《複素関数 I》期末試験問題兼解答用紙

(2012 年度, 前期, 木曜 II 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 3 年)
試験時間 80 分, 教科書: 佐藤/吉田 共著 「初歩から学べる 複素解析」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 11:40 の時点の一回限りとする.
注意 4. 早めにできたなら念入りに検算せよ.

1 (10 点) $\triangle$ABC の辺 BC, CA, AB の中点を D, E, F とするとき, 次の式が成り立つことを 複素数の計算で 示せ.

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 = \frac{4}{3}(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BE}^2 + \mathrm{CF}^2).$$

2 (15 点) 定点 α, β に対し, 集合

$$\left\{ z \in \mathbf{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right) = 0 \right\}$$

を図示せよ.

3 (15 点) 関数 $w = \lambda \dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$ $(|\lambda| = 1,\ \mathrm{Im}\, a > 0)$ は上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$ を単位円 $|w| < 1$ に写すことを示せ. (hint : 関数を z について解き, $\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) > 0$ に代入して整理.)

4 (15 点) 対数関数としての $\log(1+i)$ の値を求めよ.

学籍番号	氏名	点

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 正則関数 $f(z)$ $(z = x + iy)$ の実部が $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ で与えられるとき, 虚部および $f(z)$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (15 点) 正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy)$ についての Cauchy-Riemann の関係式

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$ は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき, $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}$ と同値であることを示せ.

また, このとき $f'(z) = e^{-\theta i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + i\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)$ となることも示せ.

(hint : 前半は $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} \end{cases}$, $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} \end{cases}$ を計算して, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ について解き, C-R 関係式に代入し整理する.
後半は $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ に上で解いた式を代入.)

$\boxed{\mathbf{7}}$ (15 点) 複素関数としての対数関数 $f(z) = \log|z| + i\arg z$ は, $D = \{\, z \mid z \neq 0,\ -\pi < \arg z < \pi \,\}$ で正則であることと, これの導関数が $f'(z) = \frac{1}{z}$ であることを示せ. (hint : $\boxed{\mathbf{6}}$ を利用.)

(ここより下は記入しないで下さい)