gross-Zagier [23], Kolyvagin [28], [29], 加藤 [25] などの Birch-Swinnerton-Dyer 予想を支持する重要な結果がいろいろとあります. ひょっとすると皆さんの中には, こういった結果に関する解説を期待しておられた方もいらっしゃるかもしれません. そういった方には大変申し訳ないのですが, これらの結果について本日はほとんど触れません. 触れない理由はふたつあります. 今回のサマースクールのテーマが種数の高い曲線ということですので, 楕円曲線と関連して出てくるような話題をなるべく避けようというのがひとつの理由です. 楕円モジュラ曲線に関する話題はあちこちで耳にする機会があり, 退屈に感じられるかたもいらっしゃるでしょうから, ここでは多くの皆さんにとってあまり聞く機会がないような話をしたいというのがもうひとつの理由です.

この原稿は 2007 年 8 月 24 日に, 第 15 回整数論サマースクールにおいて筆者が行った講演のスライドに加筆・修正を加えたものです. 講演の機会を与えてくださいました大西良博氏にこの場を借りて感謝いたします. 岡崎武生氏と山内卓也氏には, 合宿中の体調の整え方について有益な助言を賜りました. 大坪紀之氏は講演終了後に, スライドにあった誤りをいろいろとご指摘くださいました. 山下剛氏は完成前の原稿を通読し, 沢山あった書き誤りおよび内容に関していくつもの改善すべき点をご指摘くださいました. 小林真一氏は完成直前の原稿にあったいくつもの書き誤りをご指摘くださいました. 五人に対しここに感謝の意を表します.

*京都大学 数理解析研究所

2 記号の準備

本稿を通じて以下の記号・用語を用います.

2.1 集合に関する記号

有限集合 S に対し, S の濃度を $\sharp S$ で表わします.

2.2 記号 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

記号 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ で, それぞれ有理整数のなす環, 有理数体, 実数体, 複素数体を表わします. 素数 p に対し, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ でそれぞれ p 進整数のなす環, p 進数のなす体を表わします.

2.3 アーベル群に関する記号

アーベル群 M に対し, 以下の記号を用います.

- 記号 M_{tors} で位数が有限の元全体のなす M の部分群を表わします. $M = M_{\mathrm{tors}}$ のとき, M を捻れアーベル群とよびます.
- 整数 m に対し, 記号 $M[m]$ で位数が m の元全体のなす M_{tors} の部分群を表わします.
- 素数 p に対し, 記号 $M\{p\}$ で位数が p 巾の元全体のなす M_{tors} の部分群を表わします. $M_{\mathrm{tors}} = \bigoplus_p M\{p\}$ となることに注意しておきます.
- 記号 $M_{\mathbb{Q}}$ で $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を表わします.
- 記号 M_{red} で M を M の最大可除部分群で割った剰余群を表わします.

2.4 関数体

有限体上の一変数代数関数体のことをこの稿では関数体とよびます. 大域体とは代数体または関数体のことです.

2.5 大域体の素点に関する記号

F を大域体, v を F の素点とするとき, F_v で F の v による完備化を表わします. また v における正規化された乗法的付値を $|\ |_v : F_v \to \mathbb{R}$ で表わします. (v が複素素点のときは, $|\ |_v$ を通常の複素数の絶対値の 2 乗となるように正規化します). さらに v が F の有限素点のとき, $\mathcal{O}_v$, k_v, q_v でそれぞれ F_v の整数環, $\mathcal{O}_v$ の剰余体, k_v の位数を表わします.

2.6 大域体の整イデアル

F を代数体とするとき, $\mathcal{O}_F$ で F の整数環を表わします. $\mathcal{O}_F$ のイデアルのことを F の整イデアルとよびます. 0 でない F の整イデアル $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_F$ に対し, $N(\mathfrak{A}) = \sharp(\mathcal{O}_F/\mathfrak{A})$ とおきます. F を関数体とするとき, F に対応する有限体上の代数曲線 X 上の構造層を $\mathcal{O}_F$ で表わします. $\mathcal{O}_F$ のイデアル層のことを F の整イデアルとよびます. 0 でない F の整イデアル $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_F$ に対し, $N(\mathfrak{A}) = \sharp(\Gamma(X, \mathcal{O}_F/\mathfrak{A}))$ とおきます.

2.7 スキームに関する記号

スキーム X に対し, X の構造層を $\mathcal{O}_X$ で表わします. X を体 F 上のスキーム, F' を F の拡大体とするとき, $X \times_{\operatorname{Spec} F} \operatorname{Spec} F'$ のことを $X_{F'}$ で表わします.

3 Birch-Swinnerton-Dyer 予想の主張

F を大域体, A を F 上のアーベル多様体とします. A の次元を g とします.

3.1 アーベル多様体の L 関数

Birch-Swinnerton-Dyer 予想とは, A の L 関数 $L(A,s)$ の $s=1$ におけるふるまいに関する予想です. ここで A の L 関数 $L(A,s)$ は Euler 積

$$L(A,s) := \prod_v P_v(A, q_v^{-s})^{-1} \tag{3.1}$$

で与えられる複素数 s についての関数です. 上式 (3.1) の右辺の積において v は F の有限素点を動きます. また §3.2, 3.3 で詳しく述べますが, $P_v(A,T)$ は定数項が 1 の T についてのとある $\mathbb{Z}$ 係数多項式です. Euler 積 (3.1) は $\mathrm{Re}(s) > 3/2$ の範囲で絶対収束します. したがって $L(A,s)$ は同じ範囲で s についての正則関数となります.

予想 3.1. 関数 $L(A,s)$ は全複素平面に正則に解析接続される.

すべての無限素点を含む素点の有限集合 S に対し,

$$L^S(A,s) := \prod_{v \notin S} P_v(A, q_v^{-s})^{-1}.$$

とおきます. また

$$\Lambda(A,s) := \begin{cases} L(A,s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{g[F:\mathbb{Q}]}, & F \text{ が代数体のとき} \\ L(A,s), & F \text{ が関数体のとき} \end{cases} \tag{3.2}$$

とおきます. ここで $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2 \cdot (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ です. このとき 予想 3.1 よりも強く次のことが予想されています.

予想 3.2. 関数 $\Lambda(A,s)$ は全平面に正則に解析接続され, さらに関数等式とよばれる等式

$$\Lambda(A, 2-s) = \pm N(\mathfrak{N}_A)^{s-1}\Lambda(A,s)$$

が成り立つ. ここで $\mathfrak{N}_A$ は A の導手である.

上の予想に現れる A の導手 $\mathfrak{N}_A$ とは A から定まる F の 0 でない整イデアルです. $\mathfrak{N}_A$ の定義は §3.3 で与えます. また予想 3.2 の式に現れる符号を A から具体的に定めることによって予想 3.2 を精密化することもできますが, 本稿ではそれについての詳細も省略します (詳しくは [34], [14], [56] をご参照ください). 予想 3.1, 3.2 は, F が関数体の時には証明されています. F が代数体の場合にはこれらの予想が解かれている場合は今のところあまり多くはなく, 虚数乗法論やモジュラ曲線等を通じて $L(A,s)$ が保型 L 関数と結びつくような場合くらいしかありません.

3.2 多項式 $P_v(A,T)$ の定義 (その 1)

F の各有限素点 v に対し, 多項式 $P_v(A,T)$ は以下のようにして定義されます.

A が v でよい還元 A_v を持つとき. このとき $\mathbb{C}$ 係数の可逆行列 φ_v であって, 任意の有限次拡大 k/k_v に対し $\det(1-\varphi_v^{-[k:k_v]}) = \sharp A_v(k)$ を満たすものが存在します. この φ_v を用いて $P_v(A,T) := \det(1-\varphi_v q_v T)$ と定義します.

v が一般の有限素点のときも, A の Néron モデルの還元の単位元成分を A_v とおくことにより, A が v でよい還元 A_v を持つときと同様の方法で $P_v(A,T)$ を定義します (A の Néron モデルについては §3.4 で説明します).

3.3 多項式 $P_v(A,T)$ の定義 (その 2)

ここ §3.3 では, §3.2 で定義した多項式 $P_v(A,T)$ の別の記述のしかたを紹介します. $\overline{F}$ を F の分離閉包, $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とします. F の有限素点 v に対し, G_v, I_v, $\mathrm{Frob}_v \in G_v/I_v$ をそれぞれ v における分解群, 惰性群, (幾何的) Frobenius とします. 素数 ℓ であって $v \nmid \ell$ となるものをひとつ固定し, $T_\ell A := \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, A(\overline{F}))$, $V_\ell A := (T_\ell A)_{\mathbb{Q}}$ とおきます. この $T_\ell A$ のことを A の ℓ 進 Tate 加群とよびます. $T_\ell A$, $V_\ell A$ には G_F が連続に作用します. このとき $P_v(A,T)$ は

$$P_v(A,T) := \det(1-\mathrm{Frob}_v q_v T; (V_\ell A)^{I_v}).$$

で与えられます.

この $V_\ell(A)$ を用いると, 予想 3.2 の主張に現れた F の整イデアル $\mathfrak{N}_A$ の定義ができます. $\mathfrak{N}_A$ は F の整イデアルであって, F の各有限素点 v に対し次の条件を満たす唯一のものです.

> k_v の標数と異なる素数 ℓ をとり, G_F の表現 $V_\ell A$ の v における分解群 $G_v \subset G_F$ への制限を $V_{\ell,v} = \mathrm{Res}^{G_F}_{G_v} V_\ell A$ とおくと, 等式
>
> (3.3) $$\mathrm{ord}_v(\mathfrak{N}_A) = \mathrm{sw}(V_{\ell,v}) + 2g - \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(V_{\ell,v})^{I_v}$$
>
> が成り立つ.

ここで $\mathrm{sw}(V_{\ell,v})$ は $V_{\ell,v}$ の Swan 導手を表わします. Swan 導手については例えば Serre [50, §19] をご参照ください. [50, §19] では G_v が有限商を経由して作用するような G_v の線型表現のみを取り扱っていますが, v での暴惰性群が $V_{\ell,v}$ に有限商を通じて作用する (Grothendieck [51, APPENDIX]) ことから, [50, §19] の方法で V に対しても Swan 導手を定義できます. 式 (3.3) の右辺を $\mathrm{art}(V_{\ell,v})$ と書くこともあります (群 I_v は $V_{\ell,v}$ に有限商を通じて作用するとは限らないので, [50, §19] にある Artin 導手の定義は $V_{\ell,v}$ に適用できるとは限りません). 整数 $\mathrm{sw}(V_{\ell,v})$ および $\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(V_{\ell,v})^{I_v}$ は素数 ℓ のとり方に依存しないことが知られているので, 式 (3.3) の右辺は ℓ に依存しないことに注意しておきます. また, 剰余体 k_v の標数が A の次元 g に比べて十分大きいときは $\mathrm{sw}(V_{\ell,v}) = 0$ となります. した

がってこのとき k_v 上の可換群スキーム A_v^a, A_v^t を後述の式 (3.4) に現れるものとすると, 等式

$$\mathrm{ord}_v(\mathfrak{N}_A) = 2\dim\, A_v^a - \dim\, A_v^t$$

が成り立ちます.

3.4 Néron モデル

本節ではアーベル多様体の Néron モデルについて簡単に説明します.

F が代数体のとき, $X = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F$ とおきます. F が関数体のとき, X を F を関数体に持つ有限体上滑らかかつ射影的な代数曲線とします. 以下では X の閉点と F の有限素点とをしばしば同一視します.

$U \subset X$ を空でない開部分スキームとします. このとき U 上のスキーム $\mathcal{A}_U$ であって, 性質

(N) $\mathcal{A}_U$ は U 上滑らか, かつ U 上滑らかな任意のスキーム Y に対し, $\mathcal{A}_U(Y) := \mathrm{Hom}_U(Y, \mathcal{A}_U) \cong A(Y \times_U \mathrm{Spec}\,F)$ が成り立つ.

によって特徴づけられるものが存在します ([40], [9]). この $\mathcal{A}_U$ を A の U 上の Néron モデルとよびます. $U = X$ のとき, 以下では $\mathcal{A}_X$ のことを $\mathcal{A}$ で表わします. $\mathcal{A}_U$ は U 上の可換群スキームの構造を持ちます. U' を連結かつ U 上エタールなスキーム, F' を $\mathcal{O}'_U$ の全商環の大域切断とすると, $\mathcal{A}_U \times_U U'$ は $A \times_{\mathrm{Spec}\,F} \mathrm{Spec}\,F'$ の U' 上の Néron モデルとなります.

3.5 Néron モデルの閉ファイバー

閉点 $v \in X$ に対し $\mathcal{A}$ の v でのファイバーを A_v とおきます. 体 k_v 上の可換群スキームとして A_v は次の標準的なフィルトレーションを持ちます:

$$A_v \supset A_v^o \supset A_v^a \supset A_v^t. \tag{3.4}$$

ここで A_v^o は連結群スキーム, A_v/A_v^o は有限エタール群スキーム, A_v^a は連結アフィン群スキーム, A_v^o/A_v^a はアーベル多様体, A_v^t はトーラス, A_v^a/A_v^t は巾単群スキームです. 素数 ℓ が体 k_v の標数と異なるとき, $T_\ell A_v^o := \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, A_v^o(\overline{k}_v)) \cong T_\ell A^{I_v}$ が成り立ちます. A^* を A の双対アーベル多様体とすると, 完全対 $T_\ell A \times T_\ell A^* \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ が存在します. 偏極 $A \to A^*$ によって交代的かつ非退化な双一次形式 $T_\ell A \times T_\ell A \to \mathbb{Z}_\ell(1)$ が得られます. この対に関して, $T_\ell(A_v^t) = T_\ell(A_v^o) \cap T_\ell(A_v^o)^\perp$ が成り立ちます (Grothendieck [59, Exposé IX, Théorème 2.4]).

定義 3.3. v を F の有限素点とする. A が v で良い還元を持つとは, 次の同値な条件を満たすことをいう.

