《数 学 演 習 II》

$\boxed{001-002}$ 次のことを示せ.
(1) $\sqrt{2}$ は有理数ではない.
(2) p が素数のとき $\sqrt{p}$ は有理数ではない.

$\boxed{003}$ $a>0,\, b>0,\, c>0$ のとき,

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqq abc$$

x で, 等号は $a=b=c$ のときに限ることを示せ.

$\boxed{0035}$ 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が, $x_1<x_2$ なる任意の $x_1,\, x_2 \in I$ と $0<t<1$ について $f\big((1-t)x_1+tx_2\big) \geqq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$ を満たすとき, $f(x)$ は <u>上に凸な関数</u> であると呼ばれる. 次の問に答えよ.
(1) $\log x$ は上に凸な関数であることを示せ.
(2) $f(x)$ が区間 I で定義された上に凸な関数であるとき, 任意有限個の点 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset I$ について

$$f\Big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\Big) \geqq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

となることを証明せよ.

$\boxed{004-005}$ $a_1,\, a_2,\, \cdots,\, a_n \geqq 0$ ならば

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

となることを示せ. これは数学的帰納法とそれ以外の方法 (直前の問題を利用) を考察せよ.

$\boxed{006-008}$ 次の集合の上限, 最大値, 下限, 最小値を求めよ.
(1) $\left\{ n+\frac{1}{n}+\frac{(-1)^m}{1+\frac{1}{m}} \,\middle|\, n,\ m=1,\,2\,,3\,\cdots \right\}$
(2) $\left\{ n+\frac{1}{n}+x \,\middle|\, n=1,\,2\,,3\,\cdots\,;\ x^2+x-6 \leqq 0 \right\}$
(3) $\left\{ \sqrt{n}-\sqrt{m} \,\middle|\, n,\ m=1,\,2\,,3\,\cdots \right\}$

$\boxed{009-010}$ 次の数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ.
(1) $a_1=1,\, a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ (2) $a_1=1,\, a_{n+1}=\dfrac{3a_n+5}{a_n+2}$

$\boxed{011-013}$ 次の極限値を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-x)$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 3x}{1-\cos x}\right)$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{3x+1}\right)^{\frac{1}{1-x}}$

$\boxed{014-017}$ 関数 $f(x)$ は, 任意の $x,\, y$ について

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

を満たすものとする. このとき, 次を示せ.
(1) $f(0)=0,\ f(-x)=-f(x)$.
(2) 任意の有理数 r と実数 x について $f(rx)=rf(x)$.
(3) さらに $f(x)$ が連続関数であれば $f(x)=cx$ (c は定数) の形であることを示せ.
(4) $f(x)$ 連続関数でないとき, 必ずしも (3) の形にならないことを例を挙げて説明せよ.

$\boxed{018}$ $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ.

$\boxed{019}$ $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を求めよ.

$\boxed{020}$ $\mathrm{Sin}^{-1}x=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ を示せ.

$\boxed{021}$ $\mathrm{Tan}^{-1}x=\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ.

$\boxed{022}$ $2\,\mathrm{Cos}^{-1}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}=\mathrm{Cos}^{-1}x$ を示せ.

$\boxed{023}$ (Machin の公式) $4\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ.

$\boxed{024}$ (Hutton の公式) $3\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{4}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{5}{99}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ.

$\boxed{025^*}$ (Euler の公式) $\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x+y}+\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x^2+xy+1}=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{x}$ を示せ.

$\boxed{026^*}$ (Gauss の公式) $12\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{49}+32\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{57}-5\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$ を示せ.

$\boxed{027-029}$ 次の極限値を求めよ.
(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(\log x)}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{Sin}^{-1}x}{x^3}$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^{1/x}$ 青木

$\boxed{030}$ 小口 関数 $P_n(x)=\dfrac{1}{n!\,2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ は

$$(x^2-1)P_n{}''+2xP_n{}'-n(n+1)P_n=0$$

を満たすことを示せ.

$\boxed{031-032}$ 次の関数の導関数を求めよ.
(1) $\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ 菅谷 (2) $(x^2+1)^{x^2-x}$ 高山

$\boxed{033-034}$ 次の関数の第 n 次導関数を求めよ.
(1) $x^3\cos(3x)$ 長野 (2) $\sin(2x)\cos(3x)$ 平澤

第 2 段

101 山本 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}$$

102 浅野 正の数 $a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n$ について, 次を示せ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{{a_1}^x+{a_2}^x+\cdots+{a_n}^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\max\{a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n\}$$

103 石川 (Cauchy-Schwartz の不等式) 実数 $a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n;\,b_1,\,b_2,\,\cdots,\,b_n$ について

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqq\left(\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{b_k}^2\right)$$

を証明せよ. 等号の成立する場合を明示せよ.

