微 分 積 分 学

2021 年度版

はじめに

この note は名城大学の工学系学科向け「微分積分 1」と「微分積分 2」の講義用に作成したものである. 前期の「微分積分 1」では微分, 後期の「微分積分 2」では積分について学ぶ.

工学で使ふためだけの解説をすることはできるが, 数学の広い世界にも触れていただきたいので, さうはしないで, 微分積分学を通じて数学の文化を味はつていただける様に書いた. 筆者が長年, 微分積分学を教へてきて, 微分積分学を含めた数学といふ学問について感じてゐることを, ところどころに随想風に述べてゐる. これが, 読者が今後, 数学を学んでいく上での参考になればと期待する.

歴史的かなづかひで書いたが, これは筆者の趣味である. 活用などの仕組みを繙けば, こちらの方が断然 " 数学的 " である.

また, 函数は「関数」のことである. 他に読みづらい事項はないと信じる.

小節の title の右に $^\triangledown$ の印がある小節では, 高校で学んだ内容を厳密に再構成してゐる. ここは, ひとまづ飛ばして読んでいけばよい. 但し, 節末問題はすべて解くべきである.

解答の online での送り方 :

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \times 3$ は (1/2)^n*3 と書き, $\frac{4}{25}$ は 4/25 などと書けばよい.

繰り返しになるが, 例えば $\dfrac{x-1}{2x-1}$ は (x-1)/(2x-1) の様に入力せよ. 解答を送信する際, 例えば $\sqrt{2}$ は √2 あるいは sqrt{2} の様に入力せよ. また, x^2 は x^2 などと記せ. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は int_0^1 f(x)dx と書く

★ 節末の問題を易しいと感じたら, 旧 text の節末の**問題 [A]** を解答せよ.

但し, これらは教科書の巻末の解答や「演習書」を参考に自習するものとし, 送信の必要はない.

参考文献

[1] 岡安 隆照, 吉野 崇, 高橋 豊橋, 武元 英夫 : 微分積分学入門, 1988 年, 裳華房

[2] 三宅 敏恒 : 入門微分積分, 1992 年, 培風館

[3] 三村 征雄 : 大学演習 微分積分学, 1969 年, 裳華房

[4] 彌永 昌吉 : 数の世界（上）, （下）, ???? 年, 岩波新書

[5] 三村 征雄 : 微分積分学 I, II, 岩波全書

[6] Rudin, Walter : Principles of Mathematical Analysis, 1964 年, McGraw-Hill,
（日本語訳 W. ルーディン : 現代解析学, 1971 年, 共立出版, 近藤/柳原訳）

精密な議論が書かれた手近な本として [1] を勧める. [2] は小さい本にも拘はらず, 簡潔に書かれてゐる. 特に Γ 函数, B 函数, 微分方程式の章を参照されるとよい.

番号の右上に $\star$ のついた補題, 命題, 定理などについては, 一旦は証明を読む必要はなく, 感覚的な理解に留めておけばよいと思はれる.

目次

第 1 章　基礎

§1.　実数

1.1.　集合と写像

集合に関する以下の記法については, 既知とする :

(1)　$A = B$　…　集合 A と集合 B は同じ.

(2)　$A \subset B$（あるいは $B \supset A$）　…　集合 A は集合 B に含まれる. A は B の部分集合. これは $A = B$ のときも正しい.

(3)　$A \cap B$　…　A と B の共通部分,　$A \cup B$　…　A と B の和集合

(4)　$x \in A$　…　x は集合 A の要素

(5)　これらの否定　…　$A \not\subset B$,　$x \notin A$ 等

定義 1.1　集合 A から B への写像　f とは, A の各元 x について, B の元 $f(x)$ が定められてゐることを意味するものとする. それを記号で $f : A \longrightarrow B$ と書く. 要素の対応は $x \longmapsto f(x)$ の様に記す.

1.2.　数

これまでて学んできた 自然数, 整数, 有理数の定義は既知とする :

(1)　自然数の全体 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\}$ を $\mathbb{N}$ で表す[1].

(2)　整数の全体 $\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ を $\mathbb{Z}$ で表す[2].

(3)　有理数の全体を $\mathbb{Q}$ で表す[3].

どんな有理数も $m \in \mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{N}$ によつて, $\dfrac{m}{n}$ の形に書けて,

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \iff mn' = m'n$$

が成り立つ.

注意 1.2　知られてゐる数にある 演算 が定義されると, その 逆演算 （つまり, 与へられた a と c に対して $a + x = c$ を満たす x を求める演算）が自由にできる様に, 数の世界は広がつてきた. 例へば $\mathbb{N}$ に定義された加法の逆演算は減法であり, それが自由

1) 英語 the natural numbers より.

2) 数を意味す独語 Zahlen（ツァーレン）より.

3) 商を意味する英語 quotient（クォーシェント）より.

にできる様に $\mathbb{Z}$ へと広がり, $\mathbb{Z}$ に定義された乗法の逆演算, つまり除法が自由にできる様に $\mathbb{Q}$ へと広がつた. 今も数の世界は拡大しつつある.

1.3. 実数

命題 1.3 有理数を小数で表示すると, 有限小数になるか, または, 循環小数になる. 逆に有限小数や循環小数は有理数である. このことは, 何進法で表示しても成り立つ.

証明 与へられた有理数 $\frac{m}{n}$ （$m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$）について, これが有限小数にならないとする. m の n による除算を行なふとき, 余りの可能性は $0, \cdots, n-1$ の n 通りしかない. よつて n 回以上の除算の中に同じ余りが現れる. その余り以降の計算は全く同じ計算であるから, 商である小数表示に並ぶ数字は繰り返へしが起こる.
逆を示さう. まづ, 有限小数は有理数であることは簡単にわかる. 循環小数 x の循環節の長さを k とするとき, $10^k x - x$ は有限小数であるから, それを r と書けば

$$10^k x - x = r, \quad \therefore\ x = \frac{r}{10^k - 1}$$

となり, x は有理数である. 以上のことは, 10 進法に限つたことではなく, 別の進法を選んでも同じことである. □

さて, 一方で循環しない小数があるのだから, 上のことから, 有理数でない数（無理数）があることが納得できる.

Pythagoras は類似の考察を行ひ, 彼は無理数の存在を“隠蔽”しやうとしたと考へられてゐる. この当時は音楽と数学が一体のものであつて, 協和音は（同じ材質で同じ張力で張られた）弦の長さが整数比であるときに限られることが理由であつたと思はれてゐる.

まとめると, 1 つの小数による表示が 1 つの実数を与へる. また, 1 つの実数は本質的に 1 つの小数に表示される. 例外は

$$1 = 0.99999\cdots$$

の様に 9 が際限なく続く場合である. 以上の考察をもつと厳密に展開して実数が構成されるが, ここでは, 直観的な理解を主とすることにして, 詳細は述べない. 興味があれば, [4] などを参照されたい.

感覚的には, 実数は数直線の描像ととても合致するから, 数直線を多用し, 函数の graph などが図形として視認できるのである.

定義 1.4 数直線上の点に, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を通常の方法で, 対応させたとき, 依然として“隙間”が残る. これらの隙間を埋めて, 丁度, 数直線全体を埋めつくす様に広げた数の全体が, 実数である. 実数は記号で $\mathbb{R}$ (英語 The real numbers より) と表される.

定義 1.5 (区間) 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の区間と呼ばれる特別な部分集合があり, 以下の様に定義される. 但し $a, b \in \mathbb{R}$ である.

(1) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$,
(2) $[a, b) = \{x \mid a \leqq x < b\}$,
(3) $(a, b] = \{x \mid a < x \leqq b\}$,
(4) $[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$,
(5) $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$,
(6) $(-\infty, b] = \{x \mid x \leqq b\}$,
(7) $(a, \infty) = \{x \mid a < x\}$,
(8) $[a, \infty) = \{x \mid a \leqq x\}$.

このうち, (1), (5), (7) は開区間と呼ばれ, (4), (6), (8) は閉区間と呼ばれる.

定義 1.6 たとへば, 区間 $I = [a, b)$ について, a や b を I の区間の境界と呼ぶ. 他の形の区間であつても同様である. 但し $(-\infty, b]$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$ 等の区間については, $-\infty$ や ∞ を境界とはいはない.

絶対値についても確認しておく.

定義 1.7 実数 a に対して,

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定め, これを a の絶対値 と呼ぶ.

定義 1.8 座標平面 とは 2 つ実数の組の全体

$$\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

のことであり, x 軸(即ち $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$)を水平に描き, y 軸(即ち $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$)はこれに鉛直に描かれる. 原点 とは点 $(0, 0)$ のことであつて, 通常 O と記される.

演 習 問 題

1.9 2 つの集合

$A = \{x \mid -1 < x \leqq 3\},\ B = \{x \mid 2 < x \leqq 4\}$

について答へよ.

(1) A, B を区間の記号で記せ.

(2) $A \cap B$ を不等式を使つて表せ. また, 区間の記号で表せ.

1.10 次は正しいか否かを理由を付けて答えよ.

(1) $\{1,\ 2\} \subset [1,3)$

(2) $\{1,\ 2\} \in [1,3)$

(3) $[1,3) \subset (1,3]$

(4) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

(5) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$

1.11 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ であることを証明せよ.

1.12 次の事が正しいか否かを理由を付けて答えよ.

(1) $0.102003000400005\cdots \notin \mathbb{Q}$.

(2) a が実数のとき $\left|\sqrt{a^2}\right| = a$.

(3) a が実数のとき $|-(-a)| = |-a|$.

§ 2. 数列, 上限, 下限, 最大値, 最小値

2.1. 数列

定義 2.1 (1) 数列とは, 自然数 $\mathbb{N}$（の部分集合）から実数 $\mathbb{R}$ への写像 $n \mapsto a_n$ のことである. これを $\{a_n\}$ または

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$$

と表す. ここに並んだ数をこの数列の初項, 第 2 項, 第 3 項, $\cdots$ などと呼ぶ. n を変数とみたときの a_n を, $\{a_n\}$ の一般項と呼ぶ.
(2) 数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n が $a_1, \cdots, a_{n-1}$（のいくつか）から帰納的に定まるとき, それを表す関係式をこの数列の漸化式と称する. その様な数列のすべての項は, 初項 a_1 と漸化式だけから定まる.

例 2.2 数列の例を述べながら, その他の概念を振返る：

(1) 数列 $\{3n+1\}$ を書き下せば 4, 7, 10, 13, $\cdots$ と表示される. これは, 初項が $a_1 = 4$ で, $a_{n+1} = a_n + 3$ なる漸化式で定まる数列である.

(2) 数列 $\{n^2\}$ を書き下せば 1, 4, 9, 16, 25, $\cdots$ と表示される. これは, 初項 $a_1 = 1$ と漸化式 $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ から定まる数列である.

(3) 任意の隣接 2 項の差が一定, 即ち $a_{n+1} - a_n = d$（d は定数）がすべての $n \in \mathbb{N}$ について成り立つとき, $\{a_n\}$ を等差数列と呼び, d をこの数列の公差といふ. 初項が $a_1 = a$ で, 公差が d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a + (n-1)d$ で与へられる.

(4) 任意の隣接 2 項の比が一定, 即ち $a_{n+1} = r\,a_n$（r は定数）がすべての $n \in \mathbb{N}$ について成り立つとき, $\{a_n\}$ を等比数列と呼び, d をこの数列の公比といふ. 初項が $a_1 = a$ で, 公比が r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = a\,r^{n-1}$ で与へられる.

定義 2.3 数列 $\{a_n\}$ は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $a_{n+1} \leqq a_n$ であるとき, 単調増加であるといはれ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $a_{n+1} \geqq a_n$ であるとき, 単調減少であるといはれる.

例 2.4 例へば, 一般項が $a_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$（$\lfloor a \rfloor$ は実数 a を越えない最大の整数を表す）のとき,

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ \cdots$$

となるが, これは単調増加である.

例題 2.5 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n - 1$（$n \in \mathbb{N}$）から定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答 $\alpha = 3\alpha - 1$ なる α, つまり $\alpha = \frac{1}{2}$ を漸化式の両辺から減じれば

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \tfrac{1}{2} &= 3(a_n - \tfrac{1}{2}). \\ \therefore a_n - \tfrac{1}{2} &= 3^{n-1}(a_1 - \tfrac{1}{2}) = 3^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2}. \\ \therefore a_n &= \tfrac{1}{2}(3^{n-1} + 1). \end{aligned}$$

を得る. □

この様に, 初項と漸化式から一般項を求めることを, <u>漸化式を解く</u>, などといふことがある.

2.2. 数列の極限

定義 2.6 数列 $\{a_n\}$ において, n を限りなく大きくすれば, a_n がある値 $\alpha \in \mathbb{R}$ に限りなく近づくとき, $\{a_n\}$ の <u>極限値</u> は α である, または α に <u>収束</u> するといひ,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \longrightarrow \alpha \ \ (n \to \infty)$$

と記す.

注意 2.7 これを精密に述べると次の様になる：任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるとき, $\{a_n\}$ の極限値は α であるといふ.

定義 2.8 数列 $\{a_n\}$ について, n が増大するにつれて, 限りなく大きくなるならば, $\{a_n\}$ の極限は <u>無限大</u> である, あるいは無限大に <u>発散</u> するといはれ, これを

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \text{または} \quad a_n \longrightarrow \infty \ \ (n \to \infty)$$

と書く. 極限が <u>負の無限大</u> であることの定義も同様である.

注意 2.9 これを精密に述べると次の様になる：任意の $M > 0$ に対し, $N \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$n > N \implies a_n > M$$

となるとき, $\{a_n\}$ の極限は ∞ であるといふ.

注意 2.10 極限値が存在する場合と, 無限大または無限小に発散する場合をまとめて <u>極限が存在する</u>といふ. また, 極限値が存在しない場合はすべて, その数列は発散するといふ. これらの用語を整理しておく.

<table>
<tr><td>極限値が存在</td><td>∞ に発散</td><td>$-\infty$ に発散</td><td>その他（振動など）</td></tr>
<tr><td>収 束</td><td colspan="3">発 散</td></tr>
<tr><td colspan="3">極 限 が 存 在</td><td>極限は存在しない</td></tr>
</table>

命題 2.11 $c \in \mathbb{R}$ を定数とする．数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束するとする．このとき $\{ca_n\}$, $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ も収束し，以下の等式が成り立つ．以下の左辺の極限値も存在し，次の等式が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty}a_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n.$$

上の仮定に加えて $\{b_n\}$ の極限値が 0 でないならば，$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ も収束し，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}b_n}.$$

が成り立つ．

命題 2.12 すべての[4] n について $a_n \leqq b_n$ であれば

$$\lim_{n\to\infty}a_n \leqq \lim_{n\to\infty}b_n$$

が成り立つ[5]．

命題 2.13 等比数列 $\{r^n\}$ について

$$\lim_{n\to\infty}r^n = \begin{cases} 0 & (|r|<1), \\ 1 & (r=1), \\ \infty & (r>1), \\ \text{極限なし} & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

例題 2.14 次の数列の極限値を求めよ．

(1) $\left\{\dfrac{2n+1}{3n-2}\right\}$

(2) $\{\sqrt{3n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\}$

(3) $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$

(4) $\left\{\dfrac{5^n-2^n}{5^n+3^n}\right\}$

[4] 「$N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ について」としても，以降は成り立つ．

[5] 任意の n について $a_n < b_n$ であっても，$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}b_n$ となることがある．

解答 (1) $\left\{\dfrac{2n+1}{3n-2}\right\}$ の極限は

$$\frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} \longrightarrow \frac{2}{3}$$

である．あるいは

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$$

である．
(2) については, 分母子に $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ を掛けることで,

$$\begin{aligned}\sqrt{3n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\,) &= \frac{2\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{2\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \longrightarrow \sqrt{3}\end{aligned}$$

と求められる．
(3) 任意の n について $-1 \leqq \sin n \leqq 1$ であるから

$$\frac{-1}{n} \leqq \frac{\sin n}{n} \leqq \frac{1}{n}.$$

ここで, 2.12 を踏まへて $n\to\infty$ とすれば

$$\frac{\sin n}{n} \longrightarrow 0$$

がわかる．
(4) 2.13 と 2.11 を組み合はせて,

$$\frac{5^n-2^n}{5^n+3^n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n} \longrightarrow 1$$

となる． □

例題 2.15 次の漸化式で定まる数列の極限を求めよ．
(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n-1.$
(2) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{2a_n}.$
(3) $a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}.$

解答 (1) もし極限値が存在するならば, それを α とすると 2.11 により,

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 1$$

が成り立たなければならない．これを解くと $\alpha=-2$ である．この予測値を与式の両

辺から引いて

$$a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2).$$

ここで $a_1 + 2 = 3$ であるから

$$a_n + 2 = 3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}. \therefore\ a_n = \frac{3}{2^{n-1}} - 2.$$

(2) もし極限値が存在するならば, それを α とすると 2.11 により,

$$\alpha = \frac{3\alpha - 1}{2\alpha}$$

が成り立たなければならない. これを解くと $\alpha = 1$ である. 即ち, 極限が存在するならばそれは 1 である. この予測値を与式の両辺から引いて

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n - 1}{2a_n},$$
$$\therefore\ \frac{1}{a_{n+1} - 1} = \frac{2a_n}{a_n - 1} = 2 + \frac{2}{a_n - 1}.$$

ここで $b_n = \frac{1}{a_n - 1}$ とおくと,

$$b_{n+1} = 2b_n + 2,$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

がわかる. よつて

$$a_n = \frac{1}{b_n} + 1 \ \longrightarrow 1.$$

□

漸化式を解いて一般項がうまく記述でき, そこから極限がわかる場合もあるが, 一般には漸化式から一般項を記述することは容易ではない. しかし, 一般項を具体的に記述できなくても極限が簡単にわかる場合は多い. 例へば graph を使ふ方法があり, 3.12 に説明がある.

例題 2.16 $a > 0$ を定数とする. 数列 $\{\sqrt[n]{a}\}$ の極限値が 1 であることを示せ.

2.3. 上限と下限

定義 2.17 集合 $A \subset \mathbb{R}$ と $m, M \in \mathbb{R}$ について,
任意の $a \in A$ について $a \geqq M$ となるとき, M は A の<u>上界</u>であるといはれる.
任意の $a \in A$ について $m \leqq a$ となるとき, m は A の<u>下界</u>であるといはれる.
A の上界には最小値が存在する[5)]. それを A の<u>上限</u>（supremum）と呼び, $\sup A$ で表す. A の要素の中での最大値が存在すれば, それが $\sup A$ に他ならない. 同様に A の下界には最大値が存在する. それを A の<u>下限</u>（infimum）と呼び, $\inf A$ で表す. A の要素の中での最小値が存在すれば, それが $\inf A$ に他ならない. 空集合 の上界や下界は考へない（存在しない). また, 空集合でない集合 A の上限が存在しないとき, A の上限は ∞ と称し, 空集合でない集合 A の下限が存在しないとき, A の下限は $-\infty$ と称する.
さらに, 数列 $\{a_n\}$ について, これを集合 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ と考へて, その上界や下界も同様に定義される.

例 2.18 (1) $\sup\,[\,a,\, b\,) = b,\;\; \sup\,[\,a,\, \infty\,) = \infty,\;\; \inf\,[\,a,\, \infty\,) = a.$

(2) $\inf\left\{\, 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} \,\right\} = 1,\;\; \sup \mathbb{N} = \infty,\;\; \inf \mathbb{Z} = -\infty.$

2.4. 単調収束定理

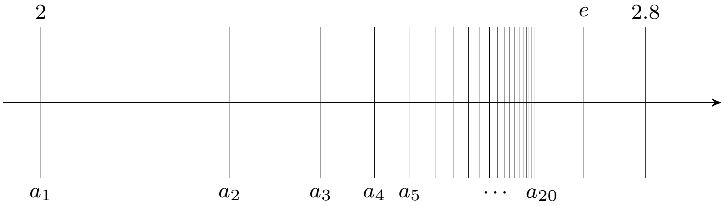
実数の持つ, 本質的な性質が次の定理に込められてゐる. 詳述はしないが, これを納得できるか否かが重要である. 納得できない場合は, より詳しく書かれた書物（例へば [5]）を参照すべきである. 筆者は, これを理解できたと感じるまで, かなりの時間を思考に費した記憶がある.

定理 2.19 （<u>単調収束定理</u>）上に有界な単調増加数列は収束する. また, 下に有界な単調減少数列も収束する.

例 2.20 一般項が $a_n = \dfrac{1}{n}$ なる数列は下に有界で単調減少である.

例 2.21 2.19 の重要な応用例は Napier の数の存在証明である. 以下の 2.22 で説明する通り, $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ は上に有界で単調増加である.

5) 証明には手間が掛かるが, ここに実数の本質が現れる. [5], 第 2 章 §4 や [6] 定理 1.36 を参照されたい. 下界の最大値の存在も同様である.


2
e
2.8
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
$\cdots$
a_{20}

命題 2.22 （ネイピア Napier の数の存在） 数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束する．その極限値を e と書く．$2<e<3$ である．

証明 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく．次の 3 つを証明すればよい．

(1) $a_1=2$. (2) 任意の $n\in\mathbb{N}$ について $a_n<a_{n+1}$. (3) 任意の $n\in\mathbb{N}$ について $a_n<3$.