1. A_v はアーベル多様体である.

2. A_v は $\kappa(v)$ 上固有である.
3. $A_v^a = 1$ である.
4. 群 I_v は $T_\ell A$ に自明に作用する.

この 4 条件の同値性については [59, Exposé IX, Corollaire 2.2.9] をご参照ください.

定義 3.4. v を F の有限素点とする. A が v で半安定還元を持つとは, 次の同値な条件を満たすことをいう.

1. $A_v^a = A_v^t$ である.
2. 群 I_v は $T_\ell A/(T_\ell A)^{I_v}$ に自明に作用する.
3. 群 I_v は $T_\ell A$ に巾単に作用する.

この 3 条件の同値性については [59, Exposé IX, Proposition 3.5] をご参照ください.

定義 3.5. $U \subset X$ を空でない開部分集合とする. A が U 上で良い (ないし半安定) 還元を持つとは, A が U のすべての閉点で良い (ないし半安定) 還元を持つことをいう.

定理 3.6 ([59, Exposé IX, Théorème 3.6], [59, Exposé I, Théorème 6.1]). *F を大域体, A を F 上のアーベル多様体とすると, ある有限次分離拡大 F'/F が存在して $A \times_{\operatorname{Spec} F} \operatorname{Spec} F'$ は半安定還元を持つ.*

例 3.7. $A = E$ が楕円曲線の場合, $\mathcal{C}$ を E の X 上の極小正則モデルとすると, E の X 上の Néron モデル $\mathcal{E}$ は $\mathcal{C}$ から, $\mathcal{C}$ の特異ファイバーの滑らかでない部分をすべて取り除いたスキームと同型です. X の閉点における $\mathcal{C}$ のファイバーの形は小平 [27], Néron [40] によって分類されています. また E が具体的に Weierstrass 方程式で与えられているとき, Tate のアルゴリズム [55] により, 方程式の係数から $\mathcal{C}$ の各閉ファイバーの形を容易に決定することができます. 例えば $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, v を 2 の上にある F の唯一の素点, $a \in F$ を $0 \le \operatorname{ord}_v(a) \le 3$ を満たす元とし, E を Weierstrass 方程式 $y^2 = x^3 + ax$ で与えられる楕円曲線とすると, $\mathcal{C}$ の v での閉ファイバーの分類は次のようになります.

$\operatorname{ord}_v(a)$	a の合同条件			型	m	f	c
0	$1(v^3)$	$1(v^4)$		I_0^*	5	8	k_v
		$3+2\sqrt{-1}(v^4)$	$3 \pm 2\sqrt{-1}(v^6)$	II^*	9	4	0
			$7 \pm 2\sqrt{-1}(v^6)$	I_0	1	0	0
	$-1(v^3)$	$-1(v^4)$	$-1, 3(v^6)$	I_2^*	7	6	$\mathcal{O}_F/v^2$
			$-1+4\sqrt{-1}, 3+4\sqrt{-1}(v^6)$	I_2^*	7	6	k_v
		$1+2\sqrt{-1}(v^4)$		I_0^*	5	8	0
	$\pm\sqrt{-1}(v^3)$			II	1	12	0
1				III	2	14	k_v
2	$2\sqrt{-1}(v^4)$	$6\sqrt{-1}(v^5)$	$8+6\sqrt{-1}, 4+2\sqrt{-1}(v^7)$	I_4^*	9	10	$\mathcal{O}_F/v^2$
			$6\sqrt{-1}, 12+2\sqrt{-1}(v^7)$	I_4^*	9	10	k_v
		$2\sqrt{-1}(v^5)$	$12+6\sqrt{-1}, 2\sqrt{-1}(v^7)$	I_4^*	9	10	$\mathcal{O}_F/v^2$
			$4+6\sqrt{-1}, 8+2\sqrt{-1}(v^7)$	I_4^*	9	10	k_v
	$2(v^4)$	$2(v^5)$		I_2^*	7	12	k_v
		$6(v^5)$		I_2^*	7	12	$\mathcal{O}_F/v^2$
3				III^*	8	14	k_v

上の表で m は E の極小モデルの特殊ファイバーの幾何的既約成分の個数, $f = \mathrm{ord}_v(\mathfrak{N}_E)$ は E の導手 $\mathfrak{N}_E$ の v での指数, c は $A = E$ に関する群 $A_v/A_v^o(k_v) \subset A_v/A_v^o(\overline{k_v})$ の $\mathcal{O}_F$ 加群としての構造を表わします.

例 3.8. 同じく $A = E$ が楕円曲線の場合, v を F の素点, $\mathcal{C}'$ を E の $\mathcal{O}_v$ 上の極小 Weierstrass 方程式

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

で定義されるモデルとすると, E_v^0 は $\mathcal{C}'$ の閉ファイバーの滑らかな部分と標準的に同型となります. さらに $dx/(2y + a_1x + a_3)$ は $H^0(\mathcal{E} \times_X \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v, \Omega^1_{\mathcal{E}\times_X \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v})$ の生成元となります ([22]). E が v で極小とは限らない Weierstrass 方程式で与えられているとき, 例 3.7 でふれた Tate のアルゴリズム [55] を使うと v で極小となる E の Weierstrass 方程式を見つけることができます. 例えば例 3.7 持ち出した $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, $v|2$, $E : y^2 = x^3 + ax$, $0 \leq \mathrm{ord}_v(a) \leq 3$ の場合には, $v \not\equiv 7 \pm 2\sqrt{-1} (\bmod v^6)$ であれば方程式 $y^2 = x^3 + ax$ は v で極小となり, 残る $v \equiv 7 \pm 2\sqrt{-1} (\bmod v^6)$ の場合には E は v でよい還元を持ちます.

3.6 Birch-Swinnerton-Dyer 予想の主張

A についての Birch-Swinnerton-Dyer 予想は A の L 関数 $L(A, s)$ の $s = 1$ のふるまいに関する予想です. ところが $L(A, s)$ の定義に現れる Euler 積 (3.1) は $s = 1$ では絶対収束しません. そこでここ §3.6 では, Birch-Swinnerton-Dyer 予想を述べるために $L(A, s)$ について次の仮定をおきます.

(A) $L(A, s)$ は $s = 1$ を含む領域にまで解析接続される.

A の F 有理点の全体 $A(F)$ を A の Mordell-Weil 群とよびます. $A(F)$ は有限生成アーベル群となります ([57]). アーベル群 $A(F)$ の階数を r とおきます. Birch-Swinnerton-Dyer 予想には弱い形のものと強い形のものがありますが, 弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想とは次の予想のことです.

予想 3.9 (弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 [4, §1 (A)], [54, §1 (A)]). $\mathrm{ord}_{s=1}L(A, s) = r$.

強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想は弱い形の予想 3.9 を仮定した上で値

$$L^*(A, 1) := \lim_{s\to 1}(s - 1)^{-r}L(A, s)$$

の精密な記述を与える予想です. この予想を述べるために少し準備をします. まず A の Shafarevich-Tate 群もしくは Tate-Shafarevich 群とよばれるアーベル群 $Ш(A)$ を次で定義します. [1]

$$Ш(A) = \mathrm{Ker}\left[H^1(F, A(\overline{F})) \to \prod_v H^1(F_v, A(\overline{F}_v))\right]. \tag{3.5}$$

ここで F の分離閉包 $\overline{F}$, および F の各素点 v に対する F_v の分離閉包 $\overline{F}_v$ を $\overline{F} \subset \overline{F}_v$ を満たすように固定しました. 群 $Ш(A)$ に関して次の予想がなされています.

[1] 記号 Ш を出力するために東北大学の佐藤篤氏作成の `easywncy.sty` を使用しました.

予想 3.10. $Ш(A)$ は有限群である.

この予想 3.10 のことを Tate-Shafarevich 予想とよぶこともあります.

Birch-Swinnerton-Dyer 予想の主張を述べるためには必要ないのですが, あとで必要となるので A の Selmer 群をここで導入しておきます. 素数 p に対し, Selmer 群 $\mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(A) \subset H^1(F, A(\overline{F})\{p\})$ を準同型

$$H^1(F, A(\overline{F})\{p\}) \to H^1(F, A(\overline{F}))$$

による $Ш(A)$ の逆像として定義します. 整数 $m \geq 1$ に対し, $A(\overline{F})$ の部分群 $A(\overline{F})[m]$ のことを $A[m]$ と書くことにします. 整数 $n \geq 0$ に対し, 短完全系列

$$0 \to A[p^n] \to A(\overline{F}) \xrightarrow{p^n} A(\overline{F}) \to 0$$

より, Galois コホモロジーの長完全系列

$$\cdots \to A(F) \xrightarrow{p^n} A(F) \to H^1(F, A[p^n]) \to H^1(F, A(\overline{F})) \xrightarrow{p^n} H^1(F, A(\overline{F})) \to \cdots$$

が得られます. この完全系列の n についての帰納的極限をとることにより, 短完全系列

$$0 \to A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to H^1(F, A(\overline{F})\{p\}) \to H^1(F, A(\overline{F}))\{p\} \to 0$$

が得られます. これにより単完全系列

$$0 \to A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to \mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(A) \to Ш(A)\{p\} \to 0 \tag{3.6}$$

を得ます.

F の各素点 v に対し F_v の Haar 測度 μ_v をほとんど全ての有限素点 v に対し $\mu_v(\mathcal{O}_v) = 1$ を満たすように選びます. このとき $\mu := \prod_v \mu_v$ は $\mathbb{A}_F$ の Haar 測度を定めます. 0 でない $\omega \in H^0(A, \Omega^g_{A/F})$ をひとつとります. $\mathcal{A}$ を A の X 上の Néron モデルとします. F の各有限素点 v に対し, ω が $H^0(\mathcal{A} \times_X \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v, \Omega^g_{\mathcal{A}\times_X \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_v/\mathcal{O}_v})$ の生成元の a_v 倍になるような a_v を選び, $c_v := n_v|a_v|_v \cdot \mu_v(\mathcal{O}_v)^d$ とおきます. ここで $n_v = \sharp(A_v/A_v^o)(k_v)$ です. 各無限素点 v に対し, 実数 c_v を $c_v := \int_{A(F_v)} |\omega|_v \mu_v^d$ によって定めます. 個々の c_v の値は ω のとり方に依存しますが, F の全ての素点 v をわたる積 $\prod_v c_v$ は ω のとり方に依存しないことに注意しておきます.

例 3.11. 例 3.7, 3.8 で説明したことを合わせると, Weierstrass 方程式で与えられている大域体 F 上の楕円曲線 E に対して 値 $\prod_{v\nmid\infty} c_v$ を計算することはさほど困難なくできます.

予想 3.12 (強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 [4, §1 (B)], [54, §1 (B)])**.** 大域体 F 上のアーベル多様体 A に対し予想 *3.9, 3.10* が成り立ち, さらに上の記号の下, 等式

$$L^*(A,1) = \frac{\prod_v c_v}{\mu(F\backslash\mathbb{A}_F)^g} \cdot \frac{|\mathrm{disc}(h)| \cdot \sharp Ш(A)}{\sharp A(F)_{\mathrm{tors}} \cdot \sharp A^*(F)_{\mathrm{tors}}}$$

が成り立つ. ここで A^* は A の双対アーベル多様体であり, $\mathrm{disc}(h)$ は高さ対 $h(\ ,\ ) : A(F) \times A^*(F) \to \mathbb{R}$ の判別式である.

上の定理に出てきた高さ対 $h(\ ,\ )$ については §4.3 で定義を与えます. また $h(\ ,\ )$ の判別式 $\mathrm{disc}(h)$ とは, 指数有限の部分アーベル群 $B \subset A(F)$, $B' \subset A'(F)$ を B, B' が自由アーベル群になるようにとり, B の基底 $P_1, \ldots, P_r$, B' の基底 $P'_1, \ldots, P'_r$ を選んだとき, 式

$$\frac{\mathrm{disc}(h)}{\sharp(A(F)_{\mathrm{tors}}) \cdot \sharp(A^*(F)_{\mathrm{tors}})} = \frac{|\det(h(P_i, P'_j))|}{\sharp(A(F)/B) \cdot \sharp(A^*(F)/B')}$$

で定まる値のことです.

3.7 より弱い予想

強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想は特に次の主張を導きます.

1. $L(A, 1) \in \prod_{v|\infty} c_v \cdot \mathbb{Q}$.
2. $L^*(A, 1) \in \prod_{v|\infty} c_v \cdot \mathrm{disc}(h) \cdot \mathbb{Q}^\times$.

(1), (2) はそれぞれ Deligne の予想 [15, Conjecture 1.8], Beilinson の予想 [2, Conjecture 3.8] の特別な場合です. A が楕円モジュラ曲線のヤコビ多様体の中に現れるアーベル多様体の場合には主張 (1) を確かめることができます.

4 高さ対 (height pairing)

4.1 射影空間の高さ関数

F を大域体とします. $n \geq 1$ を整数, $\mathbb{P}^n$ を F 上の n 次元射影空間とします. $\mathbb{P}^n(F)$ 上の高さ関数 $h : \mathbb{P}^n(F) \to \mathbb{R}$ を, $x = [x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(F)$ に対し

$$h(x) := \frac{1}{[F:\mathbb{Q}]} \sum_v \max_{0 \leq i \leq n} (\log |x_i|_v)$$

とおくことによって定めます. ここで v は F のすべての素点を動きます.

4.2 アーベル多様体上の高さ関数

A を F 上のアーベル多様体とします. $\mathcal{L}$ を A 上の非常に豊富な直線束とし, $n+1 = \dim_F H^0(A, \mathcal{L})$ とおきます. $H^0(A, \mathcal{L})$ の基底を選ぶことにより, 標準的な埋め込み $|\mathcal{L}| : A \to \mathbb{P}^n$ が得られます. $h_{\mathcal{L}} := h \circ |\mathcal{L}| : A(\overline{F}) \to \mathbb{R}$ とおきます. $h_{\mathcal{L}}$ は有界関数の差を除いて $H^0(A, \mathcal{L})$ の基底の選び方に依存しません.

