既習事項のまとめ

(1) 群の定義 : 集合 G に演算 $G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab$ が与えられていて, 次の 3 条件を全て満たすとき G を 群 と呼ぶ ;

(G1) この演算は結合法則をみたす,

(G2) 単位元 1 を持つ,

(G3) 各元 $a \in G$ に対して逆元 a^{-1} が存在する.

(2) 群 G の部分集合 $H \subset G$ が 部分群 であるとは, G の演算について

(SG1) $a, b \in H \implies ab \in H$

(SG2) $a \in H \implies a^{-1} \in H$

が成り立つことである.

(3) 記号 $H < G$ または $G > H$ は, G が群であり, H はその部分群であることを表すものとする.

(4) 群 G が アーベル群 とは任意の $a, b \in G$ について $ab = ba$ が成り立つことをいう. アーベル群の演算を $+$ で表して, そのアーベル群を 加群 と呼ぶことがある.

(5) 群 G 位数 とは集合としての G の元の個数のことで $o(G)$ と書かれる.

(6) 群 G の要素 g の 位数 とは $g^m = 1$ となる最小の正の整数 m のことである. その様な m が存在しないとき g の位数は ∞ であるという.

(7) $n|m$ は整数 n が整数 m を割り切ること, つまり m が n の倍数であることを意味する.

(8) $GL(n, \mathbf{Q}) = \{A \mid A$ はすべての成分が有理数である n 次正方行列で $\det(A) \neq 0\}$. これは行列の積を演算として群をなす.

(9) n 次対称群 (n 次置換の全体) S_n は互換の全体で生成される.

宿題の未提出者へ : 試験範囲の問題 (= 今まで宿題として課した問題) のすべてをレポートにまとめるて早急に提出せよ. ただし, わからない点があればそれを明確にして質問を記述する.

実施：2012 年 12 月 17 日 (月) 16:30-18:00, Y-32 室

「群の構造」中間試験問題兼解答用紙

(2012 年度, 後期, 月曜 V 時限, 数学教育専修, 数理情報コース, 各 2 年)

試験時間 80 分,　教科書: 永尾 汎 著 「代 数 学」

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は 17:30 の時点の一回限りとする.
注意 4. $\boxed{\text{2A}}$ と $\boxed{\text{2B}}$ は選択問題である.

$\boxed{\textbf{1}}$ (20 点) 群 G の任意の元 x に対して $x^2 = 1$ が成り立てば, G はアーベル群であることを証明せよ.

$\boxed{\textbf{2A}}$ (20 点) 群 G の部分集合 H が部分群であるための必要十分条件は

$$a, b \in H \implies ab^{-1} \in H$$

が成り立つことである. これを示せ.

$\boxed{\textbf{2B}}$ (20 点) H が群 G の部分群であるとき, HH, H^{-1}, HH^{-1} はすべて H に等しいことを示せ.

$\boxed{}$ ← 選んだ問題の番号を記入

学籍番号	氏名	点

$\boxed{\mathbf{3}}$ (20 点) H, K は群 G の 2 つの部分群とする．このとき次を示せ．

(1) HK が G の部分群 $\iff$ $HK = KH$.

(2) L が H を含む G の部分群ならば, $(HK) \cap L = H(K \cap L)$ となる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (20 点) $n \geq 2$ ならば $GL(n, \mathbf{Q})$ はアーベル群ではないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (20 点) n 次対称群 S_n は $\{(1,2),\ (2,3), \cdots, (i, i+1), \cdots,\ (n-1, n)\}$ で生成されることを示せ．ただし, S_n が互換の全体で生成されることは既知としてよい．

――――――――――――――――――――（ここより下には記入しないで下さい）――――――――――――――――――――