まづ, (1) は明らか. 次に, (2) については, $n\geqq 3$ として, 2 項定理を用いて

$$\begin{aligned}
a_n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^3+\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-1)!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{n!}\Big(\frac{1}{n}\Big)^n\\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)+\cdots \qquad (2.23)\\
&\quad\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-2}{n}\Big)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-2}{n}\Big)\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

同様にして, a_{n+1} は

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)+\cdots\\
&\quad\cdots+\frac{1}{(n+1-2)!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n+1-3}{n+1}\Big)\\
&\quad+\frac{1}{(n+1-1)!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n+1-2}{n+1}\Big)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n+1-2}{n+1}\Big)\Big(1-\frac{n+1-1}{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

ここで a_{n+1} の項の数は n+2 項であり, a_n の n+1 項より 1 つ多いことに注意せよ. さて, この展開の先頭から 1 項づつ大小を比較していくと, 最初の 2 項 $1+1$ を除けば, 続く $(n-1)$ 項はすべて a_{n+1} の方が大きく, しかも a_{n+1} は最後に正の項を余計に持つてゐるから, $n>1$ のとき,

$$a_n<a_{n+1}$$

であることがわかる.

最後に (3) であるが, 上記 (2.23) において $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\cdots$, $\left(1-\frac{n-1}{n}\right)>1$ だから

$$a_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

しかるに $n! = n(n{-}1)(n{-}1)\cdots 3{\cdot}2 > 2^{n-1}$ であるから,

$$\begin{aligned} a_n &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \end{aligned}$$

となり, 2.19 と 2.12 によつて, 主張が得られる. □

$a > 1$ を定数とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

であることを示せ.

解答 $a = 1 + h$ とおくと $h > 0$ であり, $n > 1$ のとき,

$$a^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

であるから,

$$\frac{n}{a^n} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2} \longrightarrow 0$$

である. □

演 習 問 題

2.24 次の漸化式 で定まる数列 $\{a_n\}$ について, 一般項 a_n と極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{3}\,a_n + 1.$

(2) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+2} = \frac{2}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n.$

2.25 次の数列について, 単調増加, 単調減少, どちらでもない, のいずれであるか, 理由を付けて答えよ.

(1) $\{(-3)^n\}$

(2) $\{2n-3\}$

(3) $\{1-\frac{1}{n}\}$

(4) $\{n^2-3n\}$

2.26 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n}{n^2+2n+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\,)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^n-3\cdot 2^n}{5^{n+1}+2^n}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2+1)}{n+1}$

2.27 次の集合 A の上限と下限を求めよ.

(1) $A = \{\, x^2-3x+1 \mid x \in \mathbb{R} \,\}.$

(2) $A = \{\, n^2-3n+1 \mid n \in \mathbb{Z} \,\}.$

(3) $A = \left\{ 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$

§ 3. 函数

3.1. 函数と逆函数, 合成函数, 函数の graph, 漸近線

定義 3.1 実数のある部分集合 I （区間など）から実数への写像を函数と呼ぶ．一般的には f, g などの記号で表し, $x \mapsto f(x)$ などと表記する．この場合 I を定義域と呼び,

$$f(I) = \{\, f(x) \mid x \in I \,\}$$

を f の値域といふ．ここで, 各 $x \in I$ に対して, 唯一つの値 $f(x)$ が定まることに注意して欲しい．定義域を I とする函数 $y = f(x)$ について, 座標平面上の集合

$$\{\, (x,\, f(x)) \mid x \in I \,\}$$

をこの函数の graph と呼ぶ．

定義 3.2 区間 I で定義された函数 $f(x)$ は, 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して $f(x_1) \leqq f(x_2)$ (或いは $f(x_1) < f(x_2)$） を満たすとき, 単調増加（或いは 狭義単調増加）であるといはれる．同様に, 任意の $x_1, x_2 \in I$ に対して $f(x_1) \geqq f(x_2)$（或いは $f(x_1) > f(x_2)$）を満たすとき, 単調減少（或いは 狭義単調減少）であるといはれる．これらの函数を総じて単調な函数と呼ぶ．

定義 3.3 2 つの函数 f, g があり, f の値域が g の定義域に含まれるとき, $x \mapsto g(f(x))$ によつて函数が定まる．これを f と g の合成函数と呼び, $g \circ f$ で表す．

例 3.4 $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$ のとき, f と g の合成函数も, g と f の合成函数も存在し,

$$(f \circ g)(x) = f\,(g(x)) = (x+1)^2, \quad (g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = x^2 + 1$$

である．

> **定義 3.5** 函数 $y = f(x)$ について, これの値域の各 y に対応する x が 1 つだけのとき, 写像 $y \mapsto x$ を函数とみたものを $f(x)$ の逆函数と呼んで, $x = f^{-1}(y)$ と書く．このとき $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成り立つ．

$y = f(x)$ の graph とこれの逆函数 $y = f^{-1}(x)$ の graph は, 直線 $y = x$ に関して対称である．

定義 3.6 区間 $(c, +\infty)$ で定義された函数 $y = f(x)$ と 1 次函数 $y = ax + b$ について,

$$\lim_{x \to \infty} \bigl(f(x) - (ax+b)\bigr) = 0$$

となるとき, $y = ax + b$（の graph）をこの函数（の graph）の漸近線と呼ぶ．
区間 $(-\infty, c)$ で定義された函数についても同様である．

さらに, 函数 $y=f(x)$ が開区間 I で定義されてゐて, $c \in I$ について,

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = +\infty \text{（あるいは } -\infty \text{）}$$

$$\text{または} \quad \lim_{x \to c-0} f(x) = +\infty \text{（あるいは } -\infty \text{）}$$

であるとき, 直線 $x=c$ は函数 $y=f(x)$ の <u>漸近線</u> であるといはれる.

3.2.　1 次分数函数

定義 3.7 実数 a, b, c, d を定数とし, $c \neq 0$ とする. このとき, 函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

を 1 次分数函数 と呼ぶ. 定義域は $-\frac{d}{c}$ を除くすべての実数である.

例題 3.8 次の函数の graph と逆函数の graph を描け.

$$y = \frac{2x-3}{x-1}. \tag{3.9}$$

解答 まず $(2x-3) \div (x-1)$ を計算することにより,

$$y = 2 - \frac{1}{x-1}. \tag{3.10}$$

これは $x = 1$ と $y = 2$ を漸近線とする双曲線で, $x = 0$ のとき $y = 3$ で, $y = 0$ のとき $x = \dfrac{3}{2}$ だから, 右図の青い graph になる. つぎに逆函数を求めるために, x を y で表す:

$$\frac{1}{x-1} = -y+2$$

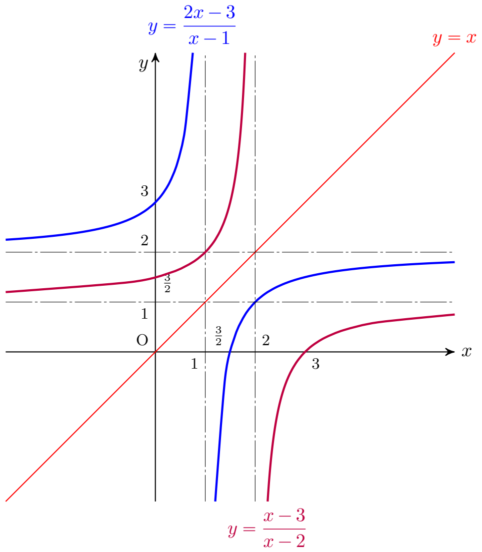
から

$$x - 1 = \frac{-1}{y-2},$$
$$x = \frac{y-3}{y-2}.$$

x と y を入れ換えて

$$y = \frac{x-3}{x-2}.$$

逆函数の graph を, それが元の函数の graph と直線 $y = x$ に関して対称になることも考慮に入れて描けば, 紅色の graph になる.



3.3. 函数の graph の描き方

函数の graph は computer 上で簡単に描けるが, 手計算だけで描けることも理論面で重要となる. そのためには, 様々なことについての理解が要求されるが, ここでは簡単にまとめておく.

Graph を描くときの注意

(1) x 軸, y 軸とその名前 x, y を記入. (下記の (3)〜(4) の位置に鑑みて位置を決める必要がある.)

(2) 原点 O を記入.

(3) 漸近線など（骨格となる部分）を（graph より先に）描く.

(4) graph が x 軸や y 軸を交はる点の座標を記入.

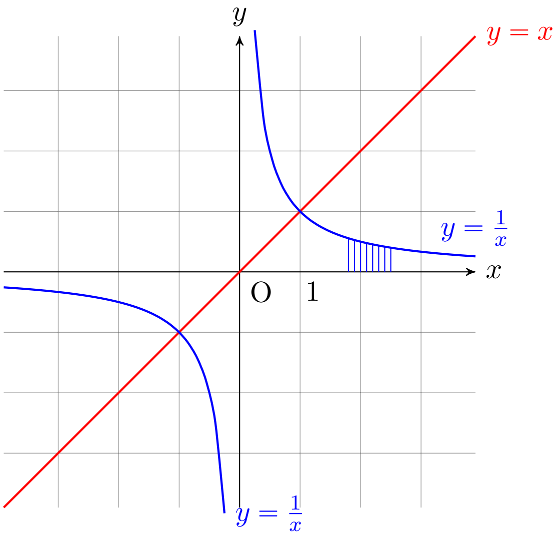
(5) 極値（後の授業で述べる）を取る点の座標を記入.

(6) 対称性などにも注意して描く.

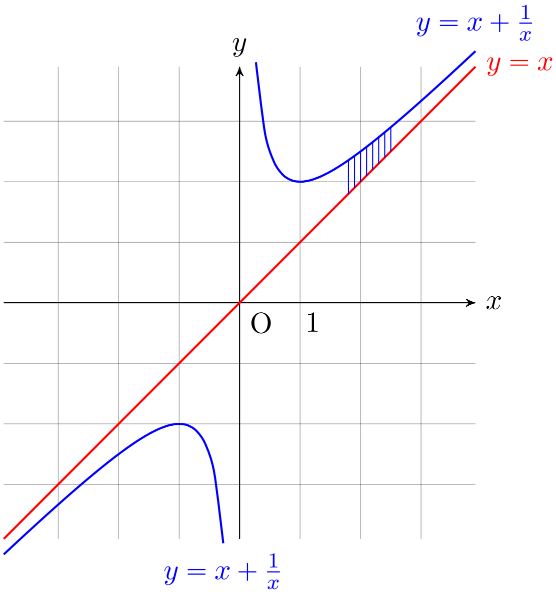
例題 3.11 ここでは, 函数

$$y = x + \frac{1}{x}$$

を例にとつて, graph の描き方を説明する. まづ, 高校で「数学 3」を学んだ人は, 増減表を作って, 描くことができる[6]. しかし, 以下の方法でもかなり正確に graph の形を捉へることができる. 即ち, $y = x$ の graph を描いておく. それに $y = \frac{1}{x}$ の graph を“上乗せする”.

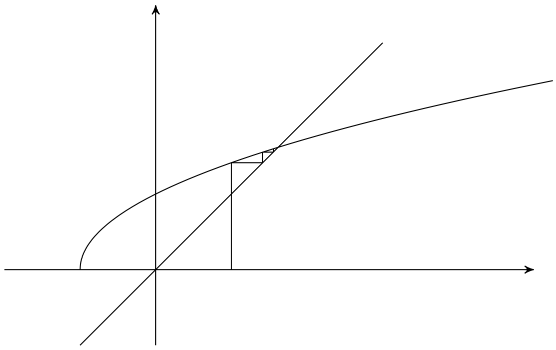


[6] これは, 本講義の先の方でも更めて学ぶ.


$y = x + \frac{1}{x}$
$y = x$
y
x
O
1
$y = x + \frac{1}{x}$

例題 3.12　Graph を応用して数列の極限を求めることができる.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1} \quad (n \geqq 1)$$



演 習 問 題

3.13 次の $f(x)$, $g(x)$ について, 合成函数 $(f\circ g)(x)$ と $(g\circ f)(x)$ を求めよ.

(1) $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=x^2+1$

(2) $g(x)=\cos x$, $f(x)=3x$

3.14 次の函数について答えよ.

$$y=\frac{2x-5}{x-3}.$$

(1) 元の函数の 2 つの漸近線の方程式を記せ.

(2) 元の函数の graph の x 軸および y 軸との交点の座標を記せ.

(3) 逆函数の方程式を求めよ.

(4) 逆函数の graph の x 軸および y 軸との交点の座標を記せ.

(5) 逆函数の 2 つの漸近線の方程式を記せ.

(6) 元の函数と逆函数の graph を同一の座標平面に描け.

3.15 次の函数の graph を描け.

(1) $y=\sqrt{2x+1}$

(2) $y=x-\dfrac{1}{x}$

(3) $y=\dfrac{x}{|x|}$

(4) $y=\dfrac{|x+1|}{|x-1|}$

(5) $y=|x|+x$

§4. 初等函数

4.1. 三角函数

三角函数については, 高校で学んでゐるので, ここでは詳しくは述べないで[7], 簡単なまとめをしておく.

> **定義 4.1** （三角函数）xy 座標平面で, 単位円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ について, $\mathrm{A}(1,0)$ から (x,y) までの弧に沿つた長さ $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ を θ とするとき（何周してゐても良い）, x, y は θ の函数であるが, それを
>
> $$x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta$$
>
> と定め, それぞれ余弦函数, 正弦函数と称する.
>
> 函数 $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\tan\theta$ の正の最小の周期は 2π, 2π, π
>
> である. この θ が, $\angle\mathrm{AOP}$ の弧度法による角の大きさに他ならない. これは radian と呼ばれる単位（rad. と記す）で表記されることがある. 一般に使用される角度（単位は度 $^\circ$）とは $180^\circ=\pi$ (rad.) で換算される.

基本的な値は理解してゐることを前提とする.

（$x=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ や, これらの整数倍の値における $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ の値. 存在しない場合も）

覚えるよりも, その都度, 求められる方が望ましい.

これらの函数の graph が正しく描けなくてはならない.

（実際に描けることを確かめておきなさい）.

積和の公式[8] を思ひ出しておく：

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big),\\
\cos\alpha\,\sin\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\big),\\
\sin\alpha\,\sin\beta &= -\tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big),\\
\cos\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\big).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

[7] 三角函数を厳密に定義するためには, 曲線の長さを定義し, それに基き角度の概念を得て, その上に三角函数が定義される.

[8] この名称は通称か. しかし, 簡明なよい名称である.

和積の公式[9] も思ひ出しておく：

$$
\begin{aligned}
\sin A + \sin B &= \ \ 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\\
\sin A - \sin B &= \ \ 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right),\\
\cos A + \cos B &= \ \ 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right),\\
\cos A - \cos B &= -2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

4.2. 逆三角函数

定義 4.4 （逆三角函数）

(1) 函数 $\sin x$ は, 区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ を定義域とすれば単調増加であるから, 逆函数が存在する. それを 逆正弦函数 と呼んで,

$$\sin^{-1}(x) \quad \text{または} \quad \arcsin(x)$$

と書く. これの定義域は $[-1, 1]$ である. 同様に,

(2) 区間 $[0, \pi]$ を定義域としたときは, 函数 $\cos x$ は単調増加であり, これの逆函数が存在する. それを

$$\cos^{-1}(x) \quad \text{または} \quad \arccos(x)$$

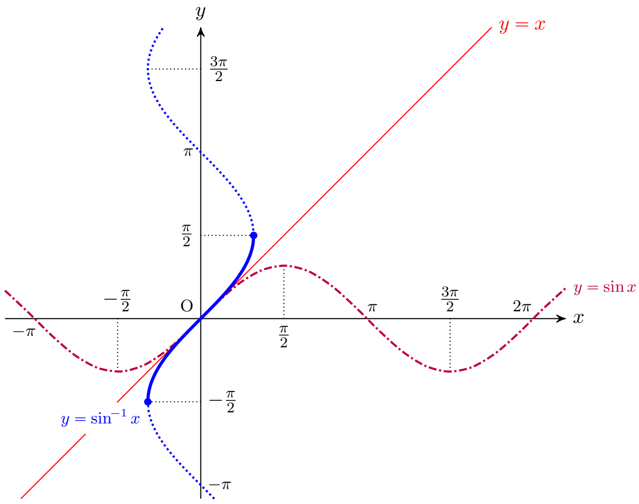
と書く. **逆余弦函数**. 定義域は $[-1, 1]$ である.

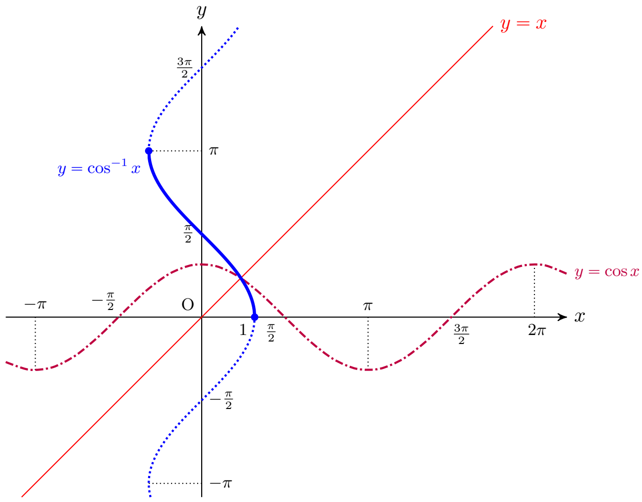
(3) 区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ を定義域としたとき, 函数 $\tan x$ は単調増加であり, これの逆函数が存在する. それを

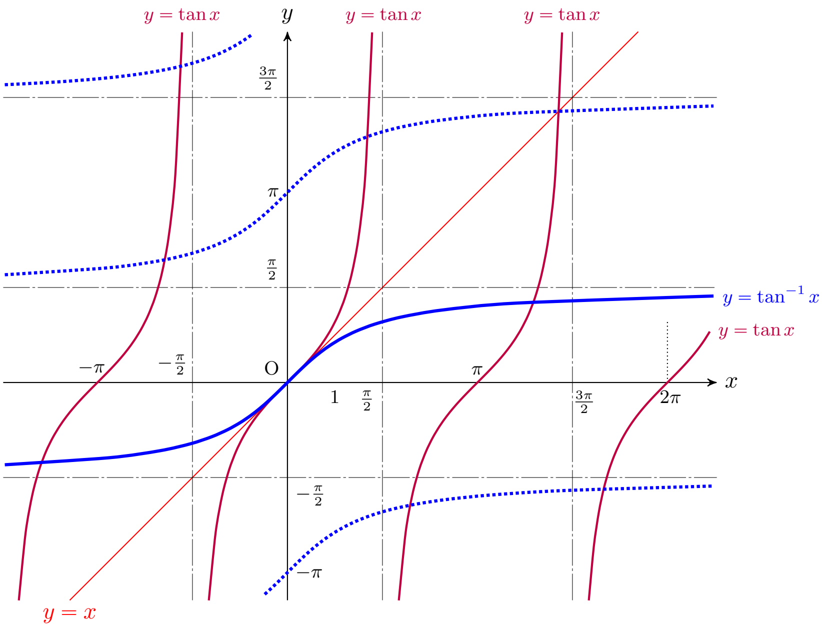
$$\tan^{-1}(x) \quad \text{または} \quad \arctan(x)$$

と書いて, 逆正接函数と称する. 定義域は $(-\infty, \infty)$ である.

[9] この名称も通称. やはり, 簡明なよい名称である.


y
$y = x$
$\frac{3\pi}{2}$
π
$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
$-\pi$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$y = \sin^{-1} x$
$-\pi$


y
$y = x$
$\frac{3\pi}{2}$
π
$y = \cos^{-1} x$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \cos x$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
O
π
x
1
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$-\frac{\pi}{2}$
$-\pi$



演 習 問 題

4.5 次の値を求めよ.

(1) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$

(2) $\cos^{-1} \frac{1}{2}$

(3) $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

(5) $\cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4.3. 指数函数

x が有理数のとき $x=\frac{m}{n}$ $(m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N})$ と書けば, $a^x=a^{\frac{m}{n}}$ は, $a^m=b^n$ を満たす正の数 b として自然に定義される.

問 4.6 有理数の組 $r_1<r_2$ について次を示せ.

(1) $0<a<1$ ならば $a^{r_1}>a^{r_2}$.

(2) $a>1$ ならば $a^{r_1}<a^{r_2}$.

定義と命題 4.7 1 でない実数 $a>0$ と任意の実数 x に対し, a の冪乗

$$a^x \qquad (a \text{ を底とする 指数函数})$$

が自然に定義される. この函数は $a>1$ ならば単調増加であり, $0<a<1$ ならば単調減少である.

証明 一般の $x\in\mathbb{R}$ については, x に収束する数列 $\{x_n\}$ $(x_n\in\mathbb{Q})$ を選んで,

$$a^x=\lim_{n\to\infty}a^{x_n} \tag{4.8}$$

と定める. ここで, $\mathbb{Q}\ni x\mapsto a^x$ の単調性, 即ち, 4.6 より, これの極限値は存在し, しかも, その極限値は数列 $\{x_n\}$ の選び方に依らないこともわかる[10].