A 上の (非常に豊富とは限らない) 直線束 $\mathcal{L}$ に対しては, A 上の非常に豊富な直線束 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ を用いて, $\mathcal{L}$ を $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes -1}$ の形に書きます. $h_{\mathcal{L}} = h_{\mathcal{L}_1} - h_{\mathcal{L}_2}$ とおくと, $h_{\mathcal{L}}$ は有界関数の差を除いて表示 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^{\otimes -1}$ の取り方に依存しません.

4.3 Néron-Tate の標準的高さ関数

A を F 上のアーベル多様体, $\mathcal{L}$ を A 上の直線束とすると, 関数 $q_{\mathcal{L}} : A(F) \to \mathbb{R}$ であって, 条件

- $q_{\mathcal{L}} - h_{\mathcal{L}}$ は有界.
- $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{L}} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(q_{\mathcal{L}}(x+y) - q_{\mathcal{L}}(x) - q_{\mathcal{L}}(y))$ は双加法的.

を満たすものが唯一つ存在します. この関数 $q_{\mathcal{L}}$ を Néron-Tate の標準的高さ関数といいます. さらに $\mathcal{L}$ が対称的, すなわち $(-1)^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}$ であれば $(A(F), q_{\mathcal{L}})$ は $\mathbb{Z}$ 上の 2 次形式となります.

4.4 Néron-Tate の高さ対

$\mathcal{P}$ を $A \times A^*$ 上の Poincaré 直線束とします. $(x, y) \in A(F) \times A^*(F)$ に対し $h(x, y) := q_{\mathcal{P}}(x, y)$ とおきます. $h(\ ,\ ) : A(F) \times A^*(F) \to \mathbb{R}$ は双加法的となります. これを Néron-Tate の高さ対とよびます.

4.5 Néron シンボル

A 上の因子であって, 代数的に 0 と同値であるものの全体を $\mathrm{Div}^0(A)$ とおきます. A の閉点を基底とする自由アーベル群を $Z_0(A)$ で表わし, $Z_0(A)$ の元 $Z=\sum_i n_i P_i$ であって, $\sum_i n_i[\kappa(P_i):F]=0$ をみたすもの全体のなす $Z_0(A)$ の部分群を $Z_0(A)^0 \subset Z_0(A)$ で表わします.

$D \in \mathrm{Div}^0(A)$, $Z \in Z_0(A)^0$ が $\mathrm{Supp}(D)\cap\mathrm{Supp}(Z)=\emptyset$ を満たすとします. このとき $h(Z,D)$ は和 $h(Z,D)=\sum_v h(Z,D)_v$ の形に分解されます ([41, §14], [32, THÉORÈME 5]). ここで $h(\ ,\ )_v$ は以下で特徴づけられる関数であり, Néron シンボルとよばれます (以下の特徴づけは Lang [32, THÉORÈME 4] によります).

1. $h(\ ,\ )_v$ は, $D\in\mathrm{Div}^0(A_{F_v})$, $Z\in Z_0(A_{F_v})^0$ であって $\mathrm{Supp}(D)\cap\mathrm{Supp}(Z)=\emptyset$ を満たすものに対し実数 $h(Z,D)_v\in\mathbb{R}$ を対応させる関数である (ここで $\mathrm{Div}^0(A_{F_v})$, $Z_0(A_{F_v})^0$ は $\mathrm{Div}^0(A)$, $Z_0(A)^0$ と同様の方法で定義されるアーベル群である).

2. $h(\ ,\ )_v$ は定義されている範囲で双加法的である.

3. $D=\mathrm{div}(f)$ のとき $h(Z,D)_v=-\log|f(Z)|_v$ が成り立つ. ここで $f(Z)$ は以下で与えられる: $Z=\sum_i n_i P_i\in Z_0(A_{F_v})^0$ とおき, f の $\kappa(P_i)$ における像を $f(P_i)$ で表わすとき, $f(Z):=\prod_i \mathrm{N}_{\kappa(P_i)/F_v}(f(P_i))$.

4. $a\in A(F_v)$ に対し, $t_a : A_{F_v}\xrightarrow{\cong}A_{F_v}$ で a による平行移動を表わすことにすると, $h(Z,D)_v=h(t_a^*Z,t_a^*D)_v$ が成り立つ.

5. 各 $D\in\mathrm{Div}^0(A_{F_v})$, $x_0\in A(F_v)\setminus\mathrm{Supp}(D)$ に対し, $A(F_v)\setminus\mathrm{Supp}(D)$ 上の関数 $x\mapsto h(x-x_0,D)_v$ は $A(F_v)\setminus\mathrm{Supp}(D)$ の v 進位相に関して局所有界である.

4.6 アーベル多様体でない場合への予想の一般化 (Bloch-Beilinson)

4.6.1 Hasse-Weil L 関数

X を大域体 F 上の滑らかかつ射影的な代数多様体とします. 適当な予想を仮定すると, 整数 $i\geq 0$ に対し, X の Hasse-Weil L 関数とよばれる複素数 s についての関数 $L(h^i(X),s)$ が, 式 (3.1) と同様の Euler 積

$$L(h^i(X),s):=\prod_v P_v(h^i(X),q_v^{-s})^{-1} \tag{4.1}$$

によって定まります. ここで $P_v(h^i(X),T)$ は定数項が 1 の T についてのとある整数係数多項式です. Euler 積 (4.1) は $\mathrm{Re}(s)>1+\frac{i}{2}$ で絶対収束します. また (3.2) と類似の補正をすることにより関数 $\Lambda(h^i(X),s)$ を定めることができ (詳細は [49] をご参照ください), 関数 $\Lambda(h^i(X),s)$ について予想 3.2 と同様の予想がなされています.

多項式 $P_v(h^i(X),T)$ は, §3.3 で多項式 $P_v(A,T)$ を定めたときと同様に, k_v の標数と異なる素数 ℓ をとって

$$P_v(h^i(X),T):=\det(1-\mathrm{Frob}_vT;H^i_{\mathrm{et}}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}_\ell)^{I_v}) \tag{4.2}$$

とすることによって定めます. 前の段落で適当な予想と述べたものは, 正確には式 (4.2) の右辺が ℓ のとり方に依存しない整数係数の多項式となるという予想です. この予想は X が v でよい還元を持つ場合には証明されています.

4.6.2 Chow 群上の高さ対

X を $\mathbb{Q}$ 上の滑らかかつ射影的な d 次元代数多様体とします. 整数 $n \geq 0$ に対し, X の余次元 n の整型 (integral) 閉部分スキームの集合を基底とする自由アーベル群を $Z^n(X)$ と書きます. $Z^n(X)$ の元を X 上の余次元 n のサイクルとよびます. $Z^n(X)$ を 0 に有理同値なサイクルのなす部分群で割って得られるアーベル群を X の n 次 Chow 群とよび, 記号 $\mathrm{CH}^n(X)$ で表わします. $n = 1$ のとき $\mathrm{CH}^n(X) = \mathrm{Pic}(X)$ となります.

整数 i およびアーベル群 M に対して, $H^i(X(\mathbb{C}), M)$ で複素多様体 $X(\mathbb{C})$ の M 係数 i 次 Betti コホモロジー (特異コホモロジー) を表わします. また整数 i および部分アーベル群 $M \subset \mathbb{C}$ に対し, $M(i) := (2\pi\sqrt{-1})^i M \subset \mathbb{C}$ とおきます. このとき, サイクル写像とよばれる標準的な準同型

$$Z^n(X) \twoheadrightarrow \mathrm{CH}^n(X) \xrightarrow{\mathrm{cl}} H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(n))$$

が存在します. $Z^n(X)$ の元 Z がホモロジー論的に 0 と同値であるとは, この準同型による Z の $H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}(n))$ における像が 0 になることをいいます. また準同型 cl の核を $\mathrm{CH}^n(X)^0$ とおきます.

X の $\mathbb{Z}$ 上のモデル $\mathfrak{X}$ であって, 正則かつ $\mathbb{Z}$ 上平坦射影的となるものが存在すると仮定します. $1 \leq n \leq d$ とします. Beilinson [3, §4], Bloch [6], Gillet-Soulé [19, THÉORÈME 3 のあとの Remarques] は独立に, とある予想 ([6, Assumption 2], [3, conjecture 2.2.1, conjecture 2.2.3]) を仮定した下で, 高さ対とよばれる双線型写像

$$h(\ ,\ ) : \mathrm{CH}^n(X)^0_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{CH}^{d+1-n}(X)^0_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R} \tag{4.3}$$

を構成しました. [3], [6], [19] の構成法はそれぞれ, コホモロジー論的手法, ホモトピー論的手法, Arakelov 幾何的手法に基づくものです. [3] の構成したものと [19] の構成したものは一致することが知られていますが, [6] の定義と [3] の定義とが一致するかどうか筆者は知りません. [19] の方法は後の論文 [20] で数論的 Chow 群の交叉理論という形に結実しました.

本稿では §4.6.4 で [19] の方法に基づいた写像 (4.3) の構成について説明します. 次の §4.6.3 ではその説明に必要な概念をいくつか導入します.

4.6.3 Green カレント

X を $\mathbb{Q}$ 上または $\mathbb{R}$ 上の滑らかかつ射影的な d 次元スキームとします. 整数 $p, q \geq 0$ に対し, $X(\mathbb{C})$ 上の $\mathbb{C}$ 値 (p, q) 形式のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $A^{p,q}(X(\mathbb{C}))$ とおきます. $A^{p,q}(X(\mathbb{C}))$ から $\mathbb{C}$ への連続準同型全体のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間を $D_{p,q}(X(\mathbb{C}))$ とおきます. ここでいう連続は Schwartz 超関数を定義する際の連続と同様の意味で用いています. $D^{p,q}(X(\mathbb{C})) := D_{d-p,d-q}(X(\mathbb{C}))$ とおくと, 自然な埋め込み $A^{p,q}(X(\mathbb{C})) \hookrightarrow D^{p,q}(X(\mathbb{C}))$ が

存在します．この埋め込みによって $A^{p,q}(X(\mathbb{C}))$ を $D^{p,q}(X(\mathbb{C}))$ の部分空間とみなします．$D^{p,q}(X(\mathbb{C}))$ の元のことを $X(\mathbb{C})$ 上の (p,q) カレントとよびます．

$$(-1)^{p+q+1}\partial : A^{d-p-1,d-q}(X(\mathbb{C})) \to A^{d-p,d-q}$$

および

$$(-1)^{p+q+1}\overline{\partial} : A^{d-p,d-q-1}(X(\mathbb{C})) \to A^{d-p,d-q}$$

の引き起こす準同型 $D^{p,q}(X(\mathbb{C})) \to D^{p+1,q}(X(\mathbb{C}))$, $D^{p,q}(X(\mathbb{C})) \to D^{p,q+1}(X(\mathbb{C}))$ をそれぞれ $\partial, \overline{\partial}$ で表わします．複素共役 $F_\infty : X(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} X(\mathbb{C})$ による微分形式の引き戻しは $\mathbb{C}$ 線型な同型

$$F_\infty^* : A^{p,q}(X(\mathbb{C})) \xrightarrow{\cong} A^{q,p}(X(\mathbb{C})),\ F_\infty^* : D^{p,q}(X(\mathbb{C})) \xrightarrow{\cong} D^{q,p}(X(\mathbb{C}))$$

を引き起こします．整数 $p \geq 0$ に対し

$$A^{p,p}(X) = \{\omega \in A^{p,p}(X(\mathbb{C})) \mid F_\infty^*\omega = (-1)^p\omega\},$$

$$D^{p,p}(X) = \{T \in D^{p,p}(X(\mathbb{C})) \mid F_\infty^* T = (-1)^p T\}$$

とおきます．定義により $A^{p,p}(X)$ は $D^{p,p}(X)$ の部分空間とみなせます．

$Y \subset X$ を整型な余次元 p の閉部分スキームとします．$Y(\mathbb{C})$ (の非特異部分) 上で積分するという操作は $D^{p,p}(X)$ の元 δ_Y を定めます．Y の Green カレントとは，$g_Y \in D^{p-1,p-1}(X)$ であって等式

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\overline{\partial}g_Y - \delta_Y \in A^{p,p}(X)$$

を満たすもののことをいいます．任意の整型な余次元 p の閉部分スキーム $Y \subset X$ に対して Y の Green カレントが存在することが知られています．

4.6.4 Chow 群上の高さ対の構成

X, d を §4.6.2 の通りとします ($\mathfrak{X}$ の存在も仮定します)．$1 \leq n \leq d$ とします．$Z = \sum_i n_i Z_i \in Z^n(X)$, $W = \sum_j m_j W_j \in Z^{d+1-n}(X)$ をホモロジー的に 0 と同値なサイクルとします．$\mathrm{Supp}(Z) \cap \mathrm{Supp}(W) = \emptyset$ と仮定します．$\mathfrak{Z}_i$, $\mathfrak{W}_j$ をそれぞれ Z_i, W_j の $\mathfrak{X}$ における閉包とし，

$$h_f(Z_i, W_j) := \sum_{i',j'} (-1)^{i'+j'} \log(\sharp H^{i'}(\mathfrak{X}, \underline{\mathrm{Tor}}_{j'}^{\mathcal{O}_\mathfrak{X}}(\mathcal{O}_{Z_i}, \mathcal{O}_{W_j}))$$

とおきます．W がホモロジー論的に 0 と同値であることから，各 j に対し W_j の Green カレント g_{W_j} を，等式

$$\sum_j m_j \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\partial\overline{\partial}g_Y - \delta_Y\right) = 0$$

を満たすようにとることができます．そこで各 i, j に対し

$$h_\infty(Z_i, W_j) := -\int_{Z_i(\mathbb{C})} g_{W_j}$$

とおきます. Z, W がホモロジー論的に 0 と同値であることから,

$$\sum_{i,j} n_i m_j h_\infty(Z_i, W_j)$$

が Green カレント g_{W_j} のとり方に依存しないことがわかります. この h_f, h_∞ を用いて $h(Z,W) \in \mathbb{R}$ を

$$h(Z,W) = \sum_{i,j} n_i m_j (h_f(Z_i, W_j) + h_\infty(Z_i, W_j))$$

によって定めます. 適当な予想 ([3, conjecture 2.2.1, conjecture 2.2.3]) を仮定すると, $h(Z,W)$ が Z, W の $\mathrm{CH}^n(X)^0$, $\mathrm{CH}^{d+1-n}(X)^0$ における類にしか依存しないことがわかります.

