

《複素関数 II》 期末試験問題兼解答用紙

(2012 年度, 後期, 木曜 II 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 3 年)
 試験時間 80 分, 教科書: 佐藤/吉田 共著 「初歩から学べる 複素解析」

- 注意** 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 11:40 の時点の一回限りとする.
注意 4. 早めに来たなら念入りに検算せよ.

1 (10 点) 複素平面上の座標を $z = x + iy$ と書いたときに放物線 $2y^2 = x$ に沿って原点から点 $(2, 1)$ まで結ぶ曲線を C とする. このとき次の積分を計算せよ.

$$\int_C |z^2| dz$$

2 (15 点) 積分 $\int_{\frac{\pi i}{4}}^{\frac{\pi i}{2}} e^{2z} dz$ を計算せよ.

3 (15 点) コーシーの積分表示を利用して, 次の積分値を求めよ.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + 3e^{i\theta} \right) d\theta.$$

学籍番号

氏名

点

4 (30点) $C = \{|z-1|=1\}$ のとき, 積分

$$\int_C \frac{1}{(z-1)(z+2)} dz$$

の値を指示に従い, 2通りに計算せよ.

(1) $\frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right)$ と考えて.

(2) $\frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z+2}$ としコーシーの積分表示を利用.

5 (30点) 次の複素積分を計算せよ.

(1) $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-1|=1} \frac{ze^{2z}}{(z-1)^3} dz$

(2) $\int_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$