

## 《複素関数 I》 中間試験問題兼解答用紙

(2012 年度, 前期, 木曜 II 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 3 年)  
 試験時間 80 分, 教科書: 佐藤/吉田 共著 「初歩から学べる 複素解析」

- 注意** 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.  
**注意** 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.  
**注意** 3. 試験場の静粛を保つために, 退場は 11:40 の時点の一回限りとする.  
**注意** 4. 早めのできたなら念入りに検算せよ.

1 (15 点) de Moivre の公式を用いて  $z^5 = i$  を解け.

3 (10 点) 方程式  $z\bar{z} + (1 + 3i)z + (1 - 3i)\bar{z} + 6 = 0$  は  
 どんな図形を表すか.

2 (15 点)  $\triangle ABC$  の辺 BC, CA, AB の中点を D, E, F とするとき, 次の式が成り立つことを 複素数の計算で示せ.

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = \frac{4}{3}(AD^2 + BE^2 + CF^2).$$

4 (15 点) 集合  $\{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = 0\}$  ( $z_1 \neq z_2$ ) を  
 図示せよ. (hint:  $\frac{w_1}{w_2}$  が純虚数  $\iff \overrightarrow{0w_1}$  と  $\overrightarrow{0w_2}$  のなす角は  $\circ$ .)

学籍番号

氏名

点

5 (15 点) 関数  $w = \lambda \frac{z-a}{z-\bar{a}}$  ( $|\lambda| = 1, \operatorname{Im} a > 0$ ) は上半平面  $\operatorname{Im} z > 0$  を単位円  $|w| < 1$  に写すことを示せ.  
(hint : 関数を  $z$  について解き,  $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) > 0$  に代入して整理.)

6 (15 点) 正則関数  $f(z)$  ( $z = x + iy$ ) の実部が

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

で与えられるとき, 虚部および  $f(z)$  を求めよ.

7 (15 点) 正則関数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  ( $z = x + iy$ ) についての Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{は } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \text{ のとき, } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{と同値であることを示せ.}$$

$$\left( \text{hint : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{cases} \text{ を計算して, } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \text{ について解き, C-R 関係式に代入し整理する.} \right)$$