4.6.5 予想

$X, d, \mathfrak{X}$ を §4.6.2 の通り, $1 \le n \le d$ とします.

予想 4.1. *n を $0 \le n \le d+1$ を満たす整数とすると, $\mathrm{CH}^n(X)^0_{\mathbb{Q}}$, $\mathrm{CH}^{d+1-n}(X)^0_{\mathbb{Q}}$ は有限次元で, $h(\ ,\ ) : \mathrm{CH}^n(X)^0_{\mathbb{Q}} \times \mathrm{CH}^{d+1-n}(X)^0_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$ は非退化となる.*

予想 4.2 (Swinnerton-Dyer). *$\mathrm{ord}_{s=n} L(h^{2n-1}(X), s) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^n(X)^0_{\mathbb{Q}}$ が成り立つ.*

複素共役 $F_\infty : X(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} X(\mathbb{C})$ は自己同型 $F_\infty^* : H^i(X(\mathbb{C}), M) \to H^i(X(\mathbb{C}), M)$ の引き起こします. $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対し, F^* が ϵ 倍で作用する部分を $H^i(X(\mathbb{C}), M)^\epsilon \subset H^i(X(\mathbb{C}), M)$ で表わします.

n を $0 \le n \le d+1$ を満たす整数とします. このとき合成

$$I^+ : H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})^{(-1)^n} \hookrightarrow H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}) \twoheadrightarrow H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})/\mathrm{Fil}^n$$

は $\mathbb{C}$ ベクトル空間の同型となります. 同型 I^+ の定義域 $H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})^{(-1)^n}$ および値域 $H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})/\mathrm{Fil}^n$ は, それぞれ標準的な $\mathbb{Q}$ 構造 $H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), (2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{Q})^{(-1)^n}$, $H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Q})/\mathrm{Fil}^n$ を持ちます. そこで $\det I^+ \in \mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times$ を以下のようにして定義します: まず $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), (2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{Q})^{(-1)^n}$, $H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Q})/\mathrm{Fil}^n$ の基底をとります. この基底を用いて同型 I^+ を $\mathbb{C}$ 係数の正則行列として表示します. この行列の行列式の $\mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times$ における類を $\det I^+$ とおきます. $\det I^+$ は $H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), (2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{Q})^{(-1)^n}$, $H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Q})/\mathrm{Fil}^n$ の基底の取り方に依存しません. また同型 I^+ が $H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})^{(-1)^n}$ の $\mathbb{R}$ 部分空間 $H^{2n-1}(X(\mathbb{C}), (2\pi\sqrt{-1})^n\mathbb{R})^{(-1)^n}$ を $H^{2n-1}_{\mathrm{dR}}(X_{\mathbb{R}}/\mathbb{R})/\mathrm{Fil}^n$ に送ることから, $\det I^+$ は $\mathbb{R}^\times/\mathbb{Q}^\times \subset \mathbb{C}^\times/\mathbb{Q}^\times$ に属することがわかります. 次の 2 つの予想はそれぞれ Deligne の予想 [15, Conjecture 1.8], Beilinson の予想 [2, Section 3] の特別な場合です.

予想 4.3 (Deligne の予想 [15, Conjecture 1.8] の特別な場合). *$L(h^{2n-1}(X), n) \in \det I^+ \cdot \mathbb{Q}$.*

予想 4.4 (Beilinson の予想 [2, Section 3] の特別な場合). *$r = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{CH}^n(X)^0_{\mathbb{Q}}$ とおくと,*
$\lim_{s\to n} \frac{L(h^{2n-1}(X),s)}{(s-1)^r} \in \det I^+ \cdot \mathrm{disc}(h) \cdot \mathbb{Q}^\times$.

注 4.5. Beilinson の予想 [2, Section 3] は, 任意の $n \geq 0$, 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対する $L(h^n(X), s)$ の $s = m$ でのふるまいに関する予想です.

注 4.6. Beilinson の予想 [2, Section 3] を Deligne の予想 [15, Conjecture 1.8] の混合モチーフに対するある種の拡張と解釈することもできます ([47]).

5 Shafarevich-Tate 群 $\text{Ш}(A)$

F を大域体, A を F 上のアーベル多様体とします. $\text{Ш}(A)$ の定義は式 (3.5) に与えたように

$$\text{Ш}(A) = \mathrm{Ker}[H^1(F, A(\overline{F})) \to \prod_v H^1(F_v, A(\overline{F}_v))]$$

です. $\text{Ш}(A)$ は次のように書くこともできます.

$$\begin{aligned}\text{Ш}(A) &= \mathrm{Ker}[H^1(F, A(\overline{F})) \to \textstyle\bigoplus_v H^1(F_v, A(\overline{F}_v))] \\ &= \mathrm{Ker}[H^1(F, A(\overline{F})) \to H^1(F_v, A(\mathbb{A} \otimes \mathbb{Q}\overline{F}))] \\ &= \mathrm{Ker}[H^1(F, A(\overline{F})) \to \textstyle\prod_v H^1(G_v, A(\overline{F}))] \\ &= \mathrm{Ker}[H^1(G_{F,S}, A(F_S)) \to \textstyle\bigoplus_{v\in S} H^1(G_v, A(\overline{F}))]\end{aligned}$$

ここで $\mathbb{A}$ は ($\mathbb{Q}$ の) adele 環, S は F の素点の集合で, 無限素点と悪い素点をすべて含むもの, F_S は S の外不分岐な $\overline{F}/F$ の最大部分拡大体, $G_{F,S} = \mathrm{Gal}(F_S/F)$ です.

定義から $\text{Ш}(A)$ は捻れアーベル群です. 上記最後の記述により, $\text{Ш}(A)$ の Pontryagin 双対 $\text{Ш}(A)^\vee = \mathrm{Hom}(\text{Ш}(A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は位相的に有限生成な副有限アーベル群となります. 特に任意の整数 m に対し, $\text{Ш}(A)[m]$ は有限群です.

予想 3.10 に述べたように $\text{Ш}(A)$ は有限群であると予想されています. $L(A,s)$ が GL_2 の保型 L 関数と結びつくときには, Euler 系の理論を用いると $\text{Ш}(A)$ の有限性を証明できる場合があります ([28], [29], [25], [30], [10]).

Cassels-Tate 対 ([11], [53], [39]) $\text{Ш}(A) \times \text{Ш}(A^*) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の構成を復習します. 構成には主に以下の 2 通りの方法があります.

5.1 Cassels-Tate 対の構成 (その 1)

$a \in \text{Ш}(A)$ とします. P_a を a に対応する A 捻子 (torsor) とし, $Q_a := \overline{F}(P_{a,\overline{F}})^\times/\overline{F}^\times$ とおきます (ここで $P_{a,\overline{F}} = (P_a)_{\overline{F}}$ です). つまり Q_a は $P_{a,\overline{F}}$ の主因子のなすアーベル群です. 短完全系列

$$0 \to Q_a \to \mathrm{Div}^0(P_{a,\overline{F}}) \to \mathrm{Pic}^0(P_{a,\overline{F}}) \to 0$$

および標準的な同型 $\mathrm{Pic}^0(P_{a,\overline{F}}) \cong \mathrm{Pic}^0(A_{\overline{F}}) \cong A^*(\overline{F})$ により, Galois コホモロジーの連結準同型 $H^1(F, A^*(\overline{F})) \to H^2(F, Q_a)$ が得られます. F の各素点 v に対し, $Q_{a,v} = \overline{F}_v(P_{a,\overline{F}_v})^\times/\overline{F}_v^\times$ とおきます. 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^1(F, A^*(\overline{F})) & \longrightarrow & H^2(F, Q_a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v H^1(F_v, A^*(\overline{F}_v)) & \longrightarrow & \prod_v H^2(F_v, Q_{a,v}) \end{array}$$

により, 準同型

(5.1) $$\text{Ш}(A^*) \to \text{Ш}^2(Q_a) := \mathrm{Ker}[H^2(F, Q_a) \to \bigoplus_v H^2(F_v, Q_{a,v})]$$

が得られます. 一方, 短完全系列 $0 \to \overline{F}^{\times} \to \overline{F}(P_{a,\overline{F}})^{\times} \to Q_a \to 0$ より図式

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathrm{Br}(F) & \longrightarrow & H^2(F, \overline{F}(P_{a,\overline{F}})^{\times}) & \longrightarrow & H^2(F, Q_a) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_v \mathrm{Br}(F_v) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^2(F_v, \overline{F}_v(P_{a,\overline{F}_v})^{\times}) & \longrightarrow & \bigoplus_v H^2(F_v, Q_{a,v}) & & \end{array}$$

が得られます. したがって蛇の補題により準同型

$$Ш^2(Q_a) \to \mathrm{Coker}[\mathrm{Br}(F) \to \bigoplus_v \mathrm{Br}(F_v)] \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \tag{5.2}$$

を得ます. 準同型 (5.1) と (5.2) との合成 $Ш(A^*) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ による $a' \in Ш(A^*)$ の行き先を $\langle a, a' \rangle$ とおくことによって $\langle\ ,\ \rangle$ が構成されます.

5.2 Cassels-Tate 対の構成 (その 2)

まず各整数 $m \geq 1$ に対し, 対

$$Ш(A)[m] \times Ш(A^*)[m] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を構成します.

$a \in Ш(A)[m]$, $a' \in Ш(A^*)[m]$ とします. $b \in H^1(F, A[m])$, $b' \in H^1(F, A^*[m])$ をそれぞれ a, a' の持ち上げとします. F の素点 v に対し, $b_v \in H^1(F_v, A[m])$ を b の v における分解群 G_v への制限とします. 各 b_v はある $\widetilde{b_v} \in H^1(F_v, A[m^2])$ に持ち上がります. $\beta \in Z^1(F, A[m])$, $\beta' \in Z^1(F, A^*[m])$, $\widetilde{\beta_v} \in Z^1(F_v, A[m^2])$ をそれぞれ b, b', $\widetilde{b_v}$ を代表する 1 コサイクルとします. $\widetilde{\beta} \in C^1(F, A[m^2])$ を β の 1 コチェインとしての持ち上げとすると, $d\widetilde{\beta} \in Z^2(F, A[m])$ となります. ($d\widetilde{\beta}$ の定義から, $d\widetilde{\beta}$ の $H^2(F, A[m])$ における類は Bockstein 準同型 $H^1(F, A[m]) \to H^2(F, A[m^2])$, すなわち短完全系列

$$0 \to A[m] \to A[m^2] \to A[m] \to 0$$

が誘導する Galois コホモロジーの境界準同型 $H^1(F, A[m]) \to H^2(F, A[m^2])$, による b の像に一致します.) $d\widetilde{\beta} \cup \beta' \in Z^3(F, \mathbb{G}_m)$ を考えます. $H^3(F, \mathbb{G}_m) = 0$ よりある $\epsilon \in C^2(F, \mathbb{G}_m)$ が存在して $d\widetilde{\beta} \cup \beta' = d\epsilon$ の形に書けます. $(\widetilde{\beta})_v \in C^1(F_v, A[m^2])$, $\beta'_v \in Z^1(F_v, A^*[m])$, $\epsilon_v \in C^2(F_v, \mathbb{G}_m)$ をそれぞれ $\widetilde{\beta}$, β', ϵ の G_v への制限とします. $\widetilde{\beta_v} - (\widetilde{\beta})_v \in C^1(F_v, A[m])$ となることに注意すると,

$$\gamma_v := (\widetilde{\beta_v} - (\widetilde{\beta})_v) \cup \beta'_v \in C^2(F_v, \mathbb{G}_m)$$

が考えられます. 定義から直ちに $d\gamma_v = d\epsilon_v$ となることがわかるため, $\gamma_v - \epsilon_v$ は $Z^2(F_v, \mathbb{G}_m)$ の元を定めます. そこで

$$\langle a, a' \rangle := \sum_v \mathrm{inv}_v(\gamma_v - \epsilon_v) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

とおきます. m' が m の倍数のとき, 図式

$$\begin{array}{ccccc} Ш(A)[m] & \times & Ш(A^*)[m] & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ Ш(A)[m'] & \times & Ш(A^*)[m'] & \xrightarrow{\langle\ ,\ \rangle} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

は可換となります. $Ш(A)$, $Ш(A^*)$ は捻れアーベル群なので, 帰納的極限をとることによって対 $Ш(A)[m] \times Ш(A^*)[m] \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が得られます. この対は §5.1 で構成した対 $\langle\ ,\ \rangle$ と一致します (証明は [44, Section 12] をご参照ください).

定理 5.1 (Cassels [11, Theorem 1.1], Tate [53, THEOREM 3.2]). *Cassels-Tate* 対は完全対

$$Ш(A)_{\mathrm{red}} \times Ш(A^*)_{\mathrm{red}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を誘導する.

5.3 元 $c_\lambda \in Ш(A^*)$

$\lambda : A \to A^*$ を A の偏極とします. λ に対応する $\mathrm{NS}(A_{\overline{F}})^{G_F}$ の元を同じ記号 λ で表わします. λ は準同型 $\lambda_* : Ш(A) \to Ш(A^*)$ を誘導します. この λ_* を用いて双加法的写像

$$\langle\ ,\ \rangle_\lambda : Ш(A) \times Ш(A) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を $\langle a, b\rangle_\lambda := \langle a, \lambda_*(b)\rangle$ によって定義します.