再び 4.6 と 2.12 より, 実数の組 $x_1<x_2$ についても $a^{x_1}<a^{x_2}$ であることが示される. $0<a<1$ についても同様. □

命題 4.9 任意の正の数 a, b と実数 x, y について

$$a^xb^x=(ab)^x,$$
$$a^xa^y=a^{x+y},$$
$$(a^x)^y=a^{xy}$$

が成り立つ. これらをまとめて 指数法則 と呼ぶ.

証明 x, y が有理数のときは, 定義に戻れば容易に示される. (問とする) 一般には, 実数 x, y に対し, 第 2 の等式 $a^xa^y=a^{x+y}$ を示さう. これらに収束する有理数からなる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ をとれば,

$$a^{x_n}a^{y_n}=a^{x_n+y_n}$$

[10] この辺りの詳細については [5], 第 2 章, §12 を参照されたい.

が成り立つ．よつて 2.11 と 4.9 を交互に使つて

$$
\begin{aligned}
a^x a^y &= \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{y_n} \quad (\because 4.8)\\
&= \lim_{n\to\infty} a^{x_n} a^{y_n}\\
&= \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n}\\
&= \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n}\\
&= a^{\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)} \quad (\because 4.8)\\
&= a^{x+y}
\end{aligned}
$$

と示される．その他の等式も同様に示される（各自試されたい）． □

4.4.　対数函数

指数函数 $y = a^x$ は逆函数を持つが, 既知の函数だけでは x を y で表すことができない．そのため, 新たな記法を用意することが必要となる．

定義と命題 4.10　a を 1 でない正の定数とする．指数函数 $y = a^x$ の逆函数を

$$\boldsymbol{x = \log_a y} \quad (y > 0)$$

と記し, a を底とする 対数函数 と呼ぶ．この函数は $a > 1$ ならば単調増加であり, $0 < a < 1$ ならば単調減少である．

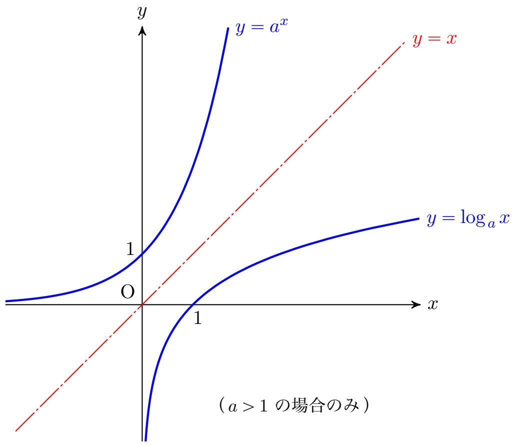
証明　証明すべきは, 単調性であるが, これは, 指数函数の単調性からすぐにわかる． □

逆函数の定義から

(4.11)　$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x \quad (\text{逆函数との合成函数}).$$

さらに, $c^{\log_c b} = b = a^{\log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = c^{(\log_c a)(\log_a b)}$ より, 次の等式が成り立つ:

(4.12)　$$\log_c b = (\log_c a)(\log_a b), \quad (\log_a b) = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{底の変換公式}).$$



4.5. 初等函数の分類

定義 4.13 （再掲）以下の様に函数を分類する.

(1) 2 つの多項式の商として表される函数を <u>有理函数</u> と呼ぶ.

(2) 有理函数, 冪乗根, 指数函数, 対数函数, 三角函数, 逆三角函数の有限回の和差積商および合成によつて表される函数を, <u>初等函数</u> と呼ぶ.

(3) 初等函数ではあるが, 有理函数, 冪乗根の有限回の和差積商および合成によつては表し得ない函数を, <u>初等超越函数</u> と呼ぶ.

微分積分学は, これらの函数を扱ふ理論であるともいへる.

演 習 問 題

4.14 次の各問について (a), (b), (c) について答えよ.

(a) graph を書け.

(b) 最小の周期を求めよ.

(c) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲での x 軸とのすべての交点について, その x 座標を求めよ.

(1) $y = \sin(-2x)$

(2) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) $y = \sin x + \cos x$ （Hint : 三角函数の “ 合成 ” の方法を利用.）

第 2 章　1 変数函数の微分法

§ 5.　函数の極限

5.1.　函数の極限

定義 5.1　以下の様に函数の極限について定義する：
(1)　開区間 I で定義された函数 $f(x)$ と I の点 a について, x が a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to a)$$

と書き, $f(x)$ の a における <u>極限</u> は ℓ であるといふ.
(2)　開区間 $I = (c, +\infty)$ で定義された函数 $f(x)$ について, x が限りなく増大するとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to \infty)$$

と書き, $f(x)$ の $x \to +\infty$ における <u>極限</u> は ℓ であるといふ.
(3)　その他,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to -\infty) \ \ \text{や}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow +\infty \ \ (x \to \infty)$$

などもあるが, 詳しく述べる必要はないであらう, $x \to -\infty$ の場合や, 片側極限は???

注意 5.2　上の (1) を正確に述べると以下の様になる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在し,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

が成り立つとき, $f(x)$ の a における極限は ℓ であるといはれる.
(2) を正確に述べると以下の様になる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $M > 0$ が存在し,

$$x > M \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

が成り立つとき, $f(x)$ の a における極限は ℓ であるといはれる.

定義 5.3 以下の様な極限の概念もある．これらをまとめて片側極限と称する．
(1) 区間 I で定義された函数 $f(x)$ と I の点 a について, x が a より大きな値を取りながら a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくとき,

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to a+0)$$

と書いて, $f(x)$ の a における右極限は ℓ であるといふ．
(2) 区間 I で定義された函数 $f(x)$ と I の点 a について, x が a より小さな値を取りながら a に限りなく近づくとき, $f(x)$ が ℓ に限りなく近づくならば,

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \ell \quad \text{または} \quad f(x) \longrightarrow \ell \ \ (x \to a-0)$$

と書き, $f(x)$ の a における左極限は ℓ であるといふ．（図を入れる）
(3) ∞ や $-\infty$ に発散する場合も同様な記法を用いる．

命題 5.4 $\lim_{x\to a} f(x)$ の極限値が存在して ℓ であるためには, 右極限値と左極限値がともに存在し, かつ, ともに ℓ であることが必要十分である．即ち, 次の関係が成り立つ：

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \ell.$$

命題 5.5 函数の極限と四則演算の可換性

5.2. 函数の連続性

定義 5.6 a を含む区間 I で定義された函数 $f(x)$ について,
(1) a が I の境界点ではない場合, a における極限値と a での値が一致するとき, 即ち

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

が成立するならば, $f(x)$ は a において連続であるといふ．
a が I の左側［右側］の境界点の場合, a における右極限値［左極限値］と a での値が一致するとき, 即ち

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \left[\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) \right]$$

が成立するならば, $f(x)$ は a において連続であるといふ．
(2) 任意の $a \in I$ において, $f(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ は I で連続であるといはれる．
（図を入れる）

補題 5.7★ a を含む区間 I で定義された函数 $f(x)$ が $x=a$ で連続で, $f(a)=\ell$ であるためには, a に収束する任意の数列 $\{a_n\}\subset I$ について,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\ell$$

であることが必要十分である.

証明 省略してよいか… □

命題 5.8 連続函数について以下のことが成り立つ：

(1) 閉区間を定義域とする連続函数は最大値, 最小値を有する（定理 1.7）.

(2) 2 つの連続函数を合成函数は連続（定理 1.8）.

証明 最大値が存在することを示すため, $M=\sup\{\,f(x)\,|\,x\in I\,\}$ とおく.
(i) $M=\infty$ のとき, I の値（a とする）に収束する数列 $\{a_n\}\subset I$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=+\infty$$

となる. これは $f(x)$ が a で連続であることに反する.
(ii) $M\in\mathbb{R}$ のとき, I の値（a とする）に収束する数列 $\{a_n\}\subset I$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=M$$

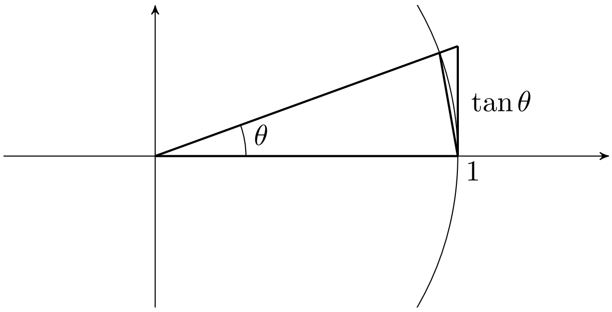
となる. $f(x)$ が a で連続であるから $f(a)=M$ である. よつて M が最大値である.
最小値についても全く同様に示される. □

5.3. 三角函数に関する基本の極限公式

補題 5.9 以下が成り立つ：

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1.$$

証明 下図において



$$\begin{aligned}
&\triangle\mathrm{OAB}\ldots\\
&\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}1^2\theta < \frac{1}{2}\tan\theta,\\
&1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}.
\end{aligned}$$

この不等式は θ が負のときも成り立つことが同様にして示される．ゆゑに

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

がわかり，与式が成り立つ．□

命題 5.10　指数函数 a^x, 対数函数 $\log_a x$, 三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ はすべて連続函数である．

証明　□

5.4.　函数の極限としての Napier の数

数 e は函数の極限としても表される

補題 5.11　次が成り立つ：

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z\to-\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

証明　第 1 の等式. 各 $x>1$ について，自然数 n を $n \leqq x < n+1$ で定める．このとき

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{n}.$$

この式から，

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \leqq 1+\frac{1}{n}\\
\therefore\ &\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^x.
\end{aligned}$$

これの左辺と右辺から延長して,

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \leqq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^x,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

であるから,

$$\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$x\to\infty$ のとき, n についても $n\to\infty$ なので, この両辺はいづれも e に収束する (左辺の極限は $\frac{e}{1}=e$, 右辺の極限は $e{\cdot}1=e$). よつて, 目的の $(1+\frac{1}{x})^x$ も e に収束する.

<u>第 2 の等式.</u> $x=-z$ とおくと, $z\to-\infty$ ゆゑ, $x-1\to\infty$ である. このとき,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z &= \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x \\ &= \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x = \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \longrightarrow e{\cdot}1 = e\end{aligned}$$

となり, 第 2 の等式も示された.

<u>第 3 の等式.</u> 第 1, 第 2 の等式で $t=\frac{1}{x}$ あるいは $t=\frac{1}{z}$ とおくと,

$$\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \quad \lim_{t\to-0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

がわかる. ここで 5.4 を使へば,

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

を得る. □

演 習 問 題

5.12 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}{\cdot}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+2t)^t$.

§6.　微分係数と導函数

6.1.　微分係数と接線

定義 6.1　開区間 I で定義された函数 $f(x)$ と $a \in I$ について, 極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \left(= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

が存在するとき, これを $f'(a)$ と書いて, $x=a$ のおける $f(x)$ の微分係数と称する. 即ち,

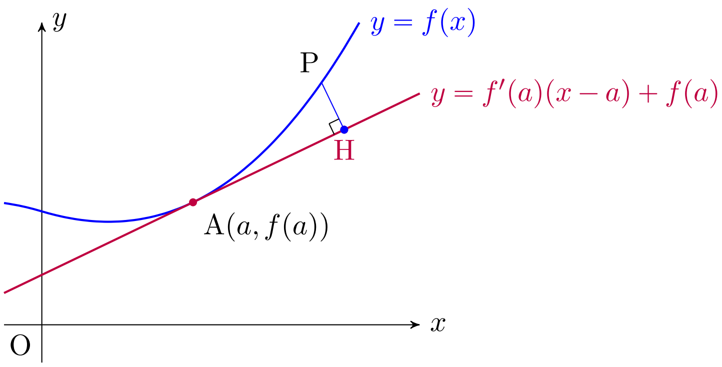
$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

定義 6.2　([2] の定義)　開区間 I で定義された函数 $y=f(x)$ の graph C 上の点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ と, A を通る直線 ℓ について,

$$\lim_{\mathrm{AP}\to 0}\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PA}} = 0 \tag{6.3}$$

が成り立つとき, ℓ を C の, 点 A における接線と称する. ここに, 点 P は ℓ 上の動点で, 点 H は A から ℓ に下した垂線の足である.

注意 6.4　(1)　6.2 の定義は以下の様に理解するとよい. 点 P は基点 A に近いとする. ℓ 上に P を“近似”する点 H をとる. P から近似点 H までの距離が, P から A までの距離と比較して, 圧倒的に非常に小さい, といふのが, (6.3) の意味するところである. つまり, P が A に近づく速さで A を中心に図を拡大していくと, あたかも P が H に擦り寄つていく様に見える.



(2)　そもそも, ほとんどの人が最初に接線といふ言葉を知るのは「円の接線」としてである. そのときは「共有点が唯一つ」といふ特徴で理解する. 一方, 「一般の曲線の接線」は, 高校で微積分を学ぶときに, 初めて登場するが, その際, 円の接線といふ概念との整合性は説明されない[1]. 念のため説明しておく. 円（半径 r とする）とその

[1] 高校の教科書を御覧いただきたい. 事実, 高校生だつた頃の筆者にはこれがとても不満であつた.

上にある点 A が与へられたとき, 適当に座標をとると, A の座標は $(0, r)$ で, A の付近での円の方程式は $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ と書けるから, 上の定義をあてはめれば（遅くても第 8 節を終はつたときには), 通常の意味の接線 $y = r$ が 6.2 の意味の接線だと確認できる.

命題 6.5　6.1 の状況において, 直線

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a)$$

は, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ を通る直線である. これを, 曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における接線と称する（図 6.1 参照).

証明　$\mathrm{P}(x, f(x))$ とし, 求める接線の方程式を $mx + ny = d$ とするとき

$$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PA}} = \frac{\dfrac{|\,mx + nf(x) - d\,|}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}} \qquad \text{（高校で学んだ公式利用）}$$

$$= \frac{\dfrac{|\,(mx + nf(x) - d) - (ma + nf(a) - d)\,|}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{|\,(m(x-a) + n(f(x) - f(a))\,|}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\sqrt{(x-a)^2 + (f(x) - f(a))^2}}$$

$$= \frac{\dfrac{\left| m + n \cdot \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right|}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)^2}}$$

$$\longrightarrow \frac{\dfrac{|\,m + n\,f'(a)\,|}{\sqrt{m^2 + n^2}}}{\sqrt{1 + f'(a)^2}} \qquad (\,|\,x - a\,| \longrightarrow 0\,).$$

よつて

$$m + n\,f'(a) = 0. \qquad \therefore\ -\frac{m}{n} = f'(a)$$

となり, 主張が示された.

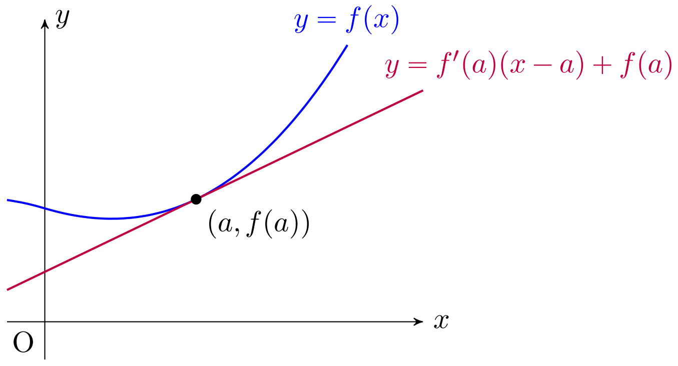


図 6.5　Graph 上の 1 点における接線

□

命題 6.6　微分係数と四則演算の可換性

6.2.　微分係数から導函数へ

次に, 6.1 における a を変化させて, 次の定義をする.

定義 6.7　開区間 I で定義された函数 $f(x)$ と任意の $a \in I$ について, 極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき（このとき $f(x)$ は I で微分可能と称する), I 上の函数 $x \longmapsto f'(x)$ が得られる. これを $f(x)$ の導函数と称して $f'(x)$ で表す. このことを,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

と表す. ここで Δx は伝統的な計算用の記法である.

例 6.8　定数函数 $f(x) = c$ については

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

である.

命題 6.9 開区間 I で微分可能な 2 つの函数 $u = f(x)$ と $v = g(x)$ について, 次の等式が成り立つ：

(1) $(u+v)' = u' + v'$.

(2) 定数 c について, $(cu)' = cu'$.

(3) (積の微分公式) $\bigl(f(x)g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
($(uv)' = u'v + uv'$);

(4) (商の微分公式) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
$\left(\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \right)$,
(但し $g(x) \neq 0$ である x について).

証明 (1) の証明:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x+\Delta x) + f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x}\\
&= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,g(x+\Delta x) + f(x)\,\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\\
&\longrightarrow f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \quad (\Delta x \longrightarrow 0).
\end{aligned}$$

(2) の証明. まづ, $g(x) \neq 0$ であれば, その様な x の付近において, 函数 $g(x)$ は 0 にはならないことに注意せよ.

$$\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}\\
&= \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x)\,g(x)}\\
&= \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x)\,g(x)}\\
&= \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,g(x) - f(x)\,\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)\,g(x)}\\
&\longrightarrow \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2} \quad (\Delta x \longrightarrow 0)
\end{aligned}$$

となり証明された. □

例題 6.10 6.8 と 6.9(4) から

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f(x)^2} \qquad \left(\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2} \right).$$

命題 6.11 n が 0 または自然数のとき,

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}.$$

証明 (方法 1) n に関する帰納法. 問 とする.
(方法 2) $(x+\Delta x)^n$ の展開を利用.
(方法 3) $X^n - Y^n$ の因数分解 (等比級数の和の公式) を利用 □

積と商の微分の公式の証明は text p.27 や高校「数学 3」の教科書を見て確認しておいて欲しい.

例題 6.12 函数 $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x+3}$ について答えよ.
(1) 導函数 $f'(x)$ を求めよ.
(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(0, -\frac{1}{3})$ における, この曲線の接線を求めよ.

解答 (1) 主に商の微分を使って

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+x+3)-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{-x^2+2x+4}{(x^2+x+3)^2} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}$$

(2) $f'(0) = \frac{4}{9}$ だから, 求める接線は

$$y + \tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{9}(x-0). \quad \therefore\ y = \tfrac{4}{9}x - \tfrac{1}{3} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}$$

□

演 習 問 題

6.13 6.11 を 6.9 (1) を使つて n に関する数学的帰納法で証明せよ.

6.14 次の曲線の点 A における接線の方程式を求めよ.

(1) $y = 3x + 1,$　A$(1, 4)$

(2) $y = x^2 + 3x,$　A$(-2, -2)$

(3) $y = x^3 - x + 2,$　A$(1, 2)$

(4) $y = \dfrac{4x}{x+1},$　A$(1, 2)$

(5) $y = 1 + \sqrt{x},$　A$(4, 3)$

6.15 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $3x + 2$

(2) $x^2 + 3x + 7$

(3) $(x^2 + x + 4)(x^2 - x + 1)$

(4) $1 + 2x^{-1} + x^{-2}$

(5) $\dfrac{2x - 1}{x + 1}$

(6) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

(7) $\dfrac{x^2 + 3}{x^3 + x^2 + 2}$

(8) $\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}}$

(9) $\dfrac{\sqrt{x}}{x + 2}$

§ 7.　平均値の定理と l'Hôspital の定理

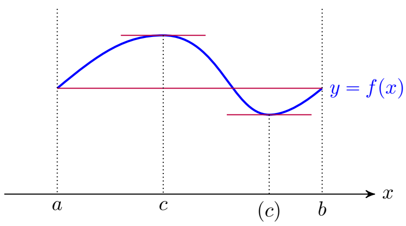
平均値の定理を理解し, 函数の増減を捉へる. その応用として証明される L'Hôspital の定理を使つて不定形の極限値を求める.

7.1.　平均値の定理

定理 7.1　(Rolle の定理) 函数 $y = f(x)$ は, 区間 $[a,\ b]$ で連続で, 区間 $(a,\ b)$ 内の各点で微分可能であるとする. さらに $f(a) = f(b)$ と仮定する. このとき

$$f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

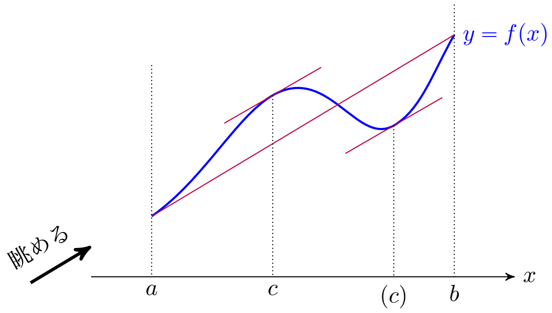
なる数 c が少なくとも一つ存在する.



定理 7.2　(平均値の定理) 函数 $y = f(x)$ は, 区間 $[a,\ b]$ で連続で, 区間 $(a,\ b)$ 内の各点で微分可能であるとする. このとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a < c < b$$

なる数 c が少なくとも一つ存在する.



【説明】 直観的に図の太い矢印の方向から「眺める」様にすれば, Rolle の定理に帰着する.

平均値の定理も, 極めて直観的な内容であるので, 難しくはない[2] 通常, この定理は, ほぼ自明とも思われる Rolle の定理に帰着される.