104 上田 (Cauchy-Schwartz の不等式) 区間 $[a,\,b]$ で連続な関数 $f(x),\,g(x)$ について

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2\leqq\left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)$$

を証明せよ. 等号の成立する場合を明示せよ.

105 – 109 不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3-x}{x^3-7x+6}\,dx$ 大石 (2) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ 木村 (3) $\displaystyle\int\frac{1}{(2+3x)\sqrt{4-x^2}}\,dx$ 小松

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$ 齋藤 (浩) (5) $\displaystyle\int x\log(\,x+\sqrt{1+x^2}\,)\,dx$ 斉藤 (祐)

(6) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$ 志村 (7) $\displaystyle\int\frac{x^3}{x(x-1)^3}\,dx$ 高橋 (8) $\displaystyle\int\frac{1}{a+b\cos x}\,dx\ (a\neq 0,\,b\neq 0)$ 田中

105 – 109

(1) $f(x)=\mathrm{Tan}^{-1}x$ とおくとき, $(x^2+1)f'(x)=1$ を示せ. 長嶋
(2) (1) の両辺を n 回微分することにより, つぎの式を示せ. 鍋谷

$$(x^2+1)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0.$$

(3) $f^{(2m)}(0)=0,\,f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m(2m)!$ を示せ. 早瀬
これにより, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ の $x=0$ における Taylor 展開を書け.

110 日向 $\log\dfrac{1+x}{1-x}$ の $x=0$ における Taylor 展開を使い, $x=\frac{1}{3}$ での値を計算することにより, $\log 2$ の 5 桁の近似値を求めよ.

111 増田 $\mathrm{Tan}^{-1}x$ の $x=0$ における Taylor 展開と Machin の公式を使って, 円周率 π の 10 桁の近似値を求めよ.

$\boxed{112 - 113}$

(1) e^x の $x = 0$ における Taylor の定理を記述せよ. $\boxed{\text{村上}}$

(2) (1) を $x = 1$ で利用して e が無理数であることを証明せよ. $\boxed{\text{望月}}$

$\boxed{114}$ $\boxed{\text{横溝}}$ Taylor の定理を使って

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_n x}$$

と表すとき $\displaystyle\lim_{x \to 0} \theta_n = \frac{1}{n+2}$ であることを示せ.

$\boxed{301}$ 曲線 C を $r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta$ と極座標表示すると, C の長さ $\ell(C)$ は

$$\ell(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + \left(\frac{d}{d\theta}f(\theta)\right)^2}\, d\theta$$

で与えられることを示せ.
(hint : $a \leqq t \leqq b$ の範囲で $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ と表される曲線 C の長さ $\ell(C)$ は

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt$$

で与えられることを用いてよい.) 青木

$\boxed{302}$ 曲線 $C : y = f(x)$ は原点 O を通り, O から C 上の点 $(a, f(a))$ $(a > 0)$ までの曲線の長さが $a^2 + a$ である. 関数 $f(x)$ を求めよ. 小口

$\boxed{303 - 305}$ $a > 0$ を定数とする. 極座標表示された次の曲線の概形を描き, その長さ $\ell(C)$ を求めよ.
(1) $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ (Cardioid) 高山
(2) $r = a\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \alpha)$ (Archimedes の螺旋) 長野
(3) $r = e^{-a\theta}$ $(0 \leqq \theta < \infty)$ (等角螺旋) 平澤

$\boxed{306 - 307}$ 次の関数に対し, 原点 $(0, 0)$ における Taylor の定理に即して x, y の 4 次の項までを正確に求めよ.
(1) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ 山本
(2) $f(x, y) = e^{x-y}\cos(x + y)$ 浅野

$\boxed{308}$ ある領域で定義された 2 回連続微分可能な関数 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ が

$$f_x = g_y, \qquad g_x = -f_y$$

を満たすとき

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g = 0$$

となることを証明せよ. 石川

$\boxed{309}$

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

(Hint : 行列式の定義 次の等式を証明せよ. $|a_{ij}| = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ と積の微分の公式を用いよ.) 上田