短完全系列

$$0 \to A^*(\overline{F}) \to \mathrm{Pic}(A_{\overline{F}}) \to \mathrm{NS}(A_{\overline{F}}) \to 0$$

が誘導する Galois コホモロジーの連結準同型 $\mathrm{NS}(A_{\overline{F}})^{G_F} \to H^1(F, A^*(\overline{F}))$ を考えます. この連結準同型による $\lambda \in \mathrm{NS}(A_{\overline{F}})^{G_F}$ の行き先を $c_\lambda \in H^1(F, A^*(\overline{F}))$ とおきます.

注 5.2. $\mathcal{L}$ を $A \times A^*$ 上の Poincaré 直線束の $(\mathrm{id}, \lambda) : A \to A \times A^*$ による引き戻しとすると, $\mathcal{L}$ の定める射 $A \to A^*$ は 2λ に一致します. このことより $2c_\lambda = 0$ であることがわかります.

命題 5.3 (Poonen-Stoll [44, Corollary 2]). 上で定めた $c_\lambda \in H^1(F, A^*(\overline{F}))$ は $Ш(A^*) \subset H^1(F, A^*(\overline{F}))$ に属する.

(証明) v を F の素点とします. 短完全系列

$$0 \to A^*(\overline{F}_v) \to \mathrm{Pic}(A_{\overline{F}_v}) \to \mathrm{NS}(A_{\overline{F}_v}) \to 0 \tag{5.3}$$

が誘導する Galois コホモロジーの連結準同型 $\mathrm{NS}(A_{\overline{F}_v})^{G_v} \to H^1(F_v, A^*(\overline{F}_v))$ が 0 準同型であることをいえば十分です. 簡単のため v を有限素点とします. Tate [53] の双対性が引き起こす同型 $H^1(F_v, A^*(\overline{F}_v)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(A(F_v), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は $H^1(F_v, A^*(\overline{F}_v)) \to H^1(F_v, \mathrm{Pic}(A_{\overline{F}_v}))$ の像を経由するので, $H^1(F_v, A^*(\overline{F}_v)) \to H^1(F_v, \mathrm{Pic}(A_{\overline{F}_v}))$ は単射です. したがって, 短完全系列 (5.3) が誘導する Galois コホモロジーの長完全系列から求める主張が得られます. □

定理 5.4 (Poonen-Stoll [44, Theorem 5]). A を大域体 F 上の偏極アーベル多様体, $\lambda : A \to A^*$ を A の偏極とする．$c_\lambda \in Ш(A^*)$ を上で定めた元とする．このとき任意の $a \in Ш(A)$ に対し, $\langle a, a\rangle_\lambda = \langle a, c_\lambda\rangle$ が成り立つ.

(証明) $a \in Ш(A)$ とします. P を a に対応する A 捻子とします. $D \in \mathrm{Div}(A_{\overline{F}})$ を, λ を与える因子とします. $x \in P(\overline{F})$ を取ります. 原点を x に送ることにより同型 $A_{\overline{F}} \cong P_{\overline{F}}$ を得ます. $D' \in \mathrm{Div}(P_{\overline{F}})$ を, この同型のもと D に対応する因子とします. このとき $\lambda(a) - c_\lambda$ は 1 コサイクル

$$G_F \ni \sigma \mapsto \sigma(D') - D' \in \mathrm{Pic}^0(P_{\overline{F}}) \cong \mathrm{Pic}^0(A_{\overline{F}})$$

の類に一致します. したがって $\langle\ ,\ \rangle$ の定義により, $\langle a, \lambda(a) - c_\lambda\rangle = 0$ が成り立ちます. □

系 5.5 (Poonen-Stoll [44, Corollary 6]). $\langle\ ,\ \rangle_\lambda$ は反対称である, すなわち $\langle a, b\rangle = -\langle b, a\rangle$ が成り立つ.

A が主偏極 $\lambda : A \xrightarrow{\cong} A^*$ をもつとき, λ は完全対 $\langle\ ,\ \rangle_\lambda : Ш(A)_{\mathrm{red}} \times Ш(A)_{\mathrm{red}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を誘導します. したがって各素数 $p \geq 3$ に対し $\sharp Ш(A)_{\mathrm{red}}\{p\}$ は平方数となります. 特に $Ш(A)_{\mathrm{red}}$ が有限群であれば, $\sharp Ш(A)_{\mathrm{red}}$ は平方数または平方数の 2 倍です.

系 5.6 (Poonen-Stoll [44, Theorem 8] の一部分). A が主偏極 $\lambda : A \xrightarrow{\cong} A^*$ を持つとし, $c := \lambda^{-1}(c_\lambda)$ とおく. このとき, $\sharp Ш(A)_{\mathrm{red}}\{2\}$ が平方数であることと $\langle c, c\rangle_\lambda = 0$ となることとは同値である.

5.4 曲線のヤコビ多様体の場合

C を F 上滑らか射影的かつ幾何学的に連結な代数曲線とします. g を C の種数, $J = \mathrm{Jac}(C)$ を C のヤコビ多様体とします.

J は標準的な主偏極 $\lambda : J \to J^*$ をもちます. この λ はテータ因子 $\Theta \subset \mathrm{Pic}^{g-1}_{C/F}$ を同型 $J_{\overline{F}} \cong (\mathrm{Pic}^{g-1}_{C/F})_{\overline{F}}$ で引き戻した $J_{\overline{F}}$ 上の因子によって与えられます. このことより $c = [\mathrm{Pic}^{g-1}_{C/F}]$ であることがわかります.

$\langle c, c\rangle_\lambda$ の計算を行います. F の各素点 v に対し, 図式

$$1 \to \overline{F}_v^\times \to \overline{F}_v(C_{\overline{F}_v})^\times \to \mathrm{Div}(C_{\overline{F}_v}) \to \mathrm{Pic}(C_{\overline{F}_v}) \to 0 \tag{5.4}$$

を考えます $c = [\mathrm{Pic}^{g-1}_{C/F}] \in Ш(J)$ であることから, F_v 有理点 $x_v \in \mathrm{Pic}^{g-1}_{C/F}(F_v)$ が存在します. 1 を x_v に送る準同型 $\mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}(C_{\overline{F}_v})$ によって図式 (5.4) を引き戻すことにより, $H^2(F_v, \overline{F}_v^\times)$ の元が得られます. したがって標準的な同型 $H^2(F_v, \overline{F}_v^\times) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ により元 $\phi_v(x_v) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が得られます.

命題 5.7. このとき $\langle c, c\rangle_\lambda = (1-g)\sum_v \phi_v(x_v)$ が成り立つ. □

命題 5.8. $(2g-2)\phi_v(x_v) = 0$ が成り立つ. さらに $(g-1)\phi_v(x_v) = 0$ であるための必要十分条件は $\mathrm{Pic}^{g-1}(C_{F_v})$ が空集合でないことである. □

$\mathrm{Pic}^{g-1}(C_{F_v})$ は $\mathrm{Pic}^{g-1}_{C/F}(F_v)$ の部分集合とみなせますが, 両者は必ずしも一致しないことに注意しておきます.

系 5.9 (Poonen-Stoll [44, Theorem 11]). $Ш(J)_{\mathrm{red}}\{2\}$ が平方数となるための必要十分条件は $\mathrm{Pic}^{g-1}(C_{F_v}) = \emptyset$ となる F の素点 v がちょうど偶数個存在することである.

系 5.9 より特に C が F 有理点をもてば, $Ш(J)_{\mathrm{red}}\{2\}$ は平方数となります.

注 5.10. v を F の有限素点, $\mathcal{C}$ を C_{F_v} の極小正則固有モデル, Y を $\mathcal{C}$ の閉ファイバーとすると,

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{Pic}^n(C_{F_v}) \neq \emptyset\} = \sum_{E \in \mathrm{Irr}(Y_{\mathrm{red}})} m_E f_E \mathbb{Z}$$

が成り立ちます. ここで m_E は Y における E の重複度であり, f_E は E の関数体の定数体の k_v 上の次数です.

系 5.9 を用いると $Ш(J)_{\mathrm{red}}\{2\}$ が平方数にならないような C の例を構成することができます. 以下にそのような C の例をいくつか挙げます. 論文 [44, Section 10] では, 下に挙げるもの外にもいくつか例が与えられています.

例 5.11 (Poonen-Stoll [44, Proposition 26]). g を 2 以上の整数, t を正の整数とします. 式 $y^2 = -(x^{2g+2} + x + t)$ で与えられる $\mathbb{Q}$ 上の種数 g の超楕円曲線を C とすると, $Ш(J)_{\mathrm{red}}\{2\}$ は平方数になりません.

例 5.12 (Jordan-Livné [24, Theorem 1]). p, q を $p \equiv 5 \pmod{24}$, $q \equiv 5 \pmod{12}$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ を満たす異なる 2 つの素数とします. 判別式 pq の $\mathbb{Q}$ 上の 4 元数環に付随する志村曲線を Atkin-Lehner 対合 w_p の作用で割った曲線を C とすると, $Ш(J)_{\mathrm{red}}\{2\}$ は平方数になりません.

5.5 Bloch-加藤 [7, Section 5] による $Ш(A)$ の記述

$Ш(A)$ は捻れアーベル群なので, 標準的な直和分解

$$Ш(A) = \bigoplus_{\ell:\text{素数}} Ш(A)\{\ell\}$$

を持ちます. 以下 §5.5 では $\ell \neq \mathrm{char}(F)$ と仮定します. F の各有限素点 v に対し, $p := \mathrm{char}(k_v)$ とおき, 部分空間 $H^1_f(F_v, V_\ell A) \subset H^1(F_v, V_\ell A)$ を以下で定めます:

$$H^1_f(F_v, V_\ell A) = \begin{cases} \mathrm{Ker}[H^1(F_v, V_\ell A) \to H^1(I_v, V_\ell A)], & p \neq \ell \text{ のとき}, \\ \mathrm{Ker}[H^1(F_v, V_\ell A) \to H^1(F_v, V_\ell A \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} B_{\mathrm{crys}})], & p = \ell \text{ のとき}. \end{cases}$$

ここで B_{crys} とは Fontaine [16, p. 554] が導入した $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ が連続に作用する $\mathbb{Q}_p$ 代数 B のことです (ここでは Fontaine [16] の記号で $K = \mathbb{Q}_p$ の場合を考えています). さらに部分空間 $H^1_f(F, V_\ell A) \subset H^1(F, V_\ell A)$ を以下のように定めます:

$$H^1_f(F, V_\ell A) = \mathrm{Ker}\left[H^1(F, V_\ell A) \to \prod_{v \nmid \infty} \frac{H^1(F_v, V_\ell A)}{H^1_f(F_v, V_\ell A)}\right].$$

$A\{\ell\} := A(\overline{F})\{\ell\} \cong V_\ell A/T_\ell A$ とおきます．F の各有限素点 v に対し，部分アーベル群 $H^1_f(F_v, A\{\ell\}) \subset H^1(F_v, A\{\ell\})$ を以下のように定めます:

$$H^1_f(F_v, A\{\ell\}) := \mathrm{Im}[H^1_f(F_v, V_\ell A) \hookrightarrow H^1(F_v, V_\ell A) \to H^1(F_v, A\{\ell\})].$$

さらに部分アーベル群 $H^1_f(F, A\{\ell\}) \subset H^1(F, A\{\ell\})$ を以下のように定めます:

$$H^1_f(F, A\{\ell\}) := \mathrm{Im}[H^1_f(F, V_\ell A) \hookrightarrow H^1(F, V_\ell A) \to H^1(F, A\{\ell\})].$$

このとき $H^1(F, A\{\ell\})$ の部分群として等式

$$\mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}(A) = \mathrm{Ker}\left[H^1(F, A\{\ell\}) \to \prod_v \frac{H^1(F_v, A\{\ell\})}{H^1_f(F_v, A\{\ell\})}\right]$$

が成り立ちます．この等式と短完全系列 (3.6) から同型

$$Ш(A)\{\ell\}_{\mathrm{red}} \cong \mathrm{Ker}\left[\frac{H^1(F, A\{\ell\})}{H^1_f(F, A\{\ell\})} \to \prod_v \frac{H^1(F_v, A\{\ell\})}{H^1_f(F_v, A\{\ell\})}\right] \tag{5.5}$$

が得られます．式 (5.5) を用いれば，G_F の表現 $T_\ell A$ だけを用いて ($A(\overline{F})$ などを用いずに) $Ш(A)_{\mathrm{red}}$ を定義できます．これによって，より一般の (例えば 重さ -1 のモチーフに付随する) Galois 表現に対して，強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想を一般化した予想を定式化できます (詳細は [7], [17] をご参照ください)．特に予想 4.4 を強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.12 と類似の形に精密化できます．

6 Birch-Swinnerton-Dyer 予想と玉河数の公式

6.1 アフィン代数群 G の玉河数

大域体 F 上のアフィン代数群 G に対し, G の玉河数と呼ばれる実数 $\tau(G)$ が以下の方法で定義されます.

$$G(\mathbb{A}_F)^1 := \{g \in G(\mathbb{A}_F) \mid \text{任意の } \chi : G \to \mathbb{G}_m \text{ に対し } |\chi(g)| = 1\}$$