---

[2] 平均値の定理が必要なのは, 7.8 に述べた微分係数と増減の関係の証明にであるが, それも直観的には明らかなものである. 簡単すぎる平均値の定理を真面目に証明をする大きな理由は, この証明が **Taylor の定理**と呼ばれる非常に重要な（微分積分学の中でも最高の定理の 1 つ）定理の証明に発展するからであると思はれる.

例題 7.3 全区間 $(-\infty, \infty)$ で連続な函数 $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2+1}$ について,

(1) $f(-3) = f(1) = \frac{1}{2}$ である. Rolle の定理より $f'(c) = 0$ かつ $-3 < c < 1$ となる c が存在する. この c を 1 つ求めよ;

(2) また, 区間 $[0, 2]$ に関して, 平均値の定理が存在を主張する c を求めよ.

解答 (1) $f'(x) = \dfrac{x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}$ で $f'(c) = 0$ となるのは $c^2-4c-1 = 0$ のとき. つまり $c = 2 \pm \sqrt{5}$ のときであるが, $-3 < c < 1$ なので $c = 2-\sqrt{5}$ $\cdots\cdots$ Ans.

(2) 平均変化率は $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = -1$ である. よつて, 方程式 $\frac{c^2-4c-1}{(c^2+1)^2} = -1$, 即ち $c^4 + 3c^2 - 4c = 0$ を解くと, $c = 0, 1$ が得られる. $0 < c < 2$ だから, $c = 1$ $\cdots\cdots$ Ans. □

平均値の定理の証明 当面は, この証明を読まないでも, 前 page の直観的理解で納得できるならば, それでよいであらう. しかし一応, 証明を述べておく. いま

$$A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

とおくと,

$$0 = f(b) - \{f(a) + A(b-a)\} \tag{7.4}$$

である. 今 (この式の a を変数 x に置き換へて), 新たな函数 (これが key point!)

$$\boldsymbol{F(x) = f(b) - \{f(x) + A(b-x)\}}$$

を考へる. これは, 函数 $y = f(x)$ と $y = A(x-b) + f(b)$ の差を測つてゐて, これが前 page で左下から「眺める」ことになる. この函数 $F(x)$ は

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0$$

を満たす. 前者は (7.4) からわかる. 後者は明らかである. $f(x)$ が微分可能であるから $F(x)$ も微分可能である. 実際

$$\begin{aligned} F'(x) &= 0 - \{f'(x) + A(-1)\} \\ &= A - f'(x) \end{aligned} \tag{7.5}$$

となる. 以上から $F(x)$ に Rolle の定理を使ふことができて

$$F'(c) = 0, \quad a < c < b$$

となる c が存在する. このとき (7.5) から

$$A - f'(c) = 0, \quad a < c < b$$

つまり

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad a < c < b.$$

なる c が得られてゐる.

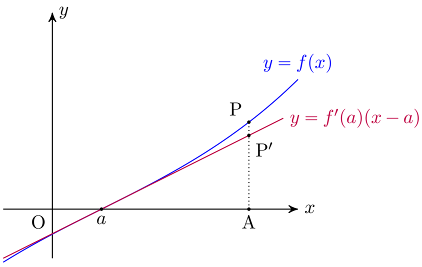
7.2. L’Hôspital の定理

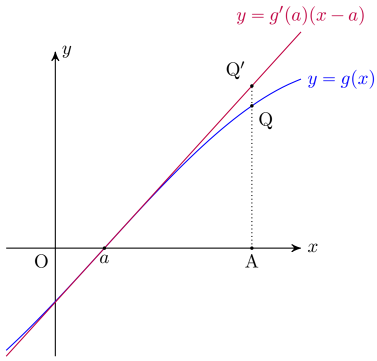
定理 7.6 （**L’Hôspital**（ロピタル）**の定理**[3]） $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ のとき

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成り立つ.

直観的な説明 : $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ}} \fallingdotseq \dfrac{\mathrm{AP}'}{\mathrm{AQ}'}$.





証明

□

例題 7.7 簡単な例を一つ, l’Hôspital の定理を用いて計算してみる.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-2x-3)'}{(x^2-x-6)'} = \lim_{x\to 3} \frac{2x-2}{2x-1} = \frac{4}{5}$$

これは, 分母分子を因数分解すれば, 次の様にして求められる :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x+2} = \frac{4}{5}.$$

しかし, 実際に l’Hôsptial の定理が有効なのは, より高度な函数の極限計算においてである.

[3] 英語では l’Hôspital’s rule なので, 直訳すると l’Hôspital の規則である.

7.3. 微分係数と増減

定理 7.8 (微分係数と増減) 函数 $y = f(x)$ と閉区間 I について, 次が成り立つ:
(1) 区間 I の至るところ $f'(x) \geqq 0$ であれば, $f(x)$ は I で単調増加である.
(2) 区間 I の至るところ $f'(x) \leqq 0$ であれば, $f(x)$ は I で単調減少である.
(3) 区間 I の至るところ $f'(x) = 0$ であれば, $f(x)$ は I で定数函数である.

証明 これも直観的には明かに思はれる内容であるが, 理論的には, 以下の様に 平均値の定理 を使つて示される.
(1) $I = [a, b]$ として, $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ なる任意の x_1 と x_2 をとれ. このとき, 区間 $[x_1, x_2]$ に関して平均値の定理を使ふと

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad x_1 < c < x_2$$

なる c が存在する. しかし, 仮定より $f'(c) \geqq 0$ であるから

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqq 0$$

であり, それゆゑ

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq 0 \quad (\because\ x_2 - x_1 > 0).$$

結局

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqq f(x_2)$$

であることがわかつた. これは $f(x)$ が単調増加であることの主張に他ならない.
(2) は (1) と同様である.
(3) も同様にすれば, 常に $f(x_1) = f(x_2)$ であることがわかる. これは $f(x)$ が定数であることに他ならない. □

注意 7.9 (2020.6.4 に記す) L'Hôspital の定理には次の様な形のものもある.
函数 $f(x)$, $g(x)$ は $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ のとき,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

あるいは $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ のとき,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

等々. 証明については, 例へば [1], p.??? を見られたい.

演 習 問 題

7.10 以下の函数 $f(x)$ と区間 I, J について, (a), (b), (c) の解答せよ.

(a) $f'(x)$,

(b) $f'(c) = 0$ なる $c \in I$ を 1 つ（Rolle の定理）.

(c) $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ なる $c \in J$ を 1 つ（平均値の定理）.

(1) $f(x) = (x-1)(x-3)$, $I = [1,3]$, $J = [1,4]$.

(2) $f(x) = (x-1)(x-3)^2$, $I = [1,3]$, $J = [1,5]$.

7.11 平均値の定理の θ 版を入れる.

7.12 L'Hôpital の定理に関する問題を入れる!

§ 8. 導函数に関する公式

定理 8.1 合成函数の微分法 $\cdots$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ (指定 text, 定理 1.17)

合成函数の微分法は, 最も多用される重要な公式である. それは, 非常に多くの有用な函数が基本的な函数から合成函数として得られるからである.

証明 定理の有用さからは想像できないほど証明は簡単である.
函数 $y = g(u)$, $u = \varphi(x)$ の合成として $y = (g \circ \varphi)(x) = g(\varphi(x))$ が得られるものとすると,
x の増分 Δx に対する u および y の増分は

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x), \quad \Delta y = g(u + \Delta u) - \varphi(u)$$

で与えられる. このとき

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (\because \Delta u \text{ で割つて } \Delta u \text{ を掛けた})$$

である. ここで $\Delta x \to 0$ とすると $\Delta u \to 0$ であるから,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta u} \to \frac{dy}{du}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to \frac{du}{dx}$$

となつて, 所望の公式が得られる. □

例 8.2 $y = (x^2 + 5x + 1)^7$ は

(8.3) $$y = u^7 \quad \text{と} \quad u = x^2 + 5x + 1$$

の合成函数である.

(8.4) $$\frac{dy}{du} = 7u^6, \qquad \frac{du}{dx} = 2x + 5$$

であるから

(8.5) $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 7u^6 \cdot (2x+5) = 7\underbrace{(x^2 + 5x + 1)^6 (2x + 5)}_{\text{最後は } x \text{ のみの式に!}} \cdots\cdots \text{Ans.}$$

逆函数の微分法 $\cdots$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$ (Text, 定理 1.19)

教科書とは順序が違ふが, こちらの方を先にやつた方がわかり易いであらう.

証明 x の増分 Δx に対する y の増分を Δy とすると, y の増分 Δy に対する x の増分は Δx に他ならない. このとき,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

ここで $\varDelta x \to 0$ とすると $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x} \to \dfrac{dy}{dx}$ であり $\dfrac{\varDelta x}{\varDelta y} \to \dfrac{dx}{dy}$ であるから, 与式が成り立つ. □

x^a の微分法 $\cdots$ $(x^a)' = a\,x^{a-1}$ $\quad(a \in \mathbb{Q})$

証明 有理数 a は $m \in \mathbf{Z}$ と $n \in \mathbf{N}$ によつて, $a = \frac{m}{n}$ と書ける.

(1) $m = 1,\ a = \frac{1}{n}$ の場合:

$y = x^a = x^{\frac{1}{n}}$ とおくと $y^n = x$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{ny^{n-1}} \quad (\because \text{ 第 4 回の (6) で述べた公式}) \\ &= \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{n-1}{n}})} \\ &= \frac{1}{n}\,x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} = a\,x^{a-1}.\end{aligned}$$

(2) $n = 1$ で $a = m < 0$ の場合は $-m \in \mathbb{N}$ なので,

$$\begin{aligned}(x^m)' &= \left(\frac{1}{x^{-m}}\right)' = \frac{0 \cdot x^{-m} - 1 \cdot (-mx^{-m-1})}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} = ax^{a-1}.\end{aligned}$$

但し, 商の微分を用いた.

(3) 一般の場合は, 函数 $y = x^a = (x^{\frac{1}{n}})^m$, は

$$y = u^m \quad \text{と} \quad u = x^{\frac{1}{n}}$$

の合成函数であるから, 合成函数の微分によつて

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = m\,u^{m-1}\,\frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= m\,(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\,\frac{1}{n}\,x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}\,x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1} = a\,x^{a-1}\end{aligned}$$

となるから, やはり与式は正しい. □

演 習 問 題

8.6 導函数の問題

定理 8.7

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

§9. 指数函数と対数函数の微分

9.1. 自然対数の定義と性質

Napier の数 e を底とする対数函数は $\log x = \log_e x$ と略記され, x の自然対数と呼ばれる.

$$x = e^y \iff y = \log x.$$

> **命題 9.1** $\log x$ の導函数は次で与えられる：
> $$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

証明 導函数の定義より,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\ &\underset{(\because\ \log x\ \text{は連続函数})}{=\!=\!=\!=} \log\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \underset{(\because\ 9.9)}{=\!=} \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

となり, 示された. □

> **命題 9.2** $\log|x|$ の導函数も次で与えられる：
> $$(\log|x|)' = \frac{1}{x}.$$

証明 $x<0$ の場合を調べればよい. $-x=t$ とおくと $t>0$ であるから

$$(\log|x|)' = \frac{d}{dx}\log(-x) = \left(\frac{d}{dt}\log t\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\cdot(-1) = \frac{1}{-t} = \frac{1}{x}$$

となつて, 証明された. □

9.2. 指数函数の導函数

次に e を底とした指数函数 e^x を考へる.

> **命題 9.3** 次が成り立つ：
> $$(e^x)' = e^x.$$

証明 $y=e^x$ とおくと, $x=\log y$ であるから $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}$. ここで, 逆函数の微分の公式より

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

となる. □

別証 導函数の定義に寄り沿つて証明してみる：（本質的には, やはり逆函数の微分を調べて

ゐる.)

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

ここで $h = e^{\Delta x} - 1$ とおくと, $\Delta x = \log(1+h)$ であり, $h \to 0 \iff \Delta x \to 0$ であるから,

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{h}{\log(1+h)} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{\dfrac{\log(1+h)}{h}} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{1}{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

$$\underset{(\because\ \text{補題 5.11})}{=\!=\!=\!=} e^x \frac{1}{\log e} = e^x.$$

となる. □

★ 前節にも述べたが, 後期に Taylor の定理と Taylor 展開を学ぶ. それを使うと次の結果が得られるが, 前期はこの表示を使わない.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

9.3. 指数函数の導函数, 一般冪乗函数の導函数, 対数微分法

一般の底の指数函数の導函数を調べる.

命題 9.4 定数 $a>0$ について

$$(\boldsymbol{a^x})' = \boldsymbol{a^x \log a}.$$

証明 まづ $y=a^x$ とおく. これの自然対数を取つて微分すると

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{d}{dx}\log a^x = \frac{d}{dx}x\log a = \log a$$

一方 $\frac{d}{dx}\log y = \frac{y'}{y}$ なので,

$$y' = y\log a = a^x \log a$$

となる. □

対数の導函数を応用すると次の美しい式が得られる. (9.4 と混同する方を見掛ける. ご注意を！)

命題 9.5 α が実定数のとき,

$$(\boldsymbol{x^\alpha})' = \boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}}.$$

証明 $y=x^\alpha$ とおくと

$$\frac{d}{dx}\log y = \frac{y'}{y}. \quad \frac{d}{dx}\log x^\alpha = \frac{d}{dx}(\alpha\log x) = \alpha\frac{1}{x}$$

よつて

$$\frac{y'}{y} = \alpha\frac{1}{x}, \qquad \therefore\ y' = \alpha\frac{1}{x}y = \alpha x^{\alpha-1}$$

となり, 示された. □

9.4 と 9.5 の証明で行つた微分法を <u>対数微分法</u> といふが, もう一つ使用例を挙げる.

例題 9.6 $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+1)}}$ の導函数を求めよ. 但し $\sqrt[3]{A} = A^{\frac{1}{3}}$ の意味である.

解答 この函数の絶対値の対数を取ると

$$\begin{aligned}\log|y| &= \log\left|\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+1)}}\right| \\ &= \frac{1}{3}\big(\log|x-2| + \log|x+3| - \log|x| - \log|x-3| - \log|x+1|\big).\end{aligned}$$

この両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right).$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad y' &= \frac{1}{3}y\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-3)(x+1)}}\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

を得る. □

9.4. 指数函数と対数函数の基本性質のまとめ

以上で述べた性質と高校で学んだことをまとめておく. 証明も含めて再確認しておきなさい.

命題 9.7 (指数函数のまとめ) a は正の定数で, $a \neq 1$ とする. 函数 $y = a^x$ は実数全体で定義された函数であり, 至るところで連続であり, 以下の性質を持つ.

(1) $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

(2) $a > 1$ のとき, $\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

(3) $0 < a < 1$ のとき, $\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

(4) $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

(5) $b = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N})$ のとき, $\quad a^b = \sqrt[n]{a^m}$.

(6) $a^b a^c = a^{b+c}$.

(7) $(a^b)^c = a^{bc}$.

命題 9.8 (対数函数のまとめ) a は正の定数で 1 でないとする. 函数 $y = \log_a x$ の定義域は $(0, \infty)$ であり, 至るところで連続であり, 以下の性質も持つ.

(1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

(2) $a > 1$ のとき, $\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

(3) $0 < a < 1$ のとき, $\quad x_1 < x_2 \Longrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

(4) $a^{b \log_a c} = (a^{\log_a c})^b = c^b$.

(5) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

(6) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

(7) $\log_a b^c = c \log_a b$.

(8) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ 　(底の変換公式. 4.12 を見よ.).

演 習 問 題

9.9 定数 $a \neq 0$ について次を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

9.10 次の函数の導函数を求めよ.

(1) a^{2x+1} (2) a^{x^2+1} (3) $x^{\sqrt{2}}$ (4) $x^{\log 3}$

9.11 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $\log|2x+1|$.

(2) $\log(\sqrt{x}+x)$.

(3) $\{\log(x^2+1)\}^2$, （Hint : $\log(x^2+1)^2$ と混同しない様に！）.

(4) $\log_{e^2}|x|$.

9.12 （対数微分法）次の函数の導函数を求めよ.

(1) x^{x^2+x} $(x > 0)$.

(2) $(x^2+1)^x$.

(3) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-4)}}$.

★ 上の 9.12 の (3) は対数微分法でやると手早くできるが, 対数微分法でなくてもできる.

(1) と (2) の様な, 指数が x に依存する場合は, 本質的に対数微分法が必要である.

9.13 次の極限を求めよ. （Hint : l'Hôspital の定理）

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x - 1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3}$.

§ 10. 三角函数と逆三角函数の導函数

10.1. 三角函数の導函数

命題 10.1 三角函数について,

$$(\cos x)' = -\sin x,$$
$$(\sin x)' = \cos x,$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

が成り立つ.

証明 $(\boldsymbol{\cos x})' = -\boldsymbol{\sin x}$ は

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(x + \frac{1}{2}\Delta x)\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} -\sin(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \\
&= -\sin x \cdot 1 \\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\sin x})' = \boldsymbol{\cos x}$ の証明を自身で試してみよ.

$(\boldsymbol{\tan x})' = \boldsymbol{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$ は

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

と商の微分の公式 6.9(2) から容易に得られる(確かめておきなさい). □

演 習 問 題

10.2 (導函数の計算) 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $\sin(3x-1)$

(2) $x\cos x$

(3) $\sin(x^2)$

(4) $\sin^2 x\cos x$

(5) $\sin(\sin x)$

(6) $\dfrac{1}{\cos x}$

(7) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ (この問題は 10.3(3) と同じ！)

10.3 次の函数の導函数を求めよ.

(1) $\cos(2x+1)$.

(2) $\sin^2(x+1)$. (注意：$\sin^2 x = (\sin x)^2$ である.)

(3) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

(4) $\sqrt{1+\cos x}$.

10.4 次の極限を求めよ. (Hint：三角函数を含む l'Hôspital の定理の応用)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ (Hint：L'Hôspital の定理を繰り返す.)

10.2. 逆三角函数の導函数

逆三角函数の導函数を学ぶ.

$y = \sin^{-1} x$ の導函数.

$x = \sin y$ であるから, $\frac{dx}{dy} = \cos y$. これと逆函数の微分より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

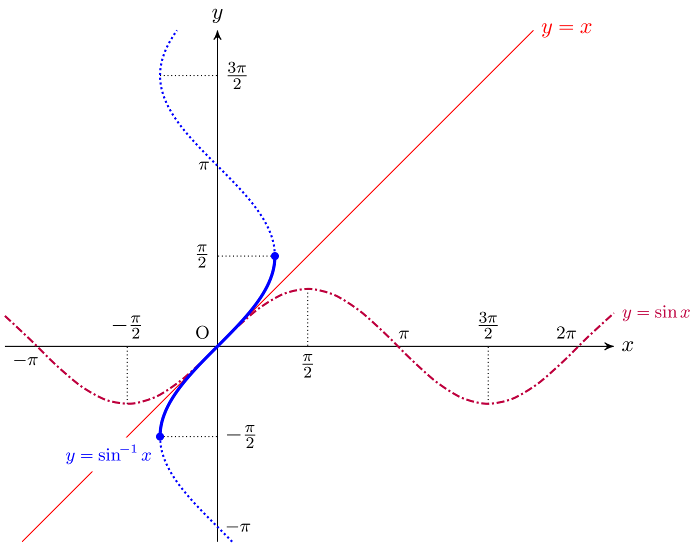
これを x で表したいので,

$$\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

を使つて,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - x^2}}.$$

しかし, 符号 $\pm$ は $+$ か $-$ か.



答：$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\cos y \geqslant 0$ だから $+$.　graph より, 単調増加函数だから確かに $+$.

$y = \cos^{-1} x$ の導函数.

$x = \cos y$ であるから, $\frac{dx}{dy} = -\sin y$. これと逆函数の微分より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y}$$

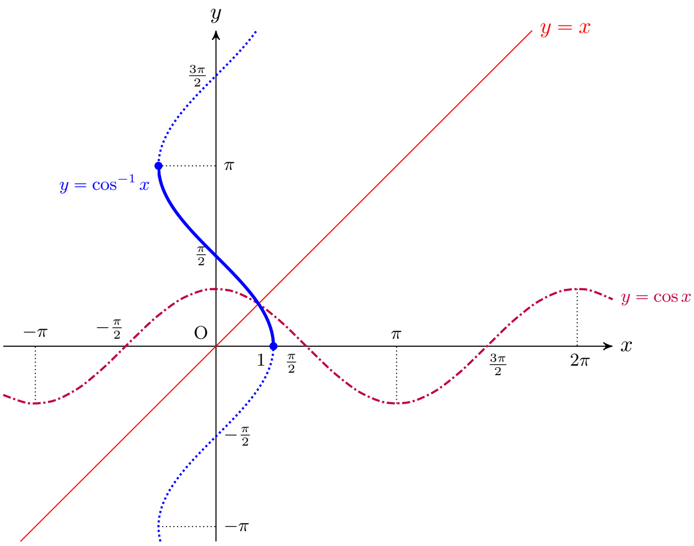
これを x で表したいので,

$$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$$

を使つて,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mp\sqrt{1-x^2}}.$$

しかし, 符号 $\mp$ は $-$ か $+$ か.



