

2014 年度 前期 模擬試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
1/1	有	なし	80 分	微分積分 I <small>木曜 1 時限, 教科書: 北岡 他 著 「工科系の微分積分学の基礎」</small>	B	大西 良博 印
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	情報工学科	1 年			

- 注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ を求めよ。

2 次の関数の導関数を定義に従って求めよ。

(1) x^3

(2) $\sqrt[3]{x}$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = e^x \sin x$

(2) $y = \tan^{-1} \frac{x-1}{x+1}$

(3) $y = \sin^{-1}(e^{-x^2})$

4 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の n 次導関数を求めよ。

5 任意の x について $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ を証明せよ。
 (これは, 問題 [A],[B] にはないが, できる様になっておいた方がよい。)

証明 (これは一例)

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdots \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}$$

であるが, ここで $2|x| < N + 1$ となる自然数 N をとり固定すると, n が十分大きくなれば,

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdots \frac{|x|}{N} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}$$

となる。ここで, 最初の N 個を除けば, あとはすべて $\frac{1}{2}$ 未満なので, これらの積は

$$\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdots \frac{|x|}{N} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

より小さく, これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。

6 次関数の偏導関数 $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ を求めよ.
さらに, 2 階偏導関数 z_{xx} , $z_{xy}(=z_{yx})$, z_{yy} も求めよ.

(1) $2x^3 + 5xy^2 + y^3$

(2) $\frac{1}{xy^2}$

(3) $\log_x y$

7 次の不等式を証明せよ.

(1) $1 + x(e - 1) \geq e^x$ ($0 \leq x \leq 1$)

(2) $\log(1 + x) \geq x - x^2$ ($x \geq -\frac{1}{2}$)

8 関数 $y = \frac{x}{\log x}$ のグラフの概形を描け.

($\lim_{x>0, x \rightarrow 0} \frac{x}{\log x}$ の値にも注意せよ.)

9 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x)}{x^2}$