とおきます. $G(\mathbb{A}_F)^1$ はユニモジュラーな局所コンパクト位相群であり, $G(F)$ は $G(\mathbb{A}_F)^1$ の離散部分群となります. $\mathbb{A}_F$ の Haar 測度 μ であって, $\mu(F\backslash\mathbb{A}_F) = 1$ を満たすものをとります. μ を用いて $\mathrm{Lie}\, G(\mathbb{A}_F)$ の Haar 測度 $\mu_{\mathrm{Lie}\, G}$ を標準的に定めます. この測度を用いて $G(\mathbb{A}_F)$ の Haar 測度 μ_G が標準的に定まります. 以下に μ_G を定める手続きの概略を書きます (詳細は [58] をご参照ください). まず測度 $\mu_{\mathrm{Lie}\, G}$ の, F の各素点 v に対する $\mathrm{Lie}\, G(F_v)$ の Haar 測度 $\mu_{\mathrm{Lie}\, G,v}$ の積 $\mu_{\mathrm{Lie}\, G} = \prod_v \mu_{\mathrm{Lie}\, G,v}$ への分解をひとつとります. 次に F の各素点 v に対し, $G(\mathbb{F}_v)$ の左不変 Haar 測度 $\mu_{G,v}$ を, この $\mu_{\mathrm{Lie},\ G,v}$ を用いて標準的に定めます. F が代数体の場合は, 単位元の近傍で定義される局所同型写像 $\exp : \mathrm{Lie}\, G(F_v) \dashrightarrow G(F_v)$ を通じて, $\mu_{\mathrm{Lie}\, G}$ と $\mu_{G,v}$ とが対応します. このとき $G(\mathbb{A}_F)$ 上の測度 μ_G は, いわば $\mu_{G,v}$ たちの「直積」とでもいうべきものになります. 但し $\mu_{G,v}$ の直積を素直に定義しようとすると収束しない無限積が現れるため, 実際の $\mu_{G,v}$ の構成は以下のように行います: $X(G) = \underline{\mathrm{Hom}}_F(G, \mathbb{G}_m)$ とおきます. ここで $\underline{\mathrm{Hom}}_F$ は $\mathrm{Spec}\, F$ 上の適当な位相に関する群の層のなす圏における $\underline{\mathrm{Hom}}$ です. $X(G)$ は群 G_F が有限商を経由して作用する有限生成自由アーベル群とみなせます. そこで $X(G)$ の Artin L 関数

$$L(X(G), s) = \prod_v L_v(X(G), s)$$

を考えます. F の各素点 v に対し正の実数 $\lambda_v > 0$ を, ほとんど全ての v に対し $\lambda_v = L_v(X(G), 1)^{-1}$ となるようにとります. λ_v を v での収束因子とよびます. F の各素点 v に対し $G(F_v)$ の測度 $\mu'_{G,v}$ を $\mu'_{G,v} = \lambda_v \mu_{G,v}$ で定めると, 直積測度 $\mu'_G = \prod_v \mu'_{G,v}$ を定めることができます. この μ'_G と $G(\mathbb{A}_F)/G(\mathbb{A}_F)^1$ 上の標準的な測度を用いて, $G(\mathbb{A}_F)^1$ に Haar 測度 $\mu'_{G,1}$ が定まります. 最後に, $\prod_v \lambda_v$ の代わりとなる実数 λ を $L(X(G), s)$ の $s = 1$ での先頭項を用いて定義することにより, $G(\mathbb{A}_F)^1$ に標準的な Haar 測度 $\mu_{G,1} = \lambda^{-1}\mu'_{G,1}$ が定まりますこの測度 $\mu_{G,1}$ による $G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)^1$ の体積

$$\tau(G) = \mu_{G,1}(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)^1)$$

のことを G の玉河数とよびます (Borel [8, THEOREM 1] により $\tau(G) < \infty$ となることに注意しておきます). アーベル多様体に対する Shafarevich-Tate 群の定義 (3.5) と同様に

$$\text{Ш}(G) = \mathrm{Ker}[H^1(F, G) \to \prod_v H^1(F_v, G)]$$

によって G の Shafarevich-Tate 群 Ш(G) を定義します. このとき次の定理が成り立ちます.

定理 6.1 ([42], [45], [31], [13], [43]). G を代数体 F 上の連結アフィン代数群, $G_u \subset G$ を G の巾単根基とする. このとき $\text{Ш}(G)$ は有限群であり, 公式

$$\tau(G/G_u) = \frac{\sharp \mathrm{Pic}(G)}{\sharp \text{Ш}(G)}$$

が成り立つ.

6.2 強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想の玉河数を用いた定式化 (Bloch [5])

F を代数体, A を F 上のアーベル多様体とします. $\tau(G)$ の定義の際にとある L 関数の特殊値が現れること, および $\mathrm{Pic}(A)_{\mathrm{tors}}$ が $A^*(F)$ と同型であることに注意すると, A についての強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.12 の主張と上の定理 6.1 の主張の間に類似性が見てとれますそもそも強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想が定式化された背景のひとつに, トーラスの玉河数に関する公式の影響があります ([4], [12]). このことをふまえて, 強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想を定理 6.1 とそっくりな形に再定式化したのが Bloch [5] です. 以下この節ではこの Bloch の結果を概説します.

$A(\mathbb{A}_F)$ はコンパクトなので, $A(F)$ が無限群のときは $A(F)$ は $A(\mathbb{A}_F)$ の離散部分群になりません. そのため $A(F)$ が無限群のときは, 定理 6.1 の主張中の G を単純に A で置き換えただけでは, $\tau(A)$ の定義の際に困難が生じてうまくいきません. そこで次のようにします.

$B \subset A^*(F)$ を指数有限かつ捻れを持たない部分群とします. $T = \underline{\mathrm{Hom}}_F(B, \mathbb{G}_m)$ とおきます. ここで式 (6.1) の右辺は $\mathrm{Spec}\, F$ 上の適当な Grothendieck 位相におけるアーベル群の層のなす圏における $\underline{\mathrm{Hom}}$ を表わすものとします. T は F 上の分裂トーラスとなります.

よく知られているように標準的な同型

$$A^* \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1_F(A, \mathbb{G}_m) \tag{6.1}$$

が存在します. ここで式 (6.1) の右辺は F 上の適当な Grothendieck 位相におけるアーベル群の層のなすアーベル圏における $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ を表わすものとします. 式 (6.1) により, F 上の群スキームの拡大

$$1 \to T \to G \to A \to 1$$

が得られます. イデールノルム $|\ | : F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \to \mathbb{R}$ の引き起こす準同型 $T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F) \cong \mathrm{Hom}(B, F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times) \to \mathrm{Hom}(B, \mathbb{R})$ は一意的に連続準同型 $T(F)\backslash G(\mathbb{A}_F) \to \mathrm{Hom}(B, \mathbb{R})$ に延ばせます (このことは後の §6.3 に書くことを用いると示せます詳細は [5, p. 68] はご参照ください). $A(F) \cong T(F)\backslash G(F) \hookrightarrow T(F)\backslash G(\mathbb{A}_F) \to \mathrm{Hom}(B, \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{R})$ により, $\langle\ ,\ \rangle : A(F) \times A^*(F) \to \mathbb{R}$ が得られます. この節の話題で鍵となるのが次の定理です.

定理 6.2 ([5, (1.9) Theorem]). $\langle\ ,\ \rangle$ は高さ対 $h(\ ,\ )$ と一致する.

系 6.3 (Bloch [5, (1.10) Theorem]). $G(F) \subset G(\mathbb{A}_F)$ は離散的かつ余コンパクトな部分群となる.

ここで §3.6 の (A) を仮定します. G はアフィンではありませんが, 上の系を用いると G の玉河数 $\tau(G)$ が, アフィン代数群の場合と同様に定義できます.

定理 6.4 (Bloch [5, (1.17) Theorem]). *A を大域体 F 上のアーベル多様体とし, G を上の通りとする. A について §3.6 の (A), および予想 3.9, 3.10 を仮定する. このとき, A についての強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.12 は等式*

$$\tau(G) = \frac{\sharp \mathrm{Pic}(G)_{\mathrm{tors}}}{\sharp Ш(G)}$$

と同値である.

6.3 定理 6.4 の証明の準備

$X = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_F$ とおきます. $\mathcal{A}, \mathcal{A}^*$ をそれぞれ A, A^* の X 上の Néron モデルとします. $\mathcal{A}^o \subset \mathcal{A}$ を開部分群で各ファイバーが連結なものとします. このとき (6.1) の拡張となる標準的な同型

$$\mathcal{A}^* \cong \underline{\mathrm{Ext}}^1_X(\mathcal{A}^o, \mathbb{G}_m) \tag{6.2}$$

が存在します ([35, §5]). ここで (6.2) の右辺は X 上の適当な Grothendieck 位相に関するアーベル群の層の圏における $\underline{\mathrm{Ext}}^1$ です.

$B \subset A^*(F) \cong \mathcal{A}^*(X)$ より $\mathcal{T} = \underline{\mathrm{Hom}}_X(B, \mathbb{G}_m)$ は X 上の分裂トーラスとなります. 式 (6.2) を用いると, X 上の群スキームの拡大

$$1 \to \mathcal{T} \to \mathcal{G} \to \mathcal{A}^o \to 1 \tag{6.3}$$

が得られます.

6.4 定理 6.2 を認めた定理 6.4 の証明

(証明) $T(F)\backslash T^1$ を $T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)$ の極大コンパクト部分群, $T(F)\backslash G^1$ を $T(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)$ の極大コンパクト部分群とします. A, T, G に対する収束因子 $(\lambda_{A,v}), (\lambda_{T,v}), (\lambda_{G,v})$ を

- v が有限素点のとき

$$\lambda_{A,v} = P_v(A, q_v^{-1}),\ \lambda_{T,v} = (1 - q_v^{-1})^r,\ \lambda_{G,v} = (1 - q_v^{-1})^r P_v(A, q_v^{-1}).$$

- v が無限素点のとき $\lambda_{T,v} = \lambda_{A,v} = \lambda_{G,v} = 1$.

と選びます. ここで $A(F)$ の階数を r とおきました. これらの収束因子から定まる $A(\mathbb{A}_F)$, T^1, $G(\mathbb{A}_F)$, G^1 の Haar 測度をそれぞれ μ'_A, $\mu'_{T,1}$, μ'_G, $\mu'_{G,1}$ とおきます. 完全系列

$$1 \to T(F)\backslash T^1 \to T(F)\backslash G^1 \to A(\mathbb{A}_F) \to 0$$

および $T^1\backslash T(\mathbb{A}_F) \cong G^1\backslash G(\mathbb{A}_F)$ に注意し, 式 (6.3) より F の各素点 v に対して

$$0 \to \mathcal{T}(\mathcal{O}_{F_v}) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_{F_v}) \to \mathcal{A}^o(\mathcal{O}_{F_v}) \to 0$$

が完全になることを用いると, $\mu'_{G,1}(T(F)\backslash G^1) = \mu'_A(A(\mathbb{A}_F))\mu'_{T,1}(T(F)\backslash T^1)$ となります. さらに完全系列

$$0 \to A(F)_{\mathrm{tors}} \to T(F)\backslash G^1 \to G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F) \to \frac{\mathrm{Hom}(B,\mathbb{R})}{A(F)/A(F)_{\mathrm{tors}}} \to 0$$

と定理 6.2 とを用いると

$$\mu'_G(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)) = \frac{\mu'_A(A(\mathbb{A}_F))\mu'_{T,1}(T(F)\backslash T^1)\cdot \mathrm{disc}(h)\cdot \sharp(A^*(F)/(B+A^*(F)_{\mathrm{tors}}))}{\mu(F\backslash \mathbb{A}_F)^g \sharp A(F)_{\mathrm{tors}}}$$

がわかります. ここで

$$\mu'_A(A(\mathbb{A}_F)) = \prod_v c_v,\ \ \mu'_{T,1}(T(F)\backslash T^1) = (\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s))^r$$

(但し上式の $\prod_v c_v$ は強い Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.12 の主張中に表れる値, $\zeta_F(s)$ は F の Dedekind ζ 関数です) に注意すると,

$$\mu'_G(G(F)\backslash G(\mathbb{A}_F)) = \frac{\prod_v c_v \cdot (\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_F(s))^r \cdot \mathrm{disc}(h)\cdot \sharp(A^*(F)/(B+A^*(F)_{\mathrm{tors}}))}{\mu(F\backslash \mathbb{A}_F)^g \sharp A(F)_{\mathrm{tors}}}$$

となります. したがって

$$\tau(G) = \frac{\prod_v c_v \cdot \mathrm{disc}(h)\cdot \sharp(A^*(F)/(B+A^*(F)_{\mathrm{tors}}))}{\mu(F\backslash \mathbb{A}_F)^g \sharp A(F)_{\mathrm{tors}}} \cdot \lim_{s\to 1}\frac{(s-1)^r}{L(A,s)}$$

が成り立ちます. 以上により定理 6.4 は次の (1), (2) に帰着されます.

1. $Ш(G) \cong Ш(A)$.
2. $\mathrm{Pic}(G)_{\mathrm{tors}} \cong A^*(F)/B$.

(1) は $1 \to T \to G \to A \to 0$ から得られる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(F,G) & \longrightarrow & H^1(F,A) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(B,\mathrm{Br}(F)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v,G) & \longrightarrow & \prod_v H^1(F_v,A) & \longrightarrow & \prod_v \mathrm{Hom}(B,\mathrm{Br}(F_v))
\end{array}$$

より従います. (2) は $G \to A \to \mathrm{Spec}\,F$ に関する Leray スペクトル系列を用いて $\mathrm{Pic}(G)$ を計算することによって得られます. $\square$

6.5 定理 6.2 の証明のスケッチ

(証明のスケッチ) 証明は $\langle\ ,\ \rangle$ を各素点 v に関する項の和の形に分解することから始まります.

v を F の素点とします. $D \in \mathrm{Div}^0(A_{F_v})$, $Z \in Z_0(A_{F_v})^0$ であって $\mathrm{Supp}(D) \cap \mathrm{Supp}(Z) = \emptyset$ を満たすものに対し, 次の段落に書く方法で実数 $\langle Z, D\rangle_v \in \mathbb{R}$ を定めます.