答：$0 \leqq y \leqq \pi$ より $\sin y \geqq 0$ だから $-\sin y \leqq 0$ なので $-$. graph より, 単調減少函数だから確かに $-$.

$y = \tan^{-1} x$ の導函数.

$x = \tan y$ であるから, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. これと逆函数の微分より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

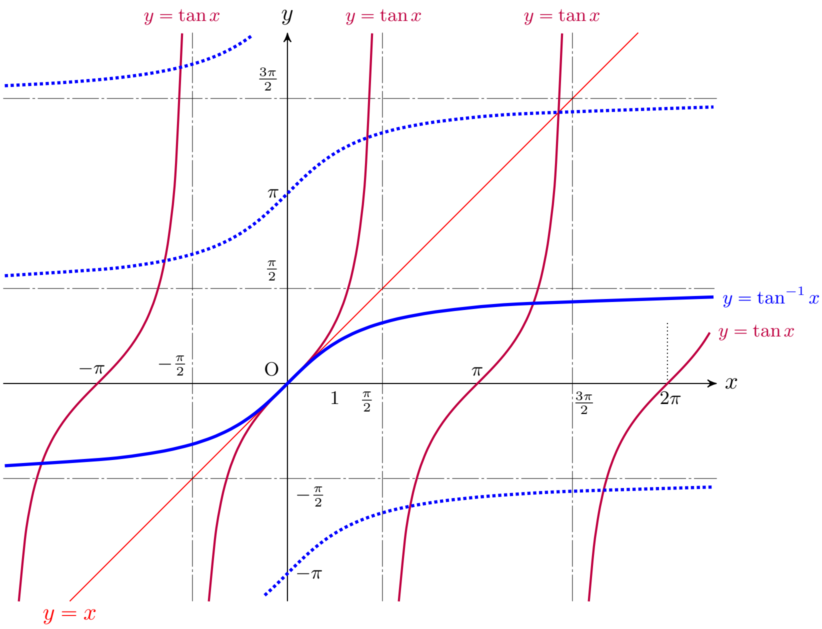
これを x で表したいので,

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

を使つて,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

☆ $\tan^{-1}$ については, $\sin^{-1} x$ や $\cos^{-1} x$ の様な符号 $\pm$ を選ばなければならない場面はなくて, スッキリしてゐる.



☆ 逆函数を構成してみると 三つの三角函数の中では $\tan x$（と $\tan^{-1} x$）が最も美しい！

例題 10.5 $\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\tan^{-1}\sqrt{3}$ の値を求めよ.

解答 $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \theta$ とおくと 定義からで

$$\sin\theta = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{かつ} \quad -\tfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \tfrac{\pi}{2}$$

である. 従つて $\theta = \frac{\pi}{3}$ ······· Ans.

他方も同様に考へて, $\tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ である. □

演 習 問 題

10.6　（導函数の計算練習）　次の函数の導函数を求めよ．

(1) $\tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$

(2) $\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x-1}$

(3) $\sin^{-1}\sqrt{x}$

(4) $\tan^{-1}(e^x-e^{-x})$

10.7　（極限の計算練習）　次の極限を求めよ．

（Hint：L'Hôspital の定理も試してみよ.）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}-x-\cos^{-1}x}{x^3}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)+\sin^{-1}x}{x^2}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x^2}-\sin^{-1}x}{x^3}$

§ 11. 高次の導函数

11.1. 高次の導函数

定義 11.1 函数 $y = f(x)$ について, 次の様に導函数の導函数等を定義する:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}, \ \cdots, \ \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \quad (n \geqq 1).\cdots$$

ここで, もちろん, これらの導函数が存在することを前提としてゐる. $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ を n 次導函数と呼ぶ. 2 次以上の導函数をまとめて, 高次の導函数などと呼ぶことがある.

n 次導函数を表すのに $\dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$, $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$, $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$ などの記法も使はれる.

例 11.2 (1) $(e^x)' = e^x$ ゆゑ, 任意の非負整数 n について, $(e^n)^{(n)} = e^x$. (2) $n > m$ のとき $(x^m)^{(n)} = 0$.

次の公式は便利である.

命題 11.3 整数 $n \geqq 0$ について,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)$$

が成り立つ.

証明 n に関する数学的帰納法で証明できる. 試みて欲しい. □

11.2. Leibniz の公式

定理 11.4 (Leibniz の公式) n 回微分可能な函数 u と v について

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)}$$

が成り立つ. ここで $\dbinom{n}{r} = {}_n\mathrm{C}_r$ である.

証明 公式 $(uv)' = u'v + uv'$ を使ふと

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

が得られる. さらに

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$
$$(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

等が得られ, 所望の公式が成り立つことが推測できる. 証明は帰納法で行ふ⋯ □

例題 11.5 $y = x^2 \sin x$ の微分

解答 $u = x^2,\ v = \sin x$ として Leibniz の公式を使ふ．いま，$u' = 2x,\ u'' = 2,\ u''' = 0$ であり，$k \geqslant 4$ についても $u^{(k)} = 0$ である．ゆえに，

$$\begin{aligned}
(x^2 \sin x)^{(n)} &= \binom{n}{0} u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n-3} u''' v^{(n-3)} + \binom{n}{n-2} u'' v^{(n-2)} + \binom{n}{n-1} u' v^{(n-1)} + \binom{n}{n} u v^{(n)} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{\text{はじめの }(n-2)\text{ 項}} \\
&\qquad + \frac{n(n-1)}{2} (x^2)'' (\sin x)^{(n-2)} + n (x^2)' (\sin x)^{(n-1)} + x^2 (\sin x)^{(n)} \\
&= n(n-1) \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}(n-2)\right) + 2nx \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}(n-1)\right) \\
&\qquad\quad + x^2 \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) \ (\because\ (11.3)) \\
&= -n(n-1) \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) - 2nx \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) + x^2 \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) \\
&= (x^2 - n^2 + n) \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) - 2nx \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2} n\right) \ \cdots\cdots\ (\text{Ans.})
\end{aligned}$$

となる． □

演 習 問 題

11.6 2 次導関数を求めよ.

(1) $(x^2+2x+1)^3$

(2) $(2x+5)^6$

(3) $\dfrac{1}{x^2+x+2}$

(4) $\dfrac{1}{(x^2+x+2)^3}$

(5) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^4$

(6) $\sqrt{x^2+2x+5}$

(7) $\sqrt{\sqrt{x^2+1}-x}$

(8) $\dfrac{x^2}{2x+5}$

(9) x^4+2x^2-x+3

(10) $(x^3+1)^3$

(11) $\sqrt{x+2}$

(12) $\sqrt[3]{x^3+4}$

(13) $\dfrac{1}{x^2+2}$

(14) $\dfrac{x}{x^2+2}$

11.7 n 次導関数を求めよ. 但し $n \in \mathbb{N}$.

(1) $\dfrac{1}{1+x}$ (2) $\dfrac{1}{1-x}$ (3) $\sin(2x+1)$

11.8 極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

11.9 次の関数の 4 次導関数を Leibniz の公式を利用して求めよ.

(1) $e^x\sin x$ (2) x^3e^{2x}

11.10 次の関数の n 次導関数を Leibniz の公式を利用して求めよ.

(1) x^2e^x (2) $x^3\cos x$

(3) x^3e^{2x} (4) $x^3\log x$

§ 12. 級数

級数の収束と発散の定義を理解する．級数を使って指数函数が定義できることを学ぶ．

命題 12.1 （冪乗和の公式）次の公式が成り立つ：

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1);$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$

証明 (1) は易しい．(2) については

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

を $k = 1, \cdots, n$ について加へる：

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

$$\therefore\ n^3 + 3n^2 + 3n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

これより (2) が得られる．(3) も同様の考へ方で得られるから読者には試して欲しい． □

これらの公式を覚えておくと，便利である．参考までに，(1) 〜 (3) の先を書いてみれば，

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

となる．証明は 12.1 と同じ考へ方でできるので，試られたい[4)]．

命題 12.2 等比数列の和の公式も思ひ出しておく：

$$\sum_{k=1}^{n} ar^k = \begin{cases} a\cdot\dfrac{1-r^n}{1-r} & (r \neq 1 \text{ のとき}), \\ na & (r = 1 \text{ のとき}). \end{cases} \tag{12.3}$$

[4)] この先にある話題については，例へば，荒川・伊吹山・金子 著：『ベルヌーイ数とゼータ関数』（牧野書店）を参照されたい．

定義 12.4　（無限の）数列 $\{a_n\}$ に対し, 数列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\} \ :\ a_1,\ a_1+a_2,\ a_1+a_2+a_3,\ \cdots$$

を a_n を一般項とする(無限) 級数 と称する. この数列の極限を

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots \tag{12.5}$$

などと記す. この極限も a_n を一般項とする(無限) 級数 と呼ばれる.
数列 (12.5) が収束 (発散) するとき, 上の無限級数は 収束 (発散) するといふ.

最も重要な無限級数の一つ, 等比級数を思ひ出さう.

定義 12.6　等比数列から定まる無限級数は 等比級数 と呼ばれる. 初項 a, 公比 r の等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ に対する無限級数

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

についても, a, r をそれぞれ, この級数の 初項, 公比 と呼ぶ.

命題 12.7　・ $a=0$ ならば r に依らず 0 に収束,
・ $a\neq 0$ ならば $|r|<1$ のときだけ収束し, 極限は（上の (4) により）$\dfrac{a}{1-r}$ である.

証明　12.3 と 2.13 による. □

例題 12.8　次の無限級数が ∞ に発散することを示せ.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

解答

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)+\cdots\\
&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{2^m}\right)+\cdots\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

となる. よつて主張が示された. □

一般に与へられた級数の各項の絶対値が, 別途用意した収束する等比級数の各項の絶対値よりも小であれば元の級数は収束する．この様に, 当該の級数の各項の絶対値が収束がわかつてゐる級数の各項の絶対値より小なることを利用して収束を示す方法がよく用いられる．この場合, 後者を前者の優級数と呼ばれる．これを簡潔に述べた定理として, Cauchy の定理, H'Adamard の定理と呼ばれるものがある．

絶対収束, 条件収束

Cauchy の判定法

D'Alambert の判定法

注意 12.9　$r = 1$ の場合は判定できない．例として, 12.8 で見た通り $\sum \frac{1}{n}$ 発散するが, $\sum \frac{1}{n^2}$ は収束する．しかし, どちらも $r = 1$ である．

2 つの級数の積の収束

他にも様々な方法があるので, 例へば [1] の第 5 章を参照されたい．

演 習 問 題

12.10　次の和を求めよ．（n の簡潔な式で表せ．）

(1) $1 - 3 + 3^2 - \cdots + (-3)^{n-1}$　　(2) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$

12.11　次の等比級数の公比 r を記した上で, 収束, 発散を調べ, 収束する場合はその和を求めよ．

(1) $1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3} - \cdots$　　(2) $\sqrt{5} + 5 + 5\sqrt{5} + \cdots$

(3) $3 - 3 + 3 - 3 + 3 - \cdots$　　(4) $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \cdots$

§ 13.　Taylor の定理

定理 13.1　函数 $f(x)$, が区間 $[a,b]$ を含む開区間で, n 回までは微分可能ならば,

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \tag{13.2}$$

かつ $a<c<b$ なる c が存在する. $n=1$ の場合が**平均値の定理**である.

証明　$n=3$ のときを証明する. つまり

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(b-a)^3 \quad a<c<b$$

をともに満たす c が存在することを証明する.　まず, そもそも

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + A\cdot(b-a)^3 \tag{13.3}$$

を満たす定数 A は存在する（A について解いてみればよい）. だから, この証明の肝は A を

$$A = \frac{f'''(c)}{3!}, \quad a<c<b$$

と表すことができるかどうか, といふことに他ならない.　ここで, 次の函数を考察する：

$$F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + A\cdot(b-x)^3 \right\}$$

（ここが Key point!）

$$= \text{“(13.3) の左辺”} - \text{“(13.3) の右辺の } a \text{ を } x \text{ に置き換へたもの”}.$$

あとは $F(x)$ について Rolle の定理を適用するだけである. 実際

$$F(a) = 0 \quad (\because \text{代入してみると, 定数 } A \text{ の定義からわかる.})$$

$$F(b) = 0 \quad (\because \text{代入してみるとすぐわかる.})$$

なので, $F(a) = F(b)$ であり, $F'(c) = 0$ かつ $a<c<b$ となる c が存在する. ここで

$$F'(x) = -\left\{ \cancel{f'(x)} + \left(\cancel{\frac{f''(x)}{1!}(b-x)} + \cancel{\frac{f'(x)}{1!}(-1)} \right) + \left(\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cancel{\frac{f''(x)}{2!}2(b-x)(-1)} \right) + A\cdot 3(b-x)^2(-1) \right\} = -\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2 + A\cdot 3(b-x)^2$$

であるから, その c について

$$F'(c) = -\frac{f'''(c)}{2!}(b-c)^2 + A\cdot 3(b-c)^2 = 0 \quad \text{かつ} \quad a<c<b.$$

しかるに $b-c\neq 0$ であるから

$$A=\frac{f'''(c)}{3!}\quad \text{かつ}\quad a<c<b.$$

となり, 目標に達した. □

注意 13.4 *θ 式の記述.* 13.2 においては $a<b$ といふ仮定が必要であるが, 見掛け上, この様な制約を取り払つた記述が可能である. 実際 a と b の大小関係を気にせず $\theta=\frac{c-a}{b-a}$ とおくと, c が a と b の間にあることと $0<\theta<1$ であることが同値である. ゆゑに 13.2 は, その様な θ が存在して

$$\begin{aligned}f(b)=f(a)&+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2\\&+\frac{f'''(a)}{3!}(b-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}\\&+\frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n\end{aligned}\tag{13.5}$$

となる, と述べられる.

注意 13.6 13.2 の右辺の最後の項を <u>剰余項</u> と呼ぶ.

例 13.7 重要な函数についての Taylor の定理の適用例.

例 13.8 Napier の数 e の精密計算法 （Taylor の定理の応用）

残念ながら, なぜか Taylor の定理が「微分積分 1」の範囲外であるが, Taylor の定理の応用は「微分積分学といふ学問がいかに重要か」を感じるとても良い例だと思ふので, ここに付録として, 一例を記しておく. 余裕のある方は, 是非, ここも読んで欲しい.

$$a = 0,\quad b = 1,\quad f(x) = e^x,\ n = 10$$

として Taylor の定理を書き下してみたい.

$$f(x) = e^x,\quad f'(x) = e^x,\quad f''(x) = e^x,\quad \cdots$$

であるから $x = a = 0$ を代入すれば

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 1.$$

$f(b) = f(1) = e^1 = e$ であるから, 結局

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{9!} + \frac{e^c}{10!} = \frac{98641}{36288} + \frac{e^c}{10!}, \qquad (0 < c < 1)$$

となる c が存在する. ここで,

$$\frac{98641}{36288} = 2.7182815\cdots$$

である. 2.22 により $(1 <)\, e^c < e < 3$ だから, 誤差は

$$0 < \frac{e^c}{10!} < \frac{3}{10!} = \frac{1}{1209600} < \frac{1}{10^6}$$

なので

$$\boldsymbol{e = 2.718281}\cdots \quad \text{または} \quad \boldsymbol{e = 2.718282}\cdots$$

であることがわかった. これほどの精密な計算方法は e の定義式

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

からは, 想像もできないことである. ちなみに

$$\left(1 + \frac{1}{743324}\right)^{743324} = 2.71827999999765\cdots,$$
$$\left(1 + \frac{1}{743325}\right)^{743325} = 2.71828000000010\cdots$$

である.

注意 13.9 Taylor の定理において a と b の大小関係を逆にして, 主張を不等式 $a < c < b$ を $b < c < a$ に置き換へれば, 全く同じ主張が成り立つ. 理由は, この場合に証明を再構成してみればわかる.

演 習 問 題

13.10 定理 13.1 の証明を理解した上で, 教科書を見ないで $n = 4$ の場合に記述せよ.

第 3 章　2 変数函数の微分法

§ 14. 多変数函数

14.1. 平面の方程式

平面とは何かについては, 誰でもはつきりとした理解があると思ふ. しかし, これの数学的に厳密な定義を与へるのに戸惑ひを覚える. 至極当然と思はれてゐることについてさへ, 自省的に考察する数学においてはこの様なことがよく起る.

以下では, 零 vector $\overrightarrow{0}$ は, 任意の vector と垂直であるとする.

定義 14.1 (平面) 空間内に, ある定まつた vector $\overrightarrow{n}$ と定点 A があり,

$$\alpha = \{\,\mathrm{P}\,\big|\,\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{n}\,\}$$

と書ける集合 α を, <u>平面</u>といふ. 従つて

$$\alpha = \{\,\mathrm{P}\,\big|\,\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{n} = 0\,\}$$

とも書ける. $\overrightarrow{n}$ は α の<u>法線 vector</u> と呼ばれる. 0 でない定数 k に対し, $k\overrightarrow{n}$ も α の法線 vector であり, それ以外に α の法線 vector は存在しない. また, 点 A は平面 α に属する. これたのことを α は A を通つて $\overrightarrow{n}$ に垂直な平面であると称する.

注意 14.2 (1) 点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ を通り, $\overrightarrow{n} = (p, q, r)$ に垂直な平面 α を与へる方程式

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0, \qquad (\text{ 但し } \mathrm{P}(x, y, z)\,)$$

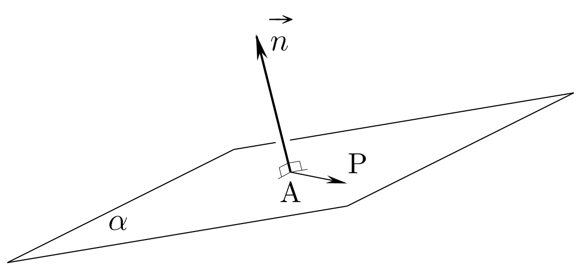
を書き下せば, 次の様になる :

$$\boldsymbol{p}\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{0}.$$

(2) 上のことから, xyz 空間における平面の方程式は, ある定数 p, q, r, d により,

$$\boldsymbol{p\,x} + \boldsymbol{q\,y} + \boldsymbol{r\,z} = \boldsymbol{d} \qquad (p, q, r \text{ のうちどれか 1 つは 0 でない.})$$

の形に書かれる (確かめよ).



14.2. 2 変数函数とその連続性

D を $\mathbb{R}^2$ の領域[1] とする. D から $\mathbb{R}$ への函数

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

を考へるとき, $D \subset \mathbb{R}^2$ の元を標準的な座標を (x,y) で表すことにより, 函数 $z = f(x,y)$, などと記すことが多い. 集合

$$\Gamma_f = \{\, (x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D \,\}$$

を函数 f の graph と呼ぶ.

(1) **2 変数函数** $\cdots$ $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ の様に記される.
定義域に属する各 (x,y) に対し, 唯一つの z が定まる.
その graph は xyz 空間に描かれ, 一般には曲面を形成する.

(2) **2 変数函数の極限** $\cdots$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha$ と記す.
ここでは $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0$ といふ意味で限りなく近付く.

(3) **連続** $\cdots$ 定義域内の点 (a,b) について,

$$\underset{\text{極限値}}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)} = \underset{\text{代入}}{f(a,b)}$$

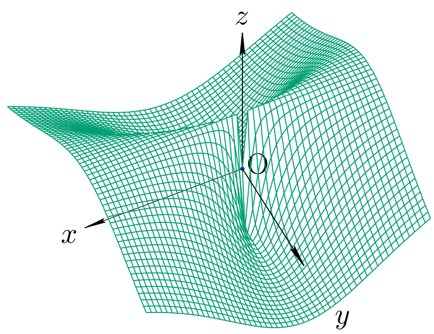
であること.

例 14.3 連続でない 2 変数函数の例 :

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ のとき}. \end{cases}$$

---

[1] ,,,



演 習 問 題

14.4 次の平面の方程式を求めよ.

(1) $\overrightarrow{n} = (3, 2, -1)$ に垂直で, 点 A$(0, -3, 5)$ を通る平面.
(2) $\overrightarrow{n} = (0, 2, 1)$ に垂直で, 点 A$(4, 1, -1)$ を通る平面.

