

2024 年度 前期 模擬試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部		評点	
理工学部		/ 60 点	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
3 P / 2 枚	有	なし	80 分	微分積分 I <small>金曜 2 時限, 教科書: 北岡 他 著 『工科系の微分積分学の基礎』</small>	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏 名
なし	理工学部		年		

- 注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 解答欄が不足した場合は「裏へ」指示を書き裏面に解答してもよい。

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ を求めよ。 (3 点)

例解.

$$\begin{aligned} n(\sqrt{n^2 + 1} - n) &= n \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2 次の関数の合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めよ。

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x + 1 \quad (3 \text{ 点})$$

例解

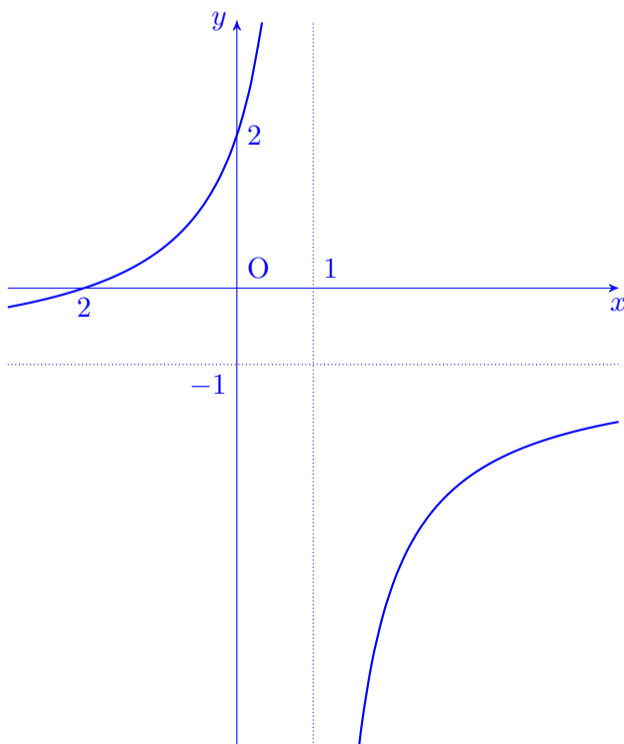
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^3. \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^3) = x^3 + 1. \end{aligned}$$

3 次の関数の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求め, そのグラフの概形を描け。

$$f(x) = \frac{x - 2}{x + 1} \quad (3 \text{ 点})$$

例解.

$$f^{-1}(x) = -\frac{x + 2}{x - 1}.$$



4 次の関数の導関数を定義に従って求めよ。

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$. (3 点)

例解.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \cos x$. (Hint: 和積の公式) (3 点)

例解.

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(x + \frac{2}{h}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{2}{h}\right) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= -\sin x. \end{aligned}$$

5 次の関数を微分せよ。

(1) $y = e^x \sin x^2$ (3 点)

例解.

$$y' = e^x \sin x^2 + 2x e^x \cos x^2.$$

(2) $y = \tan^{-1} \sqrt{x}$ (3 点)

例解.

$$y' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

(3) $y = x^x$ (x の x 乗) ($x > 0$) (3 点)

例解. (対数微分法) 両辺の対数をとると

$$\log y = x \log x.$$

これを x で微分して

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1. \\ \therefore y' &= y(\log x + 1) = \boxed{x^x(\log x + 1)}. \end{aligned}$$

注意. 一般的に

(x に依存する関数) (x に依存する関数)

の形の微分は対数微分法で! 他にも対数微分の方が速い場合がある。Check しておくこと。

学籍番号

6 自然数 n に対し, 次の関数の n 次導関数を求めよ.

(1) $f(x) = \log(1-x)$ ($x < 1$). (3点)

例解.

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

(2) $f(x) = x^2 e^x$. (3点)

例解. Leibniz の公式を利用して,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0} x^2 e^x + \binom{n}{1} 2x e^x + \binom{n}{2} 2e^x \\ &= x^2 e^x + n \cdot 2x e^x + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2e^x \\ &= (x^2 + 2nx + n^2 - n) e^x. \end{aligned}$$

7 次の不等式を証明せよ. (3点)

$$x - \sin x < \tan x - x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

例解. 右辺と左辺の差をとり

$$f(x) = (\tan x - x) - (x - \sin x) = \tan x + \sin x - 2x$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \\ &= \frac{1 + \cos^3 x - 2 \cos^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

ここで, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のときは $\cos x - 1 < 0$ である. また

$$\cos^2 x - \cos x - 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

で $\cos x = 0, \frac{2}{\pi}$ において $\cos^2 x - \cos x - 1 = -1$ であるから $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において

$$\cos^2 x - \cos x - 1 < 0$$

である. よつて $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $f'(x) > 0$ である. つまり $f(x)$ は単調増加関数である.

さらに $f(0) = 0$ ゆえ, $f(x) > 0$ がわかる. 従つて所望の不等式が得られた.

8 関数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ について答えよ.