D は $A^*(F_v)$ の元 $\mathcal{L}(D)$ を与えます. 式 (6.1) により $\mathcal{L}(D)$ はとある拡大 $1 \to \mathbb{G}_m \to G_D \to A_{F_v} \to 0$ に対応します. 可逆層 $\mathcal{L}(D)$ に対応する A 上の直線束を $V(\mathcal{L}(D))$ とおくと, A_{F_v} 上の $\mathbb{G}_m$ 捻子として G_D は $V(\mathcal{L}(D)) \setminus (0$ 切断) と同型です. したがって切断 $\sigma_D : A_{F_v} \setminus \mathrm{Supp}(D) \hookrightarrow G_D \times_{A_{F_v}} (A_{F_v} \setminus \mathrm{Supp}(D))$ を取ると, $\sigma_D(Z) \in G_D(F_v)$ です. $F_v^\times \subset G_D(F_v)$ ですが, 準同型 $F_v^\times \xrightarrow{-\log|\ |_v} \mathbb{R}$ は連続準同型 $\psi_D : G_D(F_v) \to \mathbb{R}$ に一意的に延ばせます. この ψ_D を用いて

$$\langle Z, D\rangle_v := \psi_D(\sigma_D(Z))$$

と定めます. このとき次のことが確かめられます.

> $D \in \mathrm{Div}^0(A)$, $Z \in Z_0(A)^0$ が $\mathrm{Supp}(D) \cap \mathrm{Supp}(Z) = \emptyset$ を満たすとする. $a \in A(F)$, $a' \in A^*(F)$ をそれぞれ Z, D の定める類とする. このとき $\langle a, a'\rangle = \sum_v \langle Z, D\rangle_v$ が成り立つ.

さらに $\langle Z, D\rangle_v \in \mathbb{R}$ は §4.5 の条件 (1), (2), (3), (5), および $a \in \mathcal{A}^o(X)$ に対する条件 (4) を満たします. このことから $\langle\ ,\ \rangle_v = h(\ ,\ )_v$ であることを確かめられます. □

7 関数体の場合

p を素数, F を標数 p の関数体, A を F 上のアーベル多様体とします. ここ §7 では, 次の定理とその証明を [26] の記述に沿った形で紹介します.

定理 7.1 (Artin-Tate [54], Milne [38], Schneider [46], Bauer [1], 加藤-Trihan [26]). *A を関数体 F 上のアーベル多様体とし, ある素数 ℓ に対し $Ш(A)\{\ell\}$ が有限と仮定する. このとき $Ш(A)$ は有限となり, かつ A について強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想が成り立つ.*

7.1 問題の素数成分への分解

$\mathbb{F}$ を F の定数体とし, $q = \sharp\mathbb{F}$ とすると, $L(A, s)$ は q^{-s} についての整数係数の多項式となることが知られています. これは代数体上のアーベル多様体が持たない強い性質で, 特にこのことから $L(A, s)$ は全複素平面に正則に解析接続されます. さらに高さ対 $h(\ ,\ ) : A(F) \times A^*(F) \to \mathbb{R}$ は $\log(q)\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ に値を持つこともわかります. これらのことから予想 3.10 の下, A に対する弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.9 から強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.12 の式が mod $\mathbb{Q}^\times$ で従います. このような事情から, 関数体上のアーベル多様体に対する強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想は, 関数体上のアーベル多様体に対する強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想と比べてかなり易しい予想となっています.

ℓ を素数とします. A について弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.9 および予想 3.10 が成り立っていて, さらに強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想 3.12 に現れる式の両辺の比が ℓ 進絶対値 1 の有理数となるとき, A について強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想の ℓ 成分が成り立つといいます. 定理 7.1 は次の 2 つの定理から従います:

定理 7.2. *A を関数体 F 上のアーベル多様体, ℓ を素数とする. このとき $Ш(A)\{\ell\}$ が有限であることと, A について弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想が成り立つことは同値である.*

定理 7.3. *A を関数体 F 上のアーベル多様体, ℓ を素数とする. このとき $Ш(A)\{\ell\}$ が有限であれば, A について強い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想の ℓ 成分が成り立つ.*

7.2 定理 7.1 の証明の流れ

定理 7.1 の証明は, 各素数 ℓ について定理 7.2, 定理 7.3 をこの順番で示すことによってなされます.

以下この稿では

- $\ell \neq p$ のときの定理 7.2.
- $\ell \neq p$ のときの定理 7.3.

- $\ell = p$ のときの定理 7.2,7.3.

の順番に概要を述べます. $\ell = p$ の場合は非常に大まかな証明の概略しか述べません. 興味のある方は原論文 [26] をご参照くださると幸いです.

7.3 $\ell \neq p$ のときの定理 7.2, 7.3 の証明のための準備

F の素点の有限集合 S を十分大きく固定します. $U = X \setminus S$ とおきます.

$T_\ell A$, $V_\ell A$, $A\{\ell\} = V_\ell A/T_\ell A$ は G_F の表現です. $\mathcal{T}_\ell\mathcal{A}$, $\mathcal{V}_\ell\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\{\ell\}$ をそれぞれに対応する U 上の滑らかな層とします.

7.3.1 幾何的コホモロジーと数論的コホモロジー

幾何的コホモロジー $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell}$, $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}$ を

- $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell} := H^i_{\mathrm{et},c}(\overline{U}, \mathcal{V}_\ell\mathcal{A})$,
- $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} := H^i_{\mathrm{et},c}(\overline{U}, \mathcal{A}\{\ell\})$.

によって定めます. ここで $\overline{U} = U \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}$ です. $\varphi = \mathrm{Frob}_q$ が $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell}$, $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}$ に作用します.

数論的コホモロジー $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell}$, $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}$ を

- $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell} := H^i_{\mathrm{et},c}(U, \mathcal{V}_\ell\mathcal{A})$,
- $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} := H^i_{\mathrm{et},c}(U, \mathcal{A}\{\ell\})$

によって定めます.

7.3.2 5 つのベクトル空間

$\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間 $I_{i,\ell}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ および図式

$$I_{1,\ell} \hookrightarrow I_{2,\ell} \hookrightarrow I_{3,\ell} \to I_{4,\ell} \twoheadrightarrow I_{5,\ell} \tag{7.1}$$

を以下で定義します.

- $I_{1,\ell} = A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$.
- $I_{2,\ell} = (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell})^{\varphi}$: $H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell}$ の φ 不変部分.
- $I_{3,\ell} = (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell})^{\varphi-\mathrm{unip}}$: $H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell}$ の中で φ が巾単に作用する部分.
- $I_{4,\ell} = (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell})_{\varphi}$: $H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell}$ の φ 余不変商.
- $I_{5,\ell} = \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_\ell)$.

定義から $I_{2,\ell} \hookrightarrow I_{3,\ell} \hookrightarrow H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell} \twoheadrightarrow I_{4,\ell}$ が成り立ちます. これを用いて図式 (7.1) の真ん中の 2 つの準同型を定めます.

スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{F}, H^q_{\mathrm{et},c}(\overline{U}, \mathcal{V}_\ell\mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{et},c}(U, \mathcal{V}_\ell\mathcal{A})$$

と重さの議論により, $I_{2,\ell} \cong H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell}$ および $I_{4,\ell} \cong H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell}$ が成り立ちます.

Kummer 系列により完全系列

$$0 \to A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell} \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, Ш(A)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \to 0$$

を得ます. また Kummer 系列および (数論的) 双対性により, 完全系列

$$0 \to \mathrm{Hom}(Ш(A^*), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell \to H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell} \to \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_\ell) \to 0$$

を得ます. したがって (7.1) の図式

$$I_{1,\ell} \hookrightarrow I_{2,\ell} \hookrightarrow I_{3,\ell} \to I_{4,\ell} \twoheadrightarrow I_{5,\ell}$$

が得られます.

定義により,

$$I_{1,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{2,\ell} \iff Ш(A)\{\ell\}\text{: 有限} \iff Ш(A^*)\{\ell\}\text{: 有限} \iff I_{4,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{5,\ell}$$

が成り立ちます. また, 等式

$$L^S(A, s) = \prod_{i=0}^{2} \det(1 - \varphi q^{1-s}; H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell})^{(-1)^{i+1}}$$

により $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} I_{3,\ell} = \mathrm{ord}_{s=1} L(A, s)$ が成り立ちます. さらに合成 $I_{1,\ell} \to \cdots \to I_{5,\ell}$ は同型となります. 実際, この合成は

$$h(\ ,\ ) : A(F) \times A^*(F) \to \log q \cdot \mathbb{Q} \xrightarrow{1/\log(q)} \mathbb{Q}$$

の誘導する準同型 $A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_\ell)$ と一致することが, 定理 6.2 の証明と同様の方法でわかります ([46, §3]).

7.4 $\ell \neq p$ のときの定理 7.2 の証明

(証明) $Ш(A)\{\ell\}$ が有限と仮定します. 上で述べたことから $I_{1,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{2,\ell}$, $I_{4,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{5,\ell}$ となりますが, 合成 $I_{1,\ell} \to \ldots \to I_{5,\ell}$ が同型であることから $I_{2,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{4,\ell}$ です. $I_{2,\ell}$, $I_{3,\ell}$, $I_{4,\ell}$ の定義により $I_{2,\ell} = I_{3,\ell}$ が成り立ちます. 特に $\dim I_{1,\ell} = \dim I_{3,\ell}$ となることから弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想が成り立ちます.

逆に弱い形の Birch-Swinnerton-Dyer 予想が成り立つとすると, $I_{1,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{3,\ell}$ となるから, $I_{1,\ell} \xrightarrow{\cong} I_{2,\ell}$ であり, したがって $Ш(A)\{\ell\}$ は有限です. □

7.5 $\ell \neq p$ のときの定理 7.3 の証明

(証明) スペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{F}, H^q_{\mathrm{et},c}(\overline{U}, \mathcal{A}\{\ell\})) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{et},c}(U, \mathcal{A}\{\ell\})$$

により, 数論的-幾何的完全系列

$$\begin{aligned} 0 \to H^0_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \to H^0_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} &\xrightarrow{1-\varphi} H^0_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \\ \to H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \to H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} &\xrightarrow{1-\varphi} H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \\ \to H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \to H^2_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} &\xrightarrow{1-\varphi} H^2_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \to 0 \end{aligned}$$

を得ます. ここで以下の補題を用います.

補題 7.4. J を有限次元 $\mathbb{Q}_\ell$ ベクトル空間, $\varphi : J \to J$ を $\mathbb{Q}_\ell$ 線形な自己同型写像, J' を捻れ $\mathbb{Z}_\ell$ 加群, $\varphi : J' \to J'$ を自己同型写像, $J \to J'$ を φ と可換な $\mathbb{Z}_\ell$ 準同型写像であって核が J の $\mathbb{Z}_\ell$ 格子, 余核が有限群となるものとする. このとき合成 $J^\varphi \hookrightarrow J \twoheadrightarrow J_\varphi$ が同型ならば, $r = \dim J^\varphi$, $f : (J')^\varphi \to (J')_\varphi$ とおくと,

$$\lim_{t\to 1} \frac{\det(1-\varphi t; J)}{(1-t)^r} \equiv \frac{\sharp \mathrm{Ker}\, f}{\sharp \mathrm{Coker}\, f} (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z}_\ell^\times)$$

が成り立つ. □

$\text{Ш}(A)\{\ell\}$ が有限と仮定し, $J = H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell}$, $J' = H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}$ に補題 7.4 を適用します. 合成

$$H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \to (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell})^\varphi \to (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell})_\varphi \to H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}$$

を f とおくと,

$$\lim_{s\to 1} \frac{L_S(A,s)}{(\log q)^r (s-1)^r} \equiv \frac{\sharp \mathrm{Ker} f}{\sharp H^0_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \sharp \mathrm{Coker} f} (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z}_\ell^\times)$$

が成り立ちます. 図式

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & A(F) \otimes_Z \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ 0 \to H^0_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} & \to & A(F)\{\ell\} & \to & \bigoplus_{v\in S} A(F_v)\{\ell\} & \to H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \to & \mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell}(A) & \to 0 & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & \text{Ш}(A)\{\ell\} & & \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & 0 & & \end{array}$$

と $\text{Ш}(A)\{\ell\}$ の有限性より同型 $H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell} \cong \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)$ を得ます. すでに述べたように, 合成 $I_{1,\ell} \to \ldots \to I_{5,\ell}$, すなわち

$$A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \cong H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell} \to (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell})^\varphi \to (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_\ell})_\varphi \to H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_\ell} \to \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_\ell)$$

は $h(\ ,\ ) : A(F) \times A^*(F) \to \log q \cdot \mathbb{Q}$ から誘導される準同型と一致します. したがって定理 7.3 が成り立ちます. □

7.6 $\ell = p$ の場合の定理 7.2, 7.3 の証明の方針

$\ell = p$ の場合の定理 7.2, 7.3 の証明も, 上に述べた $\ell \neq p$ の場合の定理 7.2, 7.3 の証明と方針は同様です. F の素点の有限集合 S を十分大きくとり (どのくらい大きく取るかは §7.6.2 で述べます), $U = X \setminus S$ とおきます.

7.6.1

$\ell = p$ の場合も $\ell \neq p$ の場合と同様 $\mathbb{Q}_p$ 係数幾何的コホモロジー, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数幾何的コホモロジー, $\mathbb{Q}_p$ 係数数論的コホモロジー, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数数論的コホモロジーの 4 種類のコホモロジー群について考察します. このうち, $\mathbb{Q}_p$ 係数幾何的コホモロジー, $\mathbb{Q}_p$ 係数数論的コホモロジー, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数数論的コホモロジーの 3 種類は, それぞれ以下ようにして構成されます:

- $\mathbb{Q}_p$ 係数幾何的コホモロジー $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_p}$ を $\mathcal{A}$: A の Néron モデルに付随する U 上の過収束アイソクリスタルの剛 (rigid) コホモロジーとして構成する.
- $\mathbb{Q}_p$ 係数数論的コホモロジー $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p}$ をコンパクト台をもつ平坦コホモロジーとして構成する.
- $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数数論的コホモロジー $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,V}$ を適当な境界条件 V つきの平坦コホモロジーとして構成する.