14.5 次の方程式で与へられる平面の法線 vector と通る点を 1 つづつ挙げよ :
(1) $3x + 4y - 5z = 2$ (2) $-5x - 4z = 1$

§ 15. 偏微分法

15.1. 偏微分係数と偏導函数，全微分

(1) **偏微分係数** … それぞれ，x 軸方向の微分係数，y 軸方向の微分係数と考えられる．

$$\boldsymbol{f_x(a,b)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$
$$\boldsymbol{f_y(a,b)} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

(2) **偏導函数**

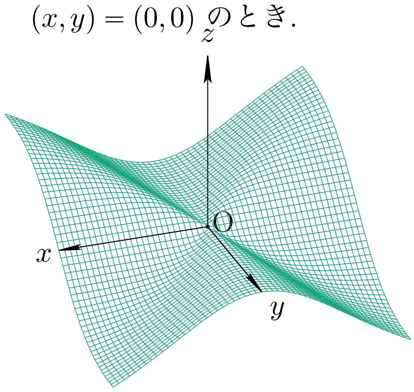
$$\boldsymbol{z_x} = \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}} = f_x(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$
$$\boldsymbol{z_y} = \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{y}} = f_y(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

例題 15.1 2 変数函数 $z=f(x,y)=3x^3y^2-5xy^2+xy-x+3y+1$ について，偏導函数 z_x および z_y を求めよ．さらに，点 $(3,1)$ における偏微分係数 $f_x(3,1)$ と $f_y(3,1)$ を求めよ．

解答 $z_x = 9x^2y^2-5y^2+y-1$, $z_y = 6x^3y-10xy+x+3$.
$f_x(3,\,1)=76$, $f_y(3,\,1)=138$. □

例 15.2 連続ではあるが，全微分可能ではない（次 page で説明 / 接平面を持たない点のある）
2 変数函数の例：

$$z = \begin{cases} \dfrac{-x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \text{ のとき}, \\ 0 & (x,y)=(0,0) \text{ のとき}. \end{cases}$$



15.2. 接平面の方程式

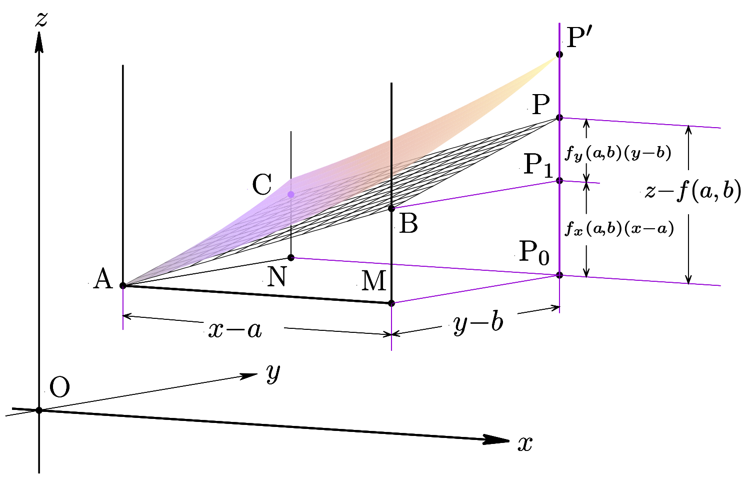
(1) **接平面の方程式**

$$\boldsymbol{z - f(a,b) = f_x(a,b)\,(x-a) + f_y(a,b)\,(y-b)}$$

（点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面）

(2) **全微分** $\cdots$ $\boldsymbol{dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}$

(3) **接平面の法線ベクトル** $\cdots$ $\overrightarrow{n} = (f_x(a,b),\, f_y(a,b),\, -1)$



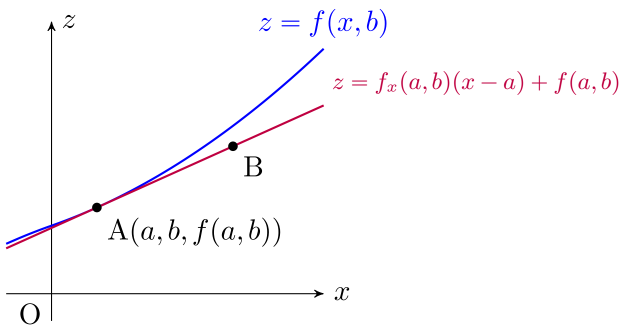
接平面の方程式 図の説明：

(1) 点 $\mathrm{A}(a,b,f(a,b))$ や P' を通っている曲面が $z=f(x,y)$ の graph である.

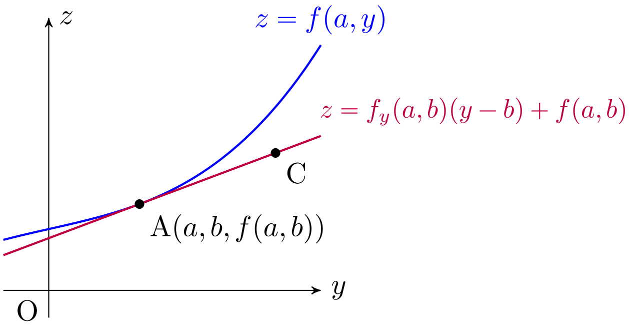
(2) 点 C は曲面に隠れた点を指す.

(3) 四辺形 ABPC は, 点 A における接平面の一部であり, 平行四辺形である. 点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ はこの平面上の任意の点である.

(4) $\triangle\mathrm{ANC}$ と $\triangle\mathrm{BP_1P}$ は合同である.



上図を y 軸後方から眺めた図



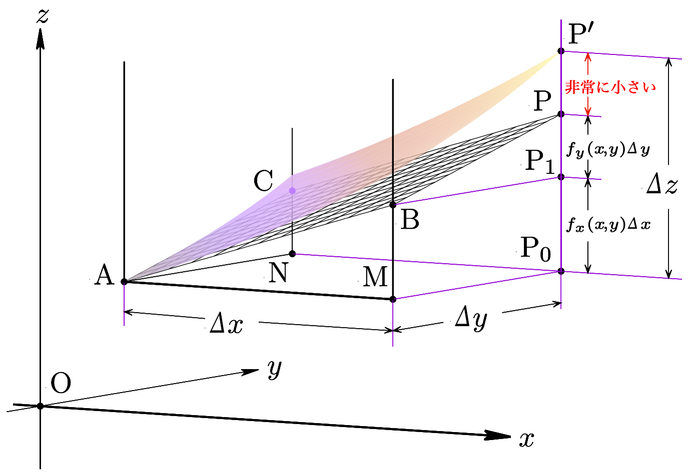
上図を x 軸前方から眺めた図

これらの図から接平面の方程式が得られる：

接平面の方程式	$\boldsymbol{z - f(a, b) = f_x(a, b)\,(x - a) + f_y(a, b)\,(y - b)}$

話をわかり易くするため，この講義では，xy 平面に垂直な接平面は考えないこととする．

全微分 全微分とは, 接平面が存在する条件を動的に捉えた式である. 即ち, 上図の点 A に動的な考慮をして $\boldsymbol{A(x,y,z)}$ と記し, x, y の増分 Δx, Δy に応じた z の増分 Δz を量る式である. 右図において, $(\Delta x, \Delta y)$ を $(0,0)$ に近づけながら, A を中心にして zoom up する. その際, P があたかも動かない様に zoom up できる. この状況では, PP′ が限りなく, 0 に近付き, Δz が $\mathrm{P_0P}$ に近づく. 即ち, $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ のとき,



$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \fallingdotseq f_x(x,y)\,\Delta x + f_y(x,y)\,\Delta y$$

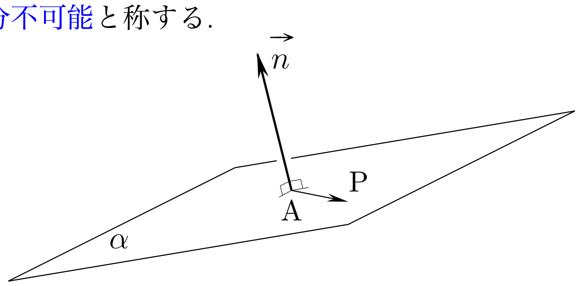
の両辺の比は 1 に限りなく近づく [2]. このことを象徴的に次式で表す.

> **全微分** $\boldsymbol{dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}$
> **(これは, 接平面が存在するときだけ成り立つ.)**

この両辺を $z = f(x,y)$ の 全微分 と呼ぶ. 前 page の 2 つの図の様な場合, 原点では, 接平面が存在しない. これを原点では全微分不可能と称する.

接平面の法線ベクトル 接平面 α 上の定点 $\mathrm{A}(a, b, f(a,b))$, 接平面 α 上を動く点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ について, 2 つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a,\ y-b,\ z-f(a,b)),$$
$$\vec{n} = (f_x(a,b),\ f_y(a,b),\ -1)$$



の内積は $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n} = 0$. これは α の方程式そのものである. これにより, $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$ がわかつた. ベクトル $\vec{n}$ あるいは, $\vec{n}$ と平行なベクトルは平面 α の**法線ベクトル**と呼ばれる.

[2] 正確には, 両辺を $\mathrm{AP_0} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ で割った商の $\mathrm{P_0} \to \mathrm{A}$ での極限が一致する.

例題 15.3　2 変数函数

$$z = f(x, y) = \frac{3xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

の graph 上の点 A$(1, -1, -1)$ におけるこの graph の接平面の方程式と法線ベクトル（の 1 つ）を求めよ.

解答　偏導函数は

$$f_x(x, y) = \frac{3y(-x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{3x(x^2 - y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

であるから（各自で確認せよ）,

$$f_x(1, -1) = -\frac{1}{3}, \quad f_y(1, -1) = \frac{1}{3}.$$

よつて, 求める接平面の方程式は

$$z - (-1) = -\frac{1}{3}(x - 1) + \frac{1}{3}(y - (-1)),$$
$$\therefore x - y + 3z = -1 \quad \cdots\cdots\cdot \ \text{Ans.}$$

これの法線ベクトルは

$$(1,\ -1,\ 3) \ \cdots\cdots\cdot \ \text{Ans.}$$

□

例題 15.4　函数 $z = x^2 \sin y$ の全微分を求めよ.

解答　$z_x = 2x \sin y,\ z_y = x^2 \cos y$ なので,

$$dz = (2x \sin y)\,dx + (x^2 \cos y)\,dy \ \cdots\cdots\cdot \ \text{Ans.}$$

□

演 習 問 題

15.5 偏導函数を求めよ.

(1) $z = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 - 3x - 4y + 1$ (2) $z = e^{-x^2-y^2}$

(3) $z = \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}$ (4) $z = \log(x^2 + 3y^2)$

15.6 次の曲面の点 A における接平面の方程式とその法線ベクトルを求めよ.

(1) $z = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 - 3x + 4y + 1$ A$(1, 1, 2)$

(2) $z = e^{-x^2-y^2}$ A$(1, 1, e^{-2})$

(3) $z = \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}$ A$(1, 1, \frac{1}{2})$

(4) $z = \log(x^2 + 3y^2)$ A$(1, 1, \log 4)$

15.7 全微分を求めよ.

(1) $z = x^2 - 3xy^2 + 2y^3 - 3x - 4y + 1$ (2) $z = e^x \sin y$

15.3. 合成函数の偏微分, 陰函数の定理

命題 15.8 (合成函数の微分, 連鎖律). 函数 $z = f(x, y)$ は全微分可能とする. 微分可能な 2 つの函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ について,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

が成り立つ.

命題 15.9 (合成函数の微分, 連鎖律). 函数 $z = f(x, y)$ は全微分可能とする. 偏微分可能な 2 つの函数 $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ について,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

定理 15.10 (陰函数の定理) 函数 $z = f(x, y)$ は全微分可能とする. $f(x, y) = 0$ のとき $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$ から $\dfrac{dy}{dx}$ が求まる. さらに, "局所的には" 函数 $y = \varphi(x)$ が存在する.

陰函数の graph 上での接線の方程式 ⋯ 陰函数の定理に基いた計算で求められる.

例題 15.11 函数

$$z = e^x \sin y, \quad \begin{cases} x = t^2, \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$

の合成写像 $z = e^{t^2} \sin(3t - 1)$ を 2 通りの方法で求めてみる.

方法 ①. 1 変数函数の微分の公式だけを使つて計算すると：

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= (e^{t^2} \sin(3t-1))' \\
&= (e^{t^2})' \sin(3t-1) + e^{t^2} (\sin(3t-1))' \\
&= 2t\, e^{t^2} \sin(3t-1) + e^{t^2} \cos(3t-1) \cdot 3 \\
&= e^{t^2} \bigl(2t \sin(3t-1) + 3 \cos(3t-1)\bigr).
\end{aligned}$$

方法 ②. 上の 2 変数の合成函数の微分 1 を使ってみると：

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\
&= (e^x \sin y) \cdot 2t + (e^x \cos y) \cdot 3 \\
&= e^{t^2} \sin(3t-1) \cdot 2t + e^{t^2} \cos(3t-1) \cdot 3 \\
&\qquad \text{(最後は } t \text{ だけの式にする)} \\
&= e^{t^2} \bigl(2t \sin(3t-1) + 3 \cos(3t-1)\bigr)
\end{aligned}$$

となり ① の計算結果と一致する.

連鎖律の証明 合成函数の微分 1 を示す. 函数 $z = f(x, y)$ は全微分可能であるから, x, y の増分 Δx, Δy と, それに応じた z の増分 Δz の間には,

$$\Delta z \fallingdotseq f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y$$

なる関係がある. 但し, この両辺の比は $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$ のとき, 1 に収束する. この状況で t の増分 Δt に対応する x, y の増分が Δx, Δy であるとすれば,

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \fallingdotseq f_x(x, y)\,\frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y(x, y)\,\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

であり, やはり, この両辺の比は $\Delta t \to 0$ のとき, 1 に収束する. よって

$$\frac{dz}{dt} = f_x(x, y)\,\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\,\frac{dy}{dt}.$$

これが示したい式であった. 合成函数の微分 2 も同様に示される. □

例題 15.12　**（陰函数の定理を利用した接線の求め方）**
方程式

$$x^3 - 2xy + y^3 - x - y = 0$$

によって定まる陰函数の graph について, 点 $(x, y) = (1, 0)$ における接線の方程式を求めよ.

解答　等式 $x^3 - 2xy + y^3 - x - y = 0$ の両辺を x で微分すると

$$3x^2 - 2(y + xy') + 3y^2y' - 1 - y' = 0.$$
$$\therefore\ (-2x + 3y^2 - 1)y' = -3x^2 + 2y + 1.$$
$$\therefore\ y' = \frac{-3x^2 + 2y + 1}{-2x + 3y^2 - 1}.$$

である. $(x, y) = (1, 0)$ を代入すると

$$y'\Big|_{(x,y)=(1,0)} = \frac{-3+1}{-2-1} = \frac{2}{3}.$$ （これが接線の傾き）

よつて, 求める接線は, 点 $(1, 0)$ を通る傾き $\frac{2}{3}$ の直線である. その方程式は

$$y = \frac{2}{3}(x - 1) \quad \cdots\cdots\cdot \quad \text{Ans.}$$

□

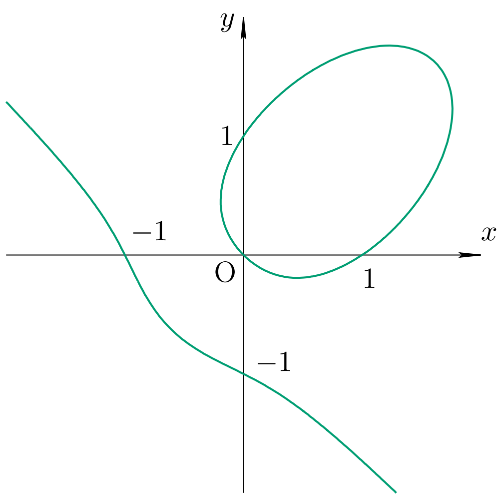
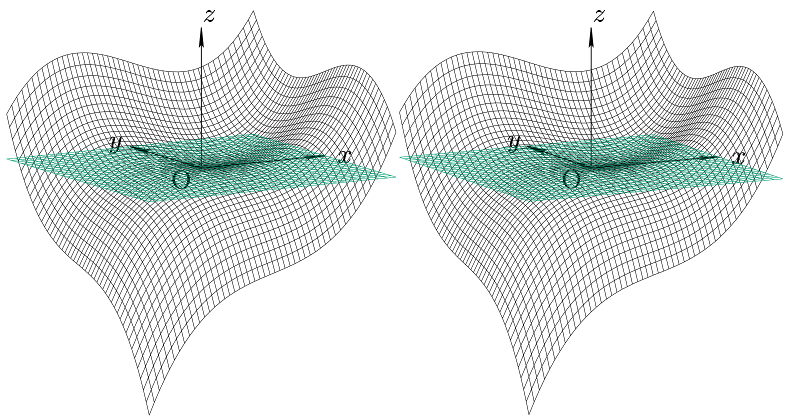


図 15.13　陰函数の graph



$z = x^3 - 2xy + y^3 - x - y$ の表す曲面 （立体視になっています.）

上記の曲面と xy 平面との共有点は図 15.13 の様な曲線になっている.

演 習 問 題

15.14 次の 3 つの函数による合成函数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ について $\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ. 但し, 方法は合成函数の微分 1（連鎖律）を用いるものとし, z_x, z_y, $\dfrac{dz}{dt}$ の 3 つを記せ.

(1) $f(x,y)=2x^3+3xy-y^2$, $\varphi(t)=e^{2t}$, $\psi(t)=e^{3t}$.

(2) $f(x,y)=3\cos(x-y)\sin(x+y)$, $\varphi(t)=t^2-1$, $\psi(t)=3t$.

15.15 函数

$$z=e^{xy}\sin(x+y),\quad \begin{cases} x=u+v \\ y=u-2v \end{cases}$$

から得られる合成函数 $z=g(u,v)$ について,

(1) 合成函数 $z=g(u,v)$ を具体的な形に求め, 合成函数の微分公式を使用しないで, $g(u,v)$ を u, v に関してそのまま微分することにより, 偏導函数 $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ.

(2) 上記の<u>合成函数の微分 2</u> を用いて計算し, (1) の結果と一致することを確かめよ.

15.16 次の 3 つの函数による合成函数 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ について $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ を求めよ. 但し, 方法は合成函数の微分 2（連鎖律）を用いるものとする.

(1) $f(x,y)=x^2-3y^2$, $\varphi(u,v)=u\cos v$, $\psi(u,v)=u\sin v$.

(2) $f(x,y)=xy^2$, $\varphi(u,v)=2u+v$, $\psi(u,v)=u-2v$.

15.17 陰函数 $2x^2+xy-y^2-x+y+2=0$ の $(x,y)=(1,3)$ における接線の方程式を求めよ.

15.18 $z=f(x,y)$ の偏導函数は x と y の組が指定されて定まるのであり, z_x は z, x だけでは定まらない[3]. このことを確認してみる.

$z=2x+y=x+(x+y)$ は $u=x$ $v=x+y$ により $z=u+v=x+v$ であるとも見られる.

(1) x と y の函数として z_x を求めよ.

(2) $x=u$ と v の函数として $z_x(=z_u)$ を求めよ.

[3] 偏導函数を計算する際, どの変数を固定した上でどの変数で微分するのか, が重要だからである. また, 数学の記号には細心の注意が必要であり, 意味を確実に理解して使用しなければならない, という教訓も得られる.

§ 16. Lagrange の未定乗数法

極値問題の解法を理解する. 基礎的な函数の極大値, 極小値を学ぶ.

定理 16.1 (Lagrange の未定乗数法). 点 (x, y) は曲線 $\varphi(x, y) = 0$ 上を動くとし, その曲線上に限れば $f(x, y)$ は, 点 (a, b) で極大または極小になるとする. いま, $\varphi_x(a, b) \neq 0$ または $\varphi_y(a, b) \neq 0$ であるとする. λ を定数として,

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)$$

とおく. このとき

$$\begin{cases} F_x(a, b, \lambda) = 0, \\ F_y(a, b, \lambda) = 0 \end{cases} \quad \text{即ち} \quad \begin{cases} f_x(a, b) - \lambda\,\varphi_x(a, b) = 0, \\ f_y(a, b) - \lambda\,\varphi_y(a, b) = 0 \end{cases} \tag{16.2}$$

を同時に満たす λ が存在する.

Lagrange の未定乗数法は, 極値を持つ点を絞り込むための方法で, 応用範囲が非常に広い. (但し, それが実際に極大値または極小値を持つかどうか判定するのは面倒なことが多い.)

次がその一例である（この種の問題は, 大学の入試問題としても出題される）.

例題 16.3 条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで $x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ.

解答 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $f(x, y) = x + 2y$ として, 16.1 を利用する. 点 (a, b) で極値をもつとすれば, $\varphi(a, b) = 0$ と (16.2) より

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 1 = 0, \\ \quad 1 - 2\lambda\,a = 0, \\ \quad 2 - 2\lambda\,b = 0 \end{cases}$$

となる. これを解いて,

$$(x, y, \lambda) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{（複号同順）}$$

これらの点では $x + 2y = \pm\sqrt{5}$. $\varphi(x, y) = 0$ を満たす点は円周上にあるので, 最大値と最小値を持つ. よって

$$(x, y) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ で最大値 } \sqrt{5},$$
$$(x, y) = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, -\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) \text{ で最小値 } -\sqrt{5}.$$

《高校までの解法》 $k = x + 2y$ とおいて, 条件から x を消去すると

$$(k - 2y)^2 + y^2 = 1. \quad \therefore\ 5y^2 - 4ky + k^2 - 1 = 0.$$

これが実数解を持つ条件は, 判別式 D が

$$D/4 = 4k^2 - 5(k^2 - 1) = -k^2 + 5 \geqslant 0$$

であること. つまり $-\sqrt{5} \leqq k \leqq \sqrt{5}$. よつて, 最大値は $\sqrt{5}$ で, 最小値は $-\sqrt{5}$. □

例題 16.4 条件 $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ のもとで $4xy$ の最大値と最小値を求めよ.