$\boxed{310-311}$ n 変数の関数

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

を考える．このとき次を証明せよ．(hint : 309)

(1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varDelta}{\partial x_j} = 0$ 大石

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial \varDelta}{\partial x_j} = \frac{n(n-1)}{2}\varDelta$ 木村

$\boxed{312-315}$ 次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$ 小松

(2) $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ 齋藤

(3) $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ 斉藤

(4) $f(x,y) = y^2 - 2xy + x^4 - y^5$ 志村

$\boxed{316-319}$ 次の曲線の長さを求めよ．

(1) $y = x^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ 高橋

(2) $y = \log(x) \quad (1 \leqq x \leqq a)$ 田中

(3) $y = \log\cos x \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ 長嶋

(4) $y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) \quad (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4})$ 鍋谷

$\boxed{320-322}$ 次の累次積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xe^{y^2} dy$ 早瀬

(2) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \quad (a > 0)$ 日向

(3) $\displaystyle\int_1^e dx \int_0^{\log x} \frac{1+y}{x} dy$ 増田

$\boxed{323-326}$ 次の重積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{px+qy} dxdy, \quad D : 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq a,\ (pq \neq 0,\ a > 0)$ 村上

(2) $\displaystyle\iint_D x^2y^2(x^2 - y^2) dxdy, \quad D : 0 \leqq x \leqq 1,\ -1 \leqq y \leqq 2$ 望月

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2) dxdy, \quad D : y^2 \leqq x \leqq y$ 横溝

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x} dxdy, \quad D : x^2 + y^2 \leqq x$ (予備) → 菅谷

—— 第 4 周目 ——

401 開区間で定義された n 階以上微分可能で, 第 n 次導関数が連続な関数 $f(x)$ について

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k+R_{n+1}(x)$$

と書けることを示せ. ただし

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

である. (hint : $R_{n+1}(x)$ を $(n+1)$ 回部分積分せよ.) 青木

402 – 403 $y=\mathrm{Tan}^{-1}x$ について, 次の問に答えよ.
(1) 等式

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=(n-1)!\sin\left(ny+n\tfrac{\pi}{2}\right)\cos^n y\\&=(n-1)!\sin\left(n\mathrm{Tan}^{-1}x+n\tfrac{\pi}{2}\right)(1+x^2)^{-n/2}\end{aligned}$$

を数学的帰納法で示せ. 小口
(2) $\mathrm{Tan}^{-1}x$ の n 次の Maclaurin 展開を求めよ. (済) $\mathrm{Tan}^{-1}(x)=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots$
(3) $|x|\leqq 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$ ($R_{n+1}(x)$ は n 次の Maclaurin 展開式における剰余項) であることを示せ. (これにより (2) の Maclaurin 級数は $|x|\leqq 1$ で収束し, $\mathrm{Tan}^{-1}x$ に等しい.) 菅谷

404 各整数 n に対し, $I_n=\displaystyle\int\frac{\sin nx}{\sin x}dx$ とおくとき

$$(n-1)(I_n-I_{n-2})=2\sin(n-1)x$$

となることを証明せよ. 高山

405 – 406 (1) $f(x)$ が微分可能な関数ならば,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$$

であることを示せ. 長野
(2) 一般に (1) の等式における左辺の極限が $x=a$ で存在するならば, $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるといえるか. 平澤

407 $f(x)$ が 2 階まで微分可能な関数ならば,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

であることを示せ. 山本

$\boxed{408}$ 関数 $z=F(x,y)$ について, 定数 a が存在して $a^2z_{xx}=z_{yy}$ と書かれるとき, 関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ が存在して $z=f(x+ay)+g(x-ay)$ と書けることを証明せよ. (hint : はじめに, $a\neq 0$ のとき $u=x+ay,\ v=x-ay$ と変数変換すると $a^2z_{xx}=z_{yy}$ は $z_{uv}=0$ と同値であることを証明する.) 浅野

$\boxed{409}$ $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ とする. このとき, $\Delta u=0$ ならば $\Delta\Big(x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)=0$ となることを証明せよ. 石川

$\boxed{410-412}$ 関数 $P_n(x)=\dfrac{1}{n!\,2^n}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ について

(1) $m\neq n$ のとき $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$ を証明せよ. 上田