残る $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数幾何的コホモロジーは $\ell \neq p$ の場合と異なり $H^i_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ と $H^i_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ との 2 種類を構成します.

$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数幾何的コホモロジーを 2 種類用意することが必要となるのは, $\ell = p$ のときには ($H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_p}$ やそれを構成する際に用いるものへの) φ の作用の分母に p が現れるためです. この分母のせいで自己準同型 φ をもつ $H^i_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ を構成できず, 自己準同型の代わりに $\iota : H^i_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \to H^i_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$, $\varphi : H^i_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \to H^i_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ を考えるため, 2 種類の $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数幾何的コホモロジーが必要になるのです.

7.6.2 対数的 Dieudonné クリスタルの理論と $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数幾何的コホモロジーの構成

$H^i_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ と $H^i_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ は, いずれも構成は対数的 Dieudonné クリスタルの理論を用いてなされます. もう少し説明するために, 次の段落で記号を準備します.

F の有限次 Galois 拡大 F' であって $A' := A \times_{\operatorname{Spec} F} \operatorname{Spec} F'$ が半安定還元を持つものを選びます. $G = \mathrm{Gal}(F'/F)$ とおきます. F の素点の有限集合 S を, A は S の外でよい還元をもち, F'/F は S の外で不分岐となるように選びます. $S' = \bigcup_{v \in S}\{w : F' \text{ の素点} \mid w|v\}$ とおきます. X' を F' に対応する代数曲線とします.

$X'^{\sharp}$ を (X', S') に付随する対数的スキーム, $\mathcal{A}'$ を A' の X' 上の Néron モデルとします. このとき X' 上の対数的 1 モチーフの概念を用いることにより, $X'^{\sharp}/\mathbb{Z}_p$ 上の (対数的) Dieudonné クリスタル D' が構成されます.

$D'_1 \subset D'_2 \subset D'$ を適当に選び, $H^i_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} := H^i(R\Gamma(G, R\Gamma_{\mathrm{crys}}(X'^{\sharp}/\mathbb{Z}_p, D'_1)) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$. $H^i_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} := H^i(R\Gamma(G, R\Gamma_{\mathrm{crys}}(X'^{\sharp}/\mathbb{Z}_p, D'_2)) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ とおくことによって, $H^i_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$, $H^i_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}$ が構成されます.

7.6.3 証明の完結

($\ell = p$ の場合の定理 7.2, 7.3 の証明) 共分 (syntomic) 複体の理論を用いると, 数論的-幾何的完全系列

$$\begin{aligned}
0 \to H^0_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,V} \to H^0_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} &\xrightarrow{\iota-\varphi} H^0_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \\
\to H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,V} \to H^1_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} &\xrightarrow{\iota-\varphi} H^1_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \\
\to H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,V} \to H^2_{1,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} &\xrightarrow{\iota-\varphi} H^2_{2,\mathrm{g},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \to 0
\end{aligned}$$

が得られ, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数数論的コホモロジーと $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数幾何的コホモロジーとが結びつきます. $\ell \neq p$ の場合と同様, 次が成立します:

- 合成

  $$A(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_p \to H^1_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p} \to (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_p})^{\varphi} \to (H^1_{\mathrm{g},\mathbb{Q}_p})_{\varphi} \to H^2_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_p)$$

  が, $h(\ ,\ ) : A(F) \times A^*(F) \to \log q \cdot \mathbb{Q}$ から誘導される準同型と一致する.

- $H^i_{\mathrm{a},\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,V}$ は $A(F) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Hom}(A^*(F), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{Sel}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(A)$, $Ш(A)\{p\}$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, Ш(A^*))$ と結びつく.

これらのことから定理 7.2, 定理 7.3 が得られます. □

8　本稿で触れなかった話題と参考文献

本稿でふれなかった Birch-Swinnerton-Dyer 予想に関する重要な話題として, §1 に挙げたものの他に, Birch-Swinnerton-Dyer 予想の同変版への拡張 ([18]) があります．これによって例えば

- 大域体の有限次 Galois 拡大 F'/F および, F 上のアーベル多様体 A が与えられている状況下でのモチーフ $h_1(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(F'/F)]$ の L 関数の特殊値.
- 大域体 F 上のアーベル多様体 A と環準同型 $i : R \to \mathrm{End}(A)$ の組 (A, i) であって $H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が R 加群として射影次元有限となるようなものが与えられているときの $L(A, s)$ の特殊値.

について, 通常の Birch-Swinnerton-Dyer 予想よりも詳しい内容を予想することができます. 例えば上に 2 つ挙げたうちの後者に対する予想は Gross の予想 [21] を含みます.

また, A の p 進 L 関数が定義されている場合には, Birch-Swinnerton-Dyer 予想の p 進類似という重要な話題があります (例えば [37]) が, これについても同変版の Birch-Swinnerton-Dyer 予想と解釈することができます.

参考文献

[1] Bauer, W.: *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer for abelian varieties over function fields in characteristic* $p > 0$. Invent. Math. **108**, no. 2, 263–287 (1992)

[2] Beilinson, A. A.: *Higher regulators and values of L-functions.* (ロシア語) Itogi Nauki i Tekhniki, Akad. Nauk SSSR **24**, 181–238 (1984); 英訳: J. Soviet Math. **30**, no. 2, 2036-2070 (1985)

[3] Beilinson, A. A.: *Height pairing between algebraic cycles.* K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986), 1–25, Lect. Notes Math. **1289**, Springer-Verlag, Berlin (1987)

[4] Birch, B. J., Swinnerton-Dyer, H. P. F.: *Notes on elliptic curves. II.* J. Reine Angew. Math. **218** 79–108 (1965)

[5] Bloch, S.: *A note on height pairings, Tamagawa numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture.* Invent. Math. **58**, no. 1, 65–76 (1980)

[6] Bloch, S.: *Height pairings for algebraic cycles.* Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983). J. Pure Appl. Algebra **34**, no. 2-3, 119–145 (1984)

[7] Bloch, S., Kato, K.: *L-functions and Tamagawa numbers of motives.* The Grothendieck Festschrift I, 333–400. Prog. Math. **86**, Birkhäuser Boston, MA (1990)

[8] Borel, A.: *Some properties of adele groups attached to algebraic groups*. Bull. Amer. Math. Soc. **67**, 583–585 (1961)

[9] Bosch, S., Lütkebohmert, W., Raynaud, M.: *Néron models*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **21**. Springer-Verlag, Berlin (1990)

[10] Brown, M. L.: *Heegner modules and elliptic curves*. Lect. Notes Math. **1849**, Springer-Verlag, Berlin (2004)

[11] Cassels, J. W. S.: *Arithmetic on curves of genus* 1*. IV. Proof of the Hauptvermutung*. J. Reine Angew. Math. **211**, 95–112 (1962)

[12] Cassels, J. W. S.: *Arithmetic on an elliptic curve*. Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), 234–246. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm (1963)

[13] Chernousov, V. I.: *The Hasse principle for groups of type* E_8. (ロシア語) Dokl. Akad. Nauk SSSR **306**, no. 5, 1059–1063 (1989); 英訳: Soviet Math. Dokl. **39**, no. 3, 592–596 (1989)

[14] Deligne, P.: *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*. In: Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), 501–597. Lect. Notes Math. **349**, Springer-Verlag, Berlin (1973)

[15] Deligne, P.: *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. In Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Part 2, 313–346. American Mathematical Society, Providence, RI (1979)

[16] Fontaine, J.-M.: *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*. Ann. of Math. (2) **115**, no. 3, 529–577 (1982)

[17] Fontaine, J.-M., Perrin-Riou, B.; *Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L* In: Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math. **55**, Part 1, 599–706. American Mathematical Society, Providence, RI (1994)

[18] Fukaya, T., Kato, K.: *A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*. Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society **12**, 1–85. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219**, American Mathematical Society, Providence, RI (2006)

[19] Gillet, H., Soulé, C.: *Intersection sur les variétés d'Arakelov*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299**, no. 12, 563–566 (1984)

[20] Gillet, H., Soulé, C.: *Arithmetic intersection theory.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **72**, 93–174 (1991)

[21] Gross, B. H.: *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer for elliptic curves with complex multiplication.* Number theory related to Fermat's last theorem (Cambridge, MA, 1981), 219–236. Prog. Math. **26**, Birkhäuser, Boston, MA (1982)

[22] Gross, B. H.: *Minimal models for elliptic curves with complex multiplication.* Compositio Math. **45**, no. 2, 155–164 (1982)

[23] Gross, B. H., Zagier, D. B.: *Heegner points and derivatives of L-series.* Invent. Math. **84**, no. 2, 225–320 (1986)

[24] Jordan, B. W., Livné, R.: *On Atkin-Lehner quotients of Shimura curves.* Bull. London Math. Soc. **31**, no. 6, 681–685 (1999)

[25] Kato, K.: *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III. Astérisque **295**, 117–290 (2004)

[26] Kato, K., Trihan, F.: *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer in characteristic $p > 0$.* Invent. Math. **153**, no. 3, 537–592 (2003)

[27] Kodaira, K.: *On compact analytic surfaces, II.* Ann. of Math. (2) **77**, 563–626 (1963)

[28] Kolyvagin, V. A.: *Finiteness of $E(Q)$ and $Ш(E,Q)$ for a subclass of Weil curves.* (ロシア語) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52**, no. 3, 522–540, 670–671 (1988); 英訳: Math. USSR-Izv. **32**, no. 3, 523–541 (1989)

[29] Kolyvagin, V. A.: *The Mordell-Weil and Shafarevich-Tate groups for Weil elliptic curves.* (ロシア語) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52**, no. 6, 1154–1180, 1327 (1988); 英訳: Math. USSR-Izv. **33**, no. 3, 473–499 (1989)

[30] Kolyvagin, V. A., Logachëv, D. Yu.: *Finiteness of* Ш *over totally real fields.* (ロシア語) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55**, no. 4, 851–876 (1991); 英訳: Math. USSR-Izv. **39**, no. 1, 829–853 (1992)

[31] Kottwitz, R. E.: *Tamagawa numbers.* Ann. of Math. (2) **127**, no. 3, 629–646 (1988)

[32] Lang, S.: *Les formes bilinéaires de Néron et Tate.* Séminaire Bourbaki, Exp. 274 (1963/64)

[33] Lang, S., Tate, J.: *Principal homogeneous spaces over abelian varieties.* Amer. J. Math. **80**, 659–684 (1958)

[34] Langlands, R. P.: *On the functional equation of the Artin L-functions*. Unpublished notes, available from `http://www.sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/`.

[35] Mazur, B.; Messing, W.: *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*. Lect. Notes Math. **370**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1974)

[36] Mazur, B., Tate, J.: *Canonical height pairings via biextensions*. In: Arithmetic and geometry, Vol. I, Prog. Math. **35**, 195–237. Birkhäuser Boston, Boston, MA (1983)

[37] Mazur, B., Tate, J., Teitelbaum, J.: *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*. Invent. Math. **84**, no. 1, 1–48 (1986)

[38] Milne, J. S.: *On a conjecture of Artin and Tate*. Ann. of Math. (2) **102**, no. 3, 517–533 (1975)

[39] Milne, J. S.: *Arithmetic duality theorems*. Perspect. Math. **1**, Academic Press, Boston, MA (1986)

[40] Néron, A.: *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **21**, 361–482 (1964)

[41] Néron, A.: *Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes*. Ann. of Math. (2) **82** 249–331 (1965)

[42] Ono, T.: *On the Tamagawa number of algebraic tori*. Ann. of Math. (2) **78**, 47–73 (1963)

[43] Platonov, V., Rapinchuk, A.: *Algebraic groups and number theory*. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen. Pure and Applied Mathematics **139**, Academic Press, Boston, MA (1994)

[44] Poonen, B., Stoll, M.: *The Cassels-Tate pairing on polarized abelian varieties*. Ann. of Math. (2) **150**, no. 3, 1109–1149 (1999)

[45] Sansuc, J.-J.: *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*. J. Reine Angew. Math. **327**, 12–80 (1981)

[46] Schneider, P.: *Zur Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer über globalen Funktionenkörpern*. (ドイツ語) Math. Ann. **260**, no. 4, 495–510 (1982)

[47] Scholl, A. J.: *Remarks on special values of L-functions*. L-functions and arithmetic (Durham, 1989), 373–392, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 153, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991

[48] Scholl, A. J.: *Height pairings and special values of L-functions.* In: Motives (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, 571–598. American Mathematical Society, Providence, RI (1994)

[49] Serre, J.-P.: *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjectures).* Séminaire Delange-Pisot-Poitou, exposé **19** (1969/70)

[50] Serre, J.-P.: *Représentations linéaires des groupes finis.* Third revised edition. Hermann, Paris (1978)

[51] Serre, J.-P., Tate, J.: *Good reduction of abelian varieties.* Ann. of Math. (2) **88**, 492–517 (1968)

[52] Tate, J.: *Duality theorems in Galois cohomology over number fields.* In: Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), 288–295. Inst. Mittag-Leffler, Djursholm (1963)

[53] Tate, J.: *WC-groups over $\mathfrak{p}$-adic fields.* Séminaire Bourbaki Exp. 156 (1957/1958)

[54] Tate, J.: *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog.* Séminaire Bourbaki Exp. 306 (1965/1966)

[55] Tate, J.: *Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil.* In: Modular functions of one variable, IV (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), Lect. Notes Math. **476**, 33–52. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[56] Tate, J.: *Number theoretic background.* In: Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Proc. Sympos. Pure Math. **33**, Part 2, 3–26. American Mathematical Society, Providence, RI (1979)

[57] Weil, A.: *Sur un théorème de Mordell*, Bull. Sci. Math. **54**, 182–191 (1930)

[58] Weil, A.: *Adeles and algebraic groups.* With appendices by M. Demazure and Takashi Ono. Prog. Math. **23**, Birkhäuser, Boston, MA (1982)

[59] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I). Lect. Notes Math. **288**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1972)