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を求めよ. (3点)

例解.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x^2 - 2}{(x^2 + 2)^2} \\ f''(x) &= \frac{2x(x^2 - 6)}{(x^2 + 2)^3}. \end{aligned}$$

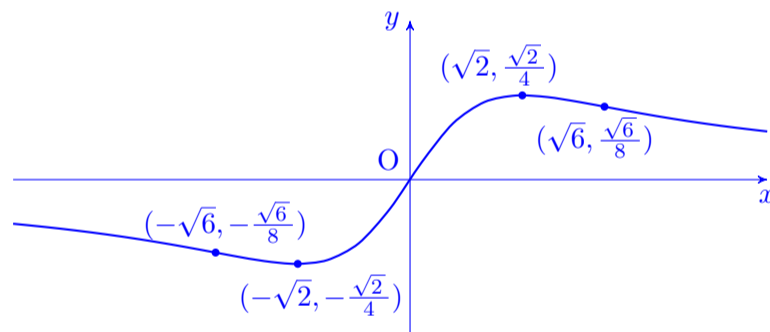
(2) この関数の増減表を作成せよ ($f''(x)$ の欄も含めること). (3点)

例解.

x	...	$-\sqrt{6}$...	$-\sqrt{2}$...	0	...	$\sqrt{2}$...	$\sqrt{6}$...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{6}}{8}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	↗	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	↘	$\frac{\sqrt{6}}{8}$	↘

(3) グラフの概形を描け. 漸近線があれば求め, 変曲点も明示せよ. (3点)

例解.



また

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 0$$

なので, 漸近線は x 軸である.

9 次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{x}$ (3点)

例解.

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times 1 \times 1 \quad (t = \tan x \text{ とおいた}) \\ &= 1 \times 1 \times 1 = \boxed{1} \dots\dots \text{Ans.} \end{aligned}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) + e^{-x} - 1}{x^3}$ (3点)

例解. L'Hôpital の定理を繰り返へし使用してもできるが, Landau の o を使ふ方が速い.

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) + (1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)) - 1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) \\ &= \boxed{\frac{1}{6}} \dots\dots \text{Ans.} \end{aligned}$$

10 次の関数について, 偏導関数 $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, 2 階偏導関数 z_{xx} , $z_{xy} (= z_{yx})$, z_{yy} を求めよ.

さらに, その graph 上, 与えられた点 A における接平面の方程式も求めよ.

(1) $z = 2x^3 + 5xy^2 + x^2y - y^3$, $A(1, 2, 16)$ (3点)

例解. 1 次と 2 次の偏導関数は

$$\begin{aligned} z_x &= \boxed{6x^2 + 5y^2 + 2xy}, \quad z_y = \boxed{10xy + x^2 - 3y^2}, \\ z_{xx} &= \boxed{12x + 10y}, \quad z_{xy} = z_{yx} = \boxed{10y + 2x}, \quad z_{yy} = \boxed{10x - 6y}. \end{aligned}$$

$$z_x|_{(x,y)=(1,2)} = 6 + 20 + 4 = 30,$$

$$z_y|_{(x,y)=(1,2)} = 20 + 1 - 12 = 9,$$

$$z|_{(x,y)=(1,2)} = 2 + 20 + 2 - 8 = 16$$

であるから, 求める方程式は

$$z - 16 = 30(x - 1) + 9(y - 2).$$

$$\therefore \boxed{z = 30x + 9y - 32} \dots\dots \text{Ans.}$$

(2) $z = \sin(xy^2)$, $A(\pi, 1, 0)$ (3点)

例解.

$$z_x = \boxed{y^2 \cos(xy^2)}, \quad z_y = \boxed{2xy \cos(xy^2)},$$

$$z_{xx} = \boxed{-y^4 \sin(xy^2)},$$

$$z_{xy} = z_{yx} = \boxed{2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2)},$$

$$z_{yy} = \boxed{2x \cos(xy^2) - 4x^2y^2 \sin(xy^2)}.$$

以上から

$$z_x|_{(x,y)=(\pi,1)} = -1, \quad z_y|_{(x,y)=(\pi,1)} = -2\pi, \quad z|_{(x,y)=(\pi,1)} = 0$$

であり,

$$z = -(x - \pi) - 2\pi(y - 1).$$

$$\therefore \boxed{z = -x - 2\pi y + \pi + 2}$$

11 方程式 $x^2 - 3xy + 3y^3 - y = 0$ で表される曲線の $A(1, 1)$ における接線の方程式を求めよ. (3点)

例解.

$$2x + (-3x + 9y^2 - 1)y' = 0,$$

$$y' = -\frac{2x}{-3x + 9y^2 - 1}.$$

$$y'|_{(x,y)=(1,1)} = -\frac{2}{-3 + 9 - 1} = -\frac{2}{5}.$$

よつて求める方程式は

$$y - 1 = -\frac{2}{5}(x - 1).$$

$$\therefore \boxed{y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}}.$$

12 2 変数関数 $z = f(x, y) = 6x^3 - 18xy + 3y^2 + 16x$ の極値を求めよ. (3点)

例解. 与式より,

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 18x^2 - 18y + 16 = 0, \\ f_y(x, y) = -18x + 6y = 0 \end{cases}$$

を解いて $(x, y) = (\frac{1}{3}, 1), (\frac{8}{3}, 8)$. また,

$$f_{xx}(x, y) = 36x,$$

$$f_{xy}(x, y) = -18,$$

$$f_{yy}(x, y) = 6.$$

(i) $(x, y) = (\frac{1}{3}, 1)$ のとき.

$$A = f_{xx}(\frac{1}{3}, 1) = 12 > 0,$$

$$B = f_{xy}(\frac{1}{3}, 1) = -18,$$

$$C = f_{yy}(\frac{1}{3}, 1) = 6,$$

$$D = B^2 - AC = 252 > 0.$$

よつて, この点において極大でも極小でもない. ちなみに $f(\frac{1}{3}, 1) = \frac{23}{9}$.

(ii) $(x, y) = (\frac{8}{3}, 8)$ のとき.

$$A = f_{xx}(\frac{8}{3}, 8) = 96,$$

$$B = f_{xy}(\frac{8}{3}, 8) = -18,$$

$$C = f_{yy}(\frac{8}{3}, 8) = 6,$$

$$D = B^2 - AC = -252 < 0$$

なので, この点において極小で $f(\frac{8}{3}, 8) = \boxed{-\frac{320}{9}}$.