解答 $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1,\ f(x, y) = 4xy$
として (16.2) を利用する. 点 (a, b) で極値をもつとすれば, $\varphi(a, b) = 0$ と (16.2) より

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 - 1 = 0, \\ 4b - \lambda \cdot 2a = 0, \\ 4a - \lambda \cdot 4b = 0. \end{cases}$$

これを解くと $(a, b, \lambda) = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ または $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{1}{2}, -\sqrt{2})$ （複号同順）を得る.

$\varphi(x, y) = 0$ は xy 平面上の楕円を表すから, $f(x, y) = 4xy$ は必ず最大値と最小値を持つ. ゆえに

$$(x, y, \lambda) = (\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \pm\tfrac{1}{2},\ \sqrt{2})\ \text{（複号同順）}$$

のとき $4xy = \sqrt{2}$ で最大,

$$(x, y, \lambda) = (\pm\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mp\tfrac{1}{2},\ -\sqrt{2})\ \text{（複号同順）}$$

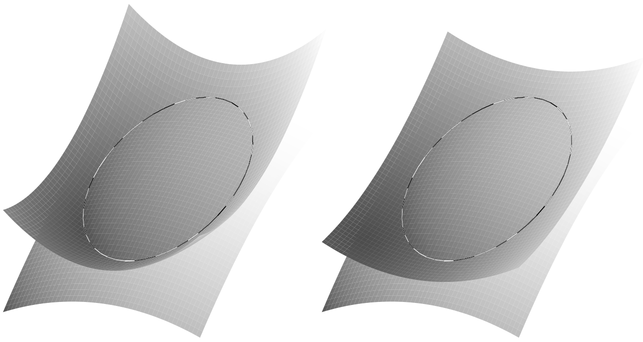
のとき $4xy = -\sqrt{2}$ で最小.

□

Lagrange の未定乗数法が成り立つ理由の直観的な説明. 16.1 の証明は, 後に述べることにして, 直観的な説明を述べる. 下の左右の図では, 2 枚の曲面が重なっている. 下側に描かれた上に凸な曲面は $z = f(x,y)$ の graph である. もう一つの凹んだ曲面（S と名付ける）は

$$z = F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\varphi(x,y)$$

の graph である. 2 つの曲面 $\varphi(x,y) = 0$（鉛直な筒状の曲面）と $z = f(x,y)$ （$f(x,y)$ の graph ）の共有点は, xyz 空間の曲線を描く. その曲線を C と呼ぶこととする. 図の中央部に見える楕円形の曲線が C に他ならない.



中央の楕円形の曲線が C である. 下に凸な曲面が $z = f(x,y) = F(x,y,0)$ を表し, 上に凸な曲面が異なる λ での $z = F(x,y,\lambda)$ を表している.

いま, roller coaster に乗つて C 上を動いてゐる状態を想像していただきたい. これが, 水平になる場所 $\mathrm{P}(a,b)$ を見付ければ, それが極値をとる点の候補である. 左右では λ の値が異なるから, 曲面 S の“反り具合”が異なる. しかし, どちらも, 曲面 $z = f(x,y)$ 上の点で $\varphi(x,y) = 0$ を満たす点が形づくる曲線 C を含む. λ の値が変化すると曲面 $z = F(x,y,\lambda)$ の反り具合が変化するが, ある λ においては, C の最も低いところ P （と最も高いところ[4]）では, S は水平な接平面を持つことが想像できる. このとき

$$F_x(a,b,\lambda) = 0, \quad F_y(a,b,\lambda) = 0 \tag{16.5}$$

が成り立つ. 一方, それ以外の C の点では, いかなる λ においても, S は決して水平な接平面を持ち得ない.

別の説明をしよう. C 上の 1 つの点を採り, λ を変化させるとき, その点の付近での S の動きを見ると, S は C を軸に回転する様な動きをする. 回転といつても, C は曲線なので, S はあたかも繊維生地の様なものだと想定されたい. ここで P における S の接平面を考えると, P においては, C の接線は水平だから, S は一瞬だけ, P で水平な接平面を持つ状態になる. そのとき, (16.5) の 2 式が同時に成り立つ. 従つて (16.2) が成り立つ. 一方, そうでない (つまり, 水平な接線を持たない) 点においては, λ をどう変化させても, その様なことは起らない！

[4] λ の値によつては, S が逆の反りを持つ様になるから.

証明（16.1 Lagrange の未定乗数法の） まず, $\varphi_y(a,b) \neq 0$ の場合に示す. 陰函数の定理から $\varphi(x,y)=0$ が定める x と y の関係, 即ち, 函数 $y=g(x)$ が $x=a$ の付近で存在し, $b=g(a)$ である. つまり, $z=\varphi(x,y)$ と $y=g(x)$ の合成函数（x には x を代入）を考えるとそれは恒等的に 0 である. このとき, 合成函数の微分 1（第 12 回）を使えば

$$\varphi_x(x,g(x))\frac{dx}{dx}+\varphi_y(x,g(x))\frac{dy}{dx}=0.$$

ゆえに（$\varphi_y(a,b)\neq 0$ も考慮して）

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x(x,g(x))}{\varphi_y(x,g(x))},\qquad g'(a)=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(a,b)}=-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}. \tag{16.6}$$

ここで, x の函数 $f(x,g(x))$ についても合成函数の微分法 1 を使うと

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x,g(x))&=f_x(x,g(x))\frac{dx}{dx}+f_y(x,g(x))\frac{dy}{dx}\\&=f_x(x,g(x))-\frac{\varphi_x(x,g(x))}{\varphi_y(x,g(x))}f_y(x,g(x))\quad(\because\ (16.6)\ \text{左の式}).\end{aligned}$$

一方, 仮定より, x の函数 $f(x,g(x))$ は $x=a$ で極値をとるから, その $x=a$ における微分係数は 0 である. 即ち, $\frac{d}{dx}f(x,g(x))|_{x=a}=0$. 従って（すぐ上の式で $x=a$ として）,

$$\begin{aligned}0&=f_x(a,b)-\frac{\varphi_x(a,b)}{\varphi_y(a,b)}f_y(a,b)\\&=f_x(a,b)-\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\varphi_x(a,b).\end{aligned} \tag{16.7}$$

ここで

$$\lambda=\frac{f_y(a,b)}{\varphi_y(a,b)}\quad\text{即ち}\quad f_y(a,b)-\lambda\varphi_y(a,b)=0 \tag{16.8}$$

とおくと, (16.7) と (16.8)（右の式）は求める式 (16.2) に他ならない.
$\varphi_x(a,b)\neq 0$ の場合は x と y の役割を入れ替えれば, 全く同様に示されるので, 省略する. □

演 習 問 題

16.9 次の問に答へよ.

(1) 条件 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=xy$ の最大値, 最小値を求めよ.

(2) 条件 $\varphi(x,y)=x^2+2y^2-1=0$ のもとで $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ の最大値, 最小値を求めよ.

§ 17. 高次偏導函数

定義 17.1 函数 $z = f(x,y)$ に関して, その偏導函数が存在して偏微分可能であるとき,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} = \boldsymbol{z_{xx}} = \boldsymbol{f_{xx}(x,y)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}} = \boldsymbol{z_{xy}} = \boldsymbol{f_{xy}(x,y)},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}} = \boldsymbol{z_{yx}} = \boldsymbol{f_{yx}(x,y)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \boldsymbol{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}} = \boldsymbol{z_{yy}} = \boldsymbol{f_{yy}(x,y)}$$

と記して, これらを第 2 次偏導函数と呼ぶ. (紅色の部分の順序が逆転することに注意.)

これに対して z_x と z_y を第 1 次偏導函数ともいう.

合成函数の高次偏導函数. 次の公式は, 合成函数の高次の偏導函数の扱ひ方に慣れるのに恰好の例である. (理工系の学生たる者は) この計算は一生に一回は必ずやっておくべきである.

例題 17.2 函数

$$z = f(x,y), \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

と, その合成函数 $z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを証明せよ.

解答 右辺を計算して左辺になることを示す証明も見受けられるが, 本来は左辺 ($f(x,y)$ の Laplacian（ラプラシアン） と呼ばれる) が最初にあるのだから, それを計算したら右辺になる, という証明が望ましい. その様に証明するためには, r と θ を x と y で

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\tfrac{y}{x}$$

と表しておき, 計算の過程で逐次 x, y を r, θ に置き換えてゆけばよい. 是非, 試して欲しい. □

次に, 2 次の偏導函数 z_{xy} と z_{yx} は, この両者が連続函数であれば一致すること[5] を説明する.

[5] 教科書 p.70, 定理 1.28

定理 17.3 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を定義域とする偏微分可能な函数 $z = f(x,y)$ について, z_{xy} と z_{yx} が存在して, どちらも D において連続であれば $\boldsymbol{z_{xy} = z_{yx}}$ が成り立つ.

証明 1 点 $(x,y) = (a,b) \in D$ において

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

を証明する. 十分小さい絶対値をもつ実数 h, k に対して[6)]

$$\Delta = f(a+h,b+k) - f(a,b+k) - f(a+h,b) + f(a,b)$$

とおき, これを 2 通りに計算する. そのために

$$\varphi(x) = f(x,b+k) - f(x,b),$$
$$\psi(y) = f(a+h,y) - f(a,y)$$

とおくと, 仮定より $\varphi(x)$ は微分可能で

$$\Delta = \varphi(a+h) - \varphi(a)$$

であるから, 平均値の定理により

$$\Delta = h\varphi'(a+\theta_1 h), \quad 0 < \theta_1 < 1$$

と書ける. さらに

$$\varphi'(a+\theta_1 h) = f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)$$

であるから, 再び平均値の定理から

$$\varphi'(a+\theta_1 h) = k f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k), \quad 0 < \theta_2 < 1$$

と書ける. ゆゑに

$$\Delta = hk f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

となる. $\psi(y)$ についても同様の推論で

$$\Delta = hk f_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k)$$
$$0 < \theta_3 < 1, \quad 0 < \theta_4 < 1$$

なる表示を得る. 従つて

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k).$$

ここで $h \to 0$, $k \to 0$ とすれば, $f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ の連続性より,

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

6) 2 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれる程度に小さいとする.

を得る. □

定義 17.4 (高次偏導函数) 函数 $z=f(x,y)$ の 3 次の偏導函数をすべて書けば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = f_{xxx}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2} = f_{xxy}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x} = f_{xyx}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x} = f_{xyy}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = f_{yxx}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y} = f_{yxy}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = f_{yyx}(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = f_{yyy}(x,y)
\end{aligned}
$$

となる. さらに高次の偏導函数も同様に定義される.

命題 17.5 高次導函数は, それが, ある領域 D で連続であれば, D においては, 偏微分の結果はその順序に依らないで定まる.
（例：$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}$.）

演 習 問 題

17.6 次の函数の第 1 次, 第 2 次偏導函数の全て（z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yx}, z_{yy}）を求めよ.

(1) $z = x^3 + 2xy + y^2$

(2) $z = \dfrac{1}{x^2 y}$

(3) $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$

(4) $z = e^{xy} \sin(x^2 + 2y^2)$

§ 18. 多変数函数の Taylor の定理と極値

18.1. 多変数函数の Taylor の定理

多変数函数の Taylor の定理. 2 変数函数についての Taylor の定理[7] を説明する.

補題 18.1 函数 $f(x,y)$ が偏導函数を持つとき, 次の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(a+ht,b+kt) &= hf_x(a+ht,b+kt)+kf_y(a+ht,b+kt)\\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a+ht,b+kt).\end{aligned}$$

つまり $\frac{d}{dt}$ と $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)$ がこの様な場合には, 同じ効果をもたらす.

証明 L L L L L L L L L L L □

いま $f(x,y)$ は何度でも（十分多くの回数）偏微分可能であるとすると, 18.1 を繰り返へすことにより,

$$\frac{d^j}{dt^j}f(a+ht,b+kt)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a+ht,b+kt). \tag{18.2}$$

ここで, $j=1$ は上の通りで $j=2,\,3$ 等について,

$$\begin{aligned}&\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\\ &=h^2f_{xx}(x,y)+2hkf_{xy}(x,y)+k^2f_{yy}(x,y),\\ &\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y)\\ &=h^3f_{xxx}(x,y)+3h^2kf_{xxy}(x,y)+3hk^2f_{xyy}(x,y)+k^3f_{yyy}(x,y)\end{aligned} \tag{18.3}$$

などとなる（2 項展開！）ことは, 容易に確かめられる.

定理 18.4 領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ を定義域とする函数 $z=f(x,y)$ は n 次までのすべての (高次) 偏導函数を持ち, それらが連続であるとせよ. また, 点 (a,b) と $(a+h,b+k)$ を結ぶ線分が D に含まれるとせよ. このとき

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)=&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)\\ &+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k),\end{aligned}$$

かつ $0<\theta<1$ なる θ が存在する. (これの $n=2,3$ の場合を (18.3) を使って自身で書き下すべき！)

[7] 教科書 p.85, $\ell.-1$〜 p.86, $\ell.1$

証明　$g(t)=f(a+ht,b+kt)$ に対して $t=0$ における Taylor の定理（の別形[8)]）を区間 $[0,t]$ に関して用いると

$$g(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}g^{(j)}(0)\,t^j+\frac{1}{n!}g^{(n)}(\theta t)\,t^n,\quad 0<\theta<1$$

となる θ が存在する．この式を (18.2) を使つて書き直し，$t=1$ とすれば所望の等式を得る． □

18.2.　極大，極小

注意 18.5　Taylor の定理 18.4 を $n=2$ の場合に書き下せば

$$\begin{aligned}f(a+h,b+k)&=f(a,b)+\frac{1}{1!}\big(f_x(a,b)h+f_y(a,b)k\big)\\&\quad+\frac{1}{2!}\big(f_{xx}(a+\theta h,b+\theta k)\,h^2+2f_{xy}(a+\theta h,b+\theta k)\,hk\\&\qquad+f_{yy}(a+\theta h,b+\theta k)\,k^2\big)\end{aligned}$$

となる．ここで，この色の部分（1 次部分），この色の部分（2 次部分）の 2 つの部分が $f(x,y)$ の極値を判定するのに重要である（次 page 以降で述べる）．
ちなみに，この色の部分は 0 次部分と呼ぶべきものである．

定義 18.6　2 変数の場合でも，函数 $f(x,y)$ について，ある点での値がその点の付近（その点からある小さい距離以内の範囲）で，最大（あるいは最小）であるとき，その点で **極大値**（あるいは，**極小値**）を持つとか，**極大**である（あるいは，**極小**である）といわれる．

2 変数函数の極値

補題 18.7　A, B, C は定数とし，$D=B^2-AC$ とおく．
実数の組 $(h,k)\neq(0,0)$ について

$$G(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

を考へる．このとき，次が成り立つ．
(1a) $D<0$, $A>0$ のとき，G は h, k の値によらず正である．
(1b) $D<0$, $A<0$ のとき，G は h, k の値によらず負である．
(2)　$D>0$ のとき，G は h, k の値により正にも負にもなり得る．

証明　(1a) のとき

$$G(h,k)=A\Big(h+\frac{B}{A}k\Big)^2+\frac{AC-B^2}{A}k^2>0$$

[8)] Taylor の定理 13.1 の c の代りに $c=a+(b-a)\theta$ なる θ を使うと，a と b の間に c がとれるという主張は $0<\theta<1$ と言い替えられる．しかも，この形の主張は，そのまま $a>b$ でも成立し，元の述べ方より使い易い．

である. (1b) も同様.
(2) $D > 0$ より A, B, C のいづれかは 0 でない. $A \neq 0$ のとき, 上記の第 1 項と第 2 項の符号が異なるので (h,k) の値により G は正にも負にもなり得る. 他の場合も同様になる. □

定理 18.8 領域 U で定義された函数 $z = f(x,y)$ が, すべての第 2 次偏導函数を持ち, それらは連続とする. 点 $(a,b) \in U$ において $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とし, 次の様におく :

$$A = f_{xx}(a,b),\ B = f_{xy}(a,b),\ \ C = f_{yy}(a,b),\ \ D = B^2 - AC.$$

このとき, 以下が成り立つ :
(1a) $D < 0$ かつ $A > 0$ のとき f は (a,b) で極小となる. (図 18.2)
(1b) $D < 0$ かつ $A < 0$ のとき f は (a,b) で極大となる. (図 18.2)
(2) $D > 0$ のとき f は (a,b) で極大でも極小でもない. (図 18.2)

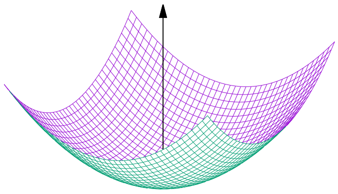


図 18.9 極小

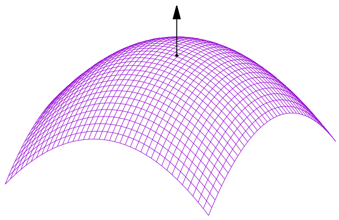


図 18.10 極大

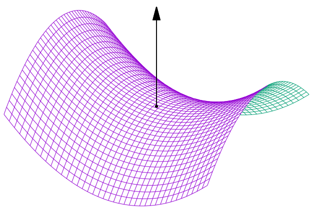


図 18.11 どちらでもない

証明 Taylor の定理から, 小さな h, k について,

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(A'h^2 + 2B'hk + C'k^2),$$
$$A' = f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k),\ B' = f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k),$$
$$C' = f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)$$

かつ $0<\theta<1$ なる θ が存在する. このとき, 第 2 次偏導函数がどれも連続であることから, $|h|$ と $|k|$ が十分小さければ, $B'^2 - A'C'$ ($= D'$ とおく) と A' の符号は D と A の符号に一致する.
(1a) この場合, $|h|$ と $|k|$ が十分小さいければ, $D' < 0$, $A' > 0$ なので, 補題 18.7 より $f(a+h,b+k)$ は $(h,k) = (0,0)$ で極大となる. 即ち $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極大

となる.

(1b) と (2) も同様に証明される. □

注意 18.12 $D = 0$ のときは, Taylor の定理で 3 次以上の項を調べないと判定できない.

例 18.13　$c > 0$ を定数とする. $z = f(x, y) = x^3 - 3cxy + y^3$ の極値を調べよ.

解答　偏導函数は

$$z_x = 3(x^2 - cy), \quad z_y = 3(y^2 - cx).$$

$z_x = z_y = 0$ を解くと $(x, y) = (0, 0)$, (c, c).

$$z_{xx} = 6x, \quad z_{xy} = -3c, \quad z_{yy} = 6y$$

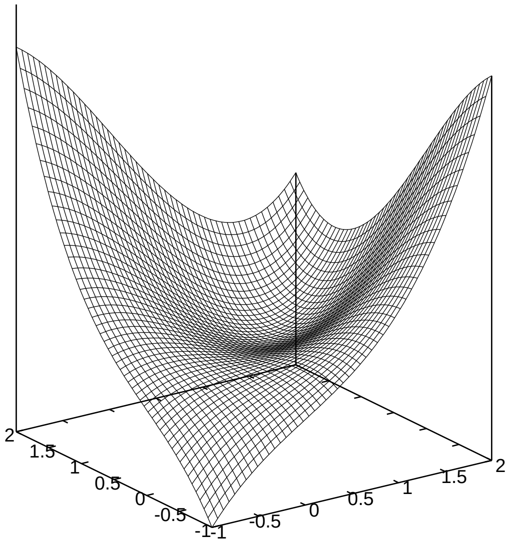
より $D(x, y) = 9(c^2 - 4xy)$.
(i) $(x, y) = (0, 0)$ のとき

$$D = 9c^2 > 0$$

より, 極値を取らない.
(ii) $(x, y) = (c, c)$ のとき

$$D = -27c^2 < 0, \quad A = f_{xx}(0, 0) = 6c > 0$$

より, 極小となる. 極小値は $-c^3$. □


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

注意 18.14　ほとんどの教科書では D の代りに

$$\begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix}_{(x,y)=(a,b)} = AC - B^2$$

を D としている (Hesse 行列式と呼ばれる) ので注意されたい.

演 習 問 題

課題 **17.6**　p.95 にある.

18.15　$z = f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 - 2x - 3y$ について, 次の問に答えよ.

(1)　z_x, z_y を求めよ.

(2)　$\{(x,y) \,|\, y > 0\}$ の範囲で $z_x = z_y = 0$ の解は唯一つしかない. その解を求めよ. 以後, その解を $(x,y) = (a,b)$ と記す.

(3)　$A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$ $(= f_{yx}(a,b))$, $C = f_{yy}(a,b)$ を求めよ.

(4)　上の A, B, C の値に基き, 函数 $z = f(x,y)$ は点 (a,b) で極値となるかどうか判定せよ.

18.16　次の函数の極値をすべて求めよ. $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ の解を全て記し, その中で極値を与えるものについては, 極大値なのか極小値なのかを記し, その極値も記せ.

(1)　$f(x,y) = x^2 - 5xy - 2y^2$.

(2)　$f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 3y^2 - x - y$.

(3)　$f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 + 4x - 2y$.

(4)　$f(x,y) = 3xy - x^{-1} + 9y^{-1}$.

(5)　$f(x,y) = x^3 - xy + \frac{1}{2}y^2$.