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}P_n(x)^2dx=\frac{2}{2n+1}$ を証明せよ. 大石

(3) $(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$ を証明せよ. 木村

$\boxed{413-414}$ 被積分関数の不定積分が存在しないので, 工夫が必要:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ 小松

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\log(1+\tan x)dx$ 齋藤

$\boxed{415}$ Torus の内部 $(\sqrt{x^2+y^2}-a)^2+z^2\leqq b^2\ \ (0<b<a)$ の体積を求めよ. 斉藤

$\boxed{416}$ 関数 $f(x)$ は区間 (a,b) で $(n+1)$ 回微分可能で $f^{(n+1)}(x)$ はその区間で連続であるとし, 1 点 $c\in(a,b$ では $f^{(n+1)}(c)\neq 0$ であるとすれば, Taylor の定理から $0<\theta<1$ が存在して,

$$f(c+h)=f(c)+f'(c)\tfrac{h}{1!}+f''(c)\tfrac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n-1)}(c)\tfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}++f^{(n)}(c+\theta h)\tfrac{h^n}{n!}$$

と表される. このとき

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$$

となることを示せ. 志村

$\boxed{417}$ 自然数 $n\geqq 2$ について

$$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

を証明せよ. 高橋

$\boxed{418 - 419}$ 次の問に答えよ.
(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n}=1$$

を証明せよ. 田中
(2) 任意の自然数 n において $R(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ となる様な有理式 $R(x)$ は存在しないことを証明せよ. (hint : $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^k}=0$ となることを利用せよ.) 長嶋

$\boxed{420}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

が収束することを証明せよ. (Euler の定数と呼ばれ γ で表す.) 鍋谷

$\boxed{421}$ より一般的に, 区間 $(0,\infty)$ において $f(x)$ は単調に減少する正の連続関数であるとすれは,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\right)$$

は収束することを証明せよ.
(hint : $f(k+1)\leqq\int_k^{k+1}f(x)dx\leqq f(k)$ を利用する.) 早瀬

$\boxed{422}$ $x>0$ に対し $\displaystyle\log(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}$ を $\log(x)$ の定義として,

$$\log(xy)=\log(x)+\log(y)$$

を証明せよ. 日向

$\boxed{423}$ 関数 $f(x)$ が区間 $[a,+\infty)$ において微分可能であって, $f(a)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ が成り立つならば

$$f'(\xi)=0,\qquad a<\xi<+\infty$$

を満足する ξ が存在することを証明せよ. (hint : $\varphi(t)=\frac{1}{t}+a-1$ とし, $g(t)=f(\varphi(t))$ を考えよ. このとき x の区間 $[a,\infty)$ は t のどんな区間に対応するか. また, $g(1)$ と $\displaystyle\lim_{t\to+0}g(t)$ を比較せよ.) 増田

$\boxed{424}$ $a_0\neq 0$ とする. 関数 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ について

$$f(a)\geqq 0,\quad f'(a)\geqq 0,\quad \cdots,\quad f^{(n)}(a)\geqq 0$$

が成り立つとき, 方程式 $f(x)=0$ は a より大きい解を持たないことを証明せよ. (hint : $x=a$ の周りでの Taylor の定理利用.) 村上

* $\boxed{42a - 42b}$ $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ は n 次の多項式で方程式 $H_n(x)=0$ は n 個の相異なる実数解をもち, さらに $n\geq 2$ のとき, それらは $H_{n-1}(x)=0$ の解で分離されることを証明せよ.

$\boxed{425}$ 関数 $y = f(x)$ に対し

$$\varDelta\binom{y}{x} = \frac{2y'y'' - 3y''^2}{2y'^2}$$

と表す. (Schwartz の導函数と呼ばれる.) a, b, c, d が $ad - bc \neq 0$ なる定数のとき, $z = \dfrac{ay+b}{cy+d}$ について

$$\varDelta\binom{y}{x} = \varDelta\binom{z}{x}$$

が成り立つことを証明せよ. $\boxed{\text{望月}}$

$\boxed{426}$ ある領域で定義された 2 回連続微分可能な関数 $u = f(x, y)$ と $v = g(x, y)$ が

$$u_x = v_y, \qquad v_x = -u_y$$

を満たすとし, $z = \varphi(u, v)$ が 2 階偏微分可能であるとき

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)$$

となることを証明せよ. $\boxed{\text{横溝}}$