第 4 章　積分法

§ 19.　原始函数, 部分積分法, 置換積分法

1a 積分（1） 微分法の復習をし、不定積分、特に部分積分法による解法を学ぶ。

19.1.　原始函数

定義 19.1（原始函数, 被積分函数）函数 $f(x)$ に対し,

$$F'(x) = f(x)$$

となる函数 $F(x)$ を $f(x)$ の <u>原始函数</u> と呼び

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

と書く. このとき $f(x)$ はこの積分の <u>被積分函数</u> と呼ばれる. また, 簡単に $f(x)$ の <u>積分</u> は $F(x)$ である, といふことも多い. 原始函数を持つ函数は <u>積分可能</u> であるといはれる.

命題 19.2　与へられた函数 $f(x)$ の任意の 2 つの原始函数の差は定数函数である. 即ち, $F(x)$ を $f(x)$ の 1 つの原始函数とすれば, $f(x)$ の原始函数は, 定数 C により

$$F(x) + C$$

と表される.

証明　$F(x)$ と $F_1(x)$ を $f(x)$ の原始函数とすれば,

$$F'(x) = {F_1}'(x) = f(x).$$
$$\therefore\ F'(x) - {F_1}'(x) = \big(F(x) - F_1(x)\big)' = 0.$$

微分して 0 になる函数は定数函数だけであつた（定理 7.8(3) 7.8）から, 主張が示された. □

上のことから, 通常は 1 つの原始函数 $F(x)$ を使つて

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

と書く. この様なとき, C を <u>積分定数</u> と呼ぶことが多い.

積分の線形性, 線形性の応用

命題 19.3 （積分の線形性）原始函数を持つやうな函数 $f(x)$, $g(x)$ と任意の定数 k について, 次の 2 つの等式が成り立つ. 但し, この等式は両辺が定数の差を除いて等しいことを意味する.

(1) $\displaystyle\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx.$

証明 それぞれ, 両辺を微分して等しいことを確かめよ. その際, 6.9 (1), (2) を使ふ. □

命題 19.4 $f(x)$ の原始函数の 1 つを $F(x)$ とする. $a \neq 0$ のとき,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

証明 合成函数の微分法 8.1 により,

$$\frac{d}{dx}F(ax+b) = F'(ax+b)\frac{d}{dx}(ax+b) = F'(ax+b)\,a = a\,f(ax+b)$$

$a \neq 0$ だから, 19.3 (2) により, 与式を得る. □

$f(ax^2+bx+c)$ については, 19.4 の様な方法は使へない. つまり, 次の問の通りである.

問 **19.5** 次の積分の等式が誤りである理由（左辺と右辺が異なることの説明）を述べよ.

(1) $\displaystyle\int \sin(x^2+3x)\,dx = \frac{1}{2x+3}\sin(x^2+3x)+C$

(2) $\displaystyle\int e^{x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2x+3}\,e^{x^2+3x}+C$

例題 19.6 積分 $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ を計算せよ.

解答 半角の公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x+1)$$

を使つて 2 次式を 1 次式にすれば,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x+1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + x\right)+C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2x}+C$$

と計算できる. □

注意 19.7 数学の至るところで, 計算の際に次数を下げることが重要である. 次数を下げることを意識下におくと理解しやすいと思はれることが何ヶ所かある. その都度, 注意を喚起するつもりである.

原始函数の定義により, 微分法の公式から以下の様に, 原始函数を得る公式が得られる. この教科書をすべて理解したあとでの閲覧の便宜のため, 先の方で説明するものもここに記載しておく. 積分定数は省略する.

表 19.8　基本函数の原始函数

\	被積分函数 $f(x)$	原始函数 $\displaystyle\int f(x)\,dx$	備考
1	$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}\ x^{\alpha+1}$	
2	x^{-1}	$\log\|x\|$	
3	$\sin x$	$-\cos x$	
4	$\cos x$	$\sin x$	
5	$\tan x$	$-\log\|\cos x\|$	
6	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\log\|\sin x\|$	
7	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
8	e^x	e^x	
9	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$	
10	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	
11	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$	
12	$\sqrt{x^2+A}$	$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+A}+A\log\left\|\sqrt{x^2+A}+x\right\|\right)$	20.34 で説明
13	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}}$	$\log\left\|\sqrt{x^2+A}+x\right\|$	20.37 で説明
14	$\dfrac{1}{\sin x}$	$\log\left\|\tan\dfrac{x}{2}\right\|$	20.12 で説明
15	$\dfrac{1}{\cos x}$	$\log\left\|\dfrac{1-\sin x}{\cos x}\right\|,\quad \log\left\|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\|$	19.29 で説明
14	有理函数	必ず初等函数 (20.1(2) で説明) で記述される	20.2 で説明

問 19.9　次の等式を証明せよ（Hint : 逆三角函数の定義を思ひ出せ.）:

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

公式の 9 と 10 の結果の関係を上の式から納得しておくとよい.

演習問題

19.10 次の積分を求めよ．積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int (x^7 + 3x^2 + 5)\,dx$ 〔≒2.1 A1(1)〕

(2) $\displaystyle\int \sin(7x)\,dx$ 〔≒2.1 A1(4)〕

(3) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x}}\,dx$ 〔=2.1 A1(8)〕

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3x-1}}\,dx$

19.11 次の函数の原始函数を求めよ．積分定数には C を用いよ．

(1) $x^3 + 2x^2 - 1$ 〔=2.1 A1(1)〕

(2) $(3x-2)^3 + 2(3x-2)^2 - 1$

(3) $\displaystyle\frac{1}{3x-2} + \frac{1}{(3x-2)^2}$ 〔≒2.1 A1(3)〕

(4) $\sin(3x-2)$ 〔≒2.1 A2(4)〕

(5) e^{3x-2} 〔≒2.1 A2(1)(2)〕

(6) $(e^{2x} - e^{-2x})^2$ 〔=2.1 A1(3)〕

(7) $\sin^2 x$

(8) $\sin^2(3x+1)$

(9) $\cos^3 x$ （Hint: 3 倍角の公式）

(10) $\displaystyle\frac{1}{1+4x^2}$ 〔≒2.1 A3(1)(2)(3)〕

(11) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

19.2. 部分積分法

1b 積分（1） 微分法の復習をし、不定積分、特に部分積分法による解法を学ぶ。

定理 19.12 （部分積分法） $F(x)$ が函数 $f(x)$ の原始函数の 1 つであるとき,

$$\int \underset{\text{セ}}{f(x)}\, \underset{\text{ビ}}{g(x)}\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx.$$

証明 $F(x) = \displaystyle\int f(x)\, dx$ と $g(x)$ について, 積の微分法 6.9(3) から,

$$(F(x)g(x))' = f(x)g(x) + F(x)g'(x),$$
$$\therefore\ f(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x).$$

この両辺を積分すれば,

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx$$

となり, 成り立つ. □

注意 19.13 部分積分法で積分ができるか否かを見分ける骨（コツ）は, 与式を 2 つの函数の積に見立てて seesaw を思ひ浮べ,

$$(\text{与式}) = \int \underset{\text{セ}}{f(x)}\, \underset{\text{ビ}}{g(x)}\, dx$$

から一方を積分, 他方を微分した

$$\int F(x)\, g'(x)\, dx$$

が積分できるかどうかを見ればよい.

例題 19.14 次の積分を計算せよ.

$$\int \log x\, dx.$$

解答 部分積分法により

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \underset{\text{セ}}{1} \cdot \underset{\text{ビ}}{\log x}\, dx \\
&= x \log x - \int x (\log x)' dx \\
&= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= x \log x - \int 1\, dx \\
&= x \log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

となる. □

例題 19.15　次の積分を求めよ：

$$\int x\cos x\,dx.$$

解答　部分積分法により

$$\int \underset{\text{ビ}}{x}\underset{\text{セ}}{\cos} x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}$$

となる. □

次の様なやや異質な使ひ方もある.

例題 19.16　次の積分を求めよ：

$$\int e^x \sin x\,dx.$$

解答　部分積分を 2 回行ふと,

$$\begin{aligned}
\int \underset{\text{セ}}{e^x}\underset{\text{ビ}}{\sin} x\,dx &= e^x\sin x - \int \underset{\text{セ}}{e^x}\underset{\text{ビ}}{\cos} x\,dx \\
&= e^x\sin x - \left(e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\right) \\
&= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx.
\end{aligned}$$

よつて

$$\begin{aligned}
2\int e^x\sin x\,dx &= e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x \\
\therefore\ \int e^x\sin x\,dx &= \frac{1}{2}\left(e^x\sin x - e^x\cos x\right) \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

19.17　次の積分を部分積分法を用いて求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$　〔≒2.1 A4(3)〕

(2) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　〔= 2.1 A4(6)〕

(4) $\displaystyle\int (x+2)\cos x\,dx$　〔≒2.1 A4(5)〕

(5) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$

(6) $\displaystyle\int \log(2x+1)\,dx$

(7) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　〔= 2.1 A4(1)〕

(8) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx.$　〔= 2.1 A5(4)〕

(9) $\displaystyle\int e^{-x}\sin 2x\,dx.$　〔= 2.1 A5(5)〕

19.3. 置換積分法

2 積分（2） 置換積分法による解法を学ぶ。

合成函数の微分法を積分に焼き直すことで得られるのが, 置換積分法である.

定理 19.18 （置換積分法） $f(u)$ を区間 I で定義された連続な函数とする. さらに $\varphi(x)$ を区間 J で定義されて, その値域が I に含まれる連続函数とする. このとき $u=\varphi(x)$ といふ関係の元で,

$$\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

が成り立つ.

証明 $F(u)$ を $f(u)$ の原始函数とせよ. 即ち, $f(u)=F'(u)$ である. このとき, 合成函数の微分法（定理 8.18.1）により

$$\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(u)\frac{du}{dx}$$

であり, $F(u)=\displaystyle\int f(u)du$ なので,

$$\int f(u)du = F(u) = F(\varphi(x)) = \int F'(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx$$

となつて所望の式が得られた. □

この定理には, 2 つの使ひ方があると考へるのがよい.

使用法 1 もし $x=\varphi(t)$ とおいて, t の簡単な式になりさうなら,

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt \tag{19.19}$$

の様に左辺から右辺へ変形する.

使用法 2 もし x のある式を u とおくことで, 被積分函数が $f(u)\dfrac{du}{dx}$ と書けることに気付いたなら, 次の様に左辺から右辺へ変形する：

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)du. \tag{19.20}$$

例 19.21 積分を

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

$x=\tan t$ と置換して求めてみる：

$$\int \frac{1}{\tan^2 t+1}\frac{dx}{dt}\,dt = \int \frac{1}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt = \int dt = t+C = \tan^{-1}x+C$$

となる. これは使用法 1 (19.19) である.

例題 19.22 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx.$$

解答 $u = x^2+1$ とおくと, $\frac{du}{dx} = 2x$ であるから,

$$(\text{与式}) = \int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + C = \log(x^2+1) + C.$$

これは, 使用法 2 (19.20) である. □

例題 19.23 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx.$$

解答 <u>解 1.</u> 以下のうち囲みにした積分の計算で 方法 2 (19.20) を 1 回使つてゐる：

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx - \boxed{\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx} = \frac{-1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x} + C = \frac{-\cos x + 1}{\sin x} + C \\ &= \frac{1-\cos x^2}{\sin x\,(1+\cos x)} + C = \frac{\sin x}{1+\cos x} + C \quad \cdots\cdots \ (\text{答 } 1)\,.\end{aligned}$$

<u>解 2.</u> 以下の計算の理論的な背景を含めた詳細は第 20.5 節で説明するが, ここでも述べてみる. これはどちらかといへば (19.19) の使用法による. いま, $t = \tan\frac{x}{2}$ つまり $x = 2\tan^{-1} t$ とおくと,

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}2\tan^{-1} t = \frac{2}{1+t^2}$$

となるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int dt \\ &= t + C = \tan\frac{x}{2} + C \quad \cdots\cdots \ (\text{答 } 2)\end{aligned}$$

を得る. □

問 19.24 これら 2 つの結果（答 1）と（答 2）が一致することを直接に確認せよ.

ここで, 部分積分法, 置換積分法に対応する微分法の公式をまとめておく：

微分法	積分法
積の微分法	部分積分法
合成函数の微分法	置換積分法

これまでに説明したことの応用として以下の 19.25 及び 19.28 を述べておく.

例題 19.25 $n \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$I_n = I_n(x) = \int \cos^n x \, dx$$

とおく. これについて次の漸化式が成立することを示せ: 〔= 2.1 B2〕

$$(n+2)\, I_{n+2} = (n+1) I_n + \cos^{n+1} x \sin x. \tag{19.26}$$

注意 19.27 この公式は $n \in \mathbb{N}$ だけではなく $n \in \mathbb{Z}$ で成り立つことに注意.

解答 やや技巧的な変形を行ふ. $n \neq -1$ のとき,

$$\begin{aligned}
I_n(x) &= \int \cos^{n+2} x \, dx = \int (\cos^n x)(1 - \sin^2 x) dx \\
&= \int \cos^n x \, dx - \int \cos^n x \sin^2 x \, dx \\
&= \int \cos^n x \, dx - \int (\cos^n x \sin x) \sin x \, dx \\
&= \int \cos^n x \, dx - \int \left(\frac{-1}{n+1} \cos^{n+1} x \right)' \sin x \, dx \\
&= \int \cos^n x \, dx + \frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x \sin x - \frac{1}{n+1} \int \cos^{n+1} x \cos x \, dx \\
&= I_n + \frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x \sin x - \frac{1}{n+1} I_{n+2}.
\end{aligned}$$

これにより (19.26) を得る. $n = -1$ のとき (19.26) は $I_1(x) = \sin x + C$ を意味するが, これは正しい. これで証明ができた. □

これを使つた計算の例を挙げておく.

例 19.28 $n \geqq 0$ のときは (19.26) を

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n + \frac{1}{n+2} \cos^{n+1} x \sin x$$

の形で使つて

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int dx = x, \quad I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x, \\
I_2 &= \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} \cos x \sin x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cos x \sin x, \\
I_3 &= \frac{2}{3} I_1 + \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x = \frac{2}{3} \sin x + \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x, \\
I_4 &= \frac{3}{4} I_2 + \frac{1}{2} \cos^3 x \sin x = \frac{3}{4} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^3 x \sin x + \frac{1}{4} x, \\
&\cdots
\end{aligned}$$

といふ具合に順次得られる.

$n<0$ の場合は, I_{-1} を計算した上で (19.26) を

$$I_n = \frac{n+2}{n+1} I_{n+2} - \frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x \sin x \quad (n \leqq -2)$$

の形で使へば（積分定数は省略する）,

$$\begin{aligned}
I_{-1} &= \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}(-\log|1-\sin x| + \log|1+\sin x|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right| = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|, \\
I_{-2} &= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x, \\
I_{-3} &= \frac{1}{2}I_{-1} + \frac{1}{2}\cos^{-2}x \sin x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \frac{1}{2}\cos^{-2}x\sin x, \\
I_{-4} &= \frac{2}{3}I_{-2} - \frac{1}{-3}\cos^{-3}x\sin x = \frac{2}{3}\tan x + \frac{1}{3}\cos^{-3}x \sin x, \\
I_{-5} &= \frac{3}{4}I_{-3} + \frac{1}{4}\cos^{-4}x\sin x \\
&= \frac{3}{8}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \frac{3}{8}\cos^{-2}x\sin x + \frac{1}{4}\cos^{-4}x\sin x, \\
&\cdots.
\end{aligned} \tag{19.29}$$

例題 19.30 上と同様な計算が次の積分についてもできるが, 詳細は読者に任せる :

$$J_n = J_n(x) = \int \sin^n x\,dx.$$

演 習 問 題

19.31 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$ 〔≒2.1 A3(3)〕

(3) $\displaystyle\int 2xe^{x^2+1}dx$ 〔≒2.2 A1(9)〕

(4) $\displaystyle\int 2x\cos(x^2+1)\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

(6) $\displaystyle\int 2x\tan x^2\,dx$

19.32 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+3}dx$ 〔≒2.2 A1(8)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{2e^{2x}-3e^x}{e^{2x}-3e^x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \log(x^2+1)\,dx$ 〔=2.2 A2(3)〕

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x+3}dx$
（Hint : $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換. ）

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x+\sin x+1}dx$（Hint : 同上. ）

§ 20. 有理函数, 三角函数の有理函数, 無理函数の積分

3 積分（3）部分分数展開による有理関数の不定積分の計算法を理解する。

20.1. 函数の分類

微分積分学に主に登場する函数の分類をしておく.

定義 20.1 （再掲）以下の様に函数を分類する.

(1) 2 つの多項式の商として表される函数を 有理函数 と呼ぶ.

(2) 有理函数, 冪乗根, 指数函数, 対数函数, 三角函数, 逆三角函数の有限回の和差積商および合成によつて表される函数を, 初等函数 と呼ぶ.

(3) 初等函数ではあるが, 有理函数, 冪乗根の有限回の和差積商および合成によつては表し得ない函数を, 初等超越函数 と呼ぶ.

微分積分学は, これらの函数を扱ふ理論であるともいへる.

20.2. 有理函数の積分 1

この節では有理函数の積分法を学ぶ. 基本的な方針は**次数下げ**である：

—. 分子については, 除法で次数下げ；

—. 分母については, 部分分数分解 によつて次数下げ.

定理 20.2 有理函数の原始函数は初等函数の 有限な表示 を持つ.

一般的に説明する前に, いくつか例を述べる.

例題 20.3 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-3x+2}\,dx.$$

解答 始めに被積分函数を部分分数に分ける： ~~(先に除算をすると手間が増える)~~

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^3+2}{x-2} - \frac{x^3+2}{x-1} \quad (\text{分母の次数下げ})\\ &= \left(x^2+2x+4+\frac{10}{x-2}\right) - \left(x^2+x+1+\frac{3}{x-1}\right) \quad (\text{分子の次数下げ})\\ &= x+3+\frac{10}{x-2}-\frac{3}{x-1}.\end{aligned}$$

よつて

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^3+2}{(x-1)(x-2)}\,dx\\ &\quad = \frac{1}{2}x^2+3x+10\log|x-2|-3\log|x-1|+C\end{aligned}$$

となる. □

例題 20.4 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx.$$

解答 分母の次数を下げるために,

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

を満たす A, B, C を求める. 分母を払つて

$$1 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

これに $x=0,\ x=1,\ x=2$ を代入すれば, (なぜ, これらを代入して良いのか説明せよ.)

$$1 = 2A, \quad 1 = -B, \quad 1 = 2C.$$

$$\therefore A = \frac{1}{2}, \quad B = -1, \quad C = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x-2)}.$$

$$\therefore \int \frac{1}{x(x-1)(x-2)}\,dx = \frac{1}{2}\log|x| - \log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x-2| + C$$

となる. □

例題 20.5 次の積分を計算せよ.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx.$$

解答 被積分函数を部分分数に分けるため,

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2}$$

とおいて A, B_1, B_2 を求めると $A = B_1 = B_2 = 1$ を得る. よつて

$$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= \log|x-1| + \log|x-2| - \frac{1}{x-2} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る. □

例題 20.6

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3}\,dx$$

解答 被積分函数について

$$\frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1}{x-2} + \frac{C_2}{(x-2)^2} + \frac{C_3}{(x-2)^3}$$

を満たす $A, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3$ を求めることにより

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3} \\ &= -\frac{1}{8x} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{17}{8}\frac{1}{x-2} - \frac{5}{4}\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

を得る．よつて

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{x(x-1)^2(x-2)^3}\,dx \\ &= -\frac{1}{8}\log|x| - 2\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{17}{8}\log|x-2| + \frac{5}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x-2)^2} + C \end{aligned}$$

となる． □

注意 20.7 20.2 の逆, つまり原始函数が初等函数の有限個の“組合せ”で書けるか否かについての被積分函数に対する 1 つの判定法が Liouville（リューヴィユ）の定理として知られてゐる（証明は難しい）．ここでは詳しく述べられない．

演 習 問 題

20.8 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x+1}\,dx$ 〔≒2.1 A(5)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{x-2}\,dx$ 〔≒2.1 A(5)〕

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{(x+1)(x-2)}\,dx$ （Hint：(1), (2) を利用してよい．）

(4) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+5}{(x+1)^2}\,dx$

20.3. 当講義の内容を俯瞰

ここで, 気が楽になる様に, 当講義で何を身につければ良いか, まとめておく.

積分の計算の大きな目的は, 曲線の長さや, 曲つた図形の面積, 立体の体積などの値を求めることではあるが, 原始的な測量の様な方法を使ふ訳ではない. 特筆すべきことは, 計算の途中が極めて“代数的”にできることであつて, そのお陰で, 完全に正確な値が得られるのである. 一般に

$$\int f(x)dx$$

とは書くものの, $f(x)$ の式の形を, 繊細な目で見つめることが重要なのである.

以下のことが身につけられれば, 当講義の内容を把握したと考へてよい.

積分の方法:

1. 基本的な函数の単純な積分公式 (表 19.8)

2. 汎用性のある公式(“縦糸”)

(2a) 部分積分法(定理 19.12)

$$\int \underset{\text{セ}}{f(x)}\underset{\text{ビ}}{g(x)}\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

(2b) 置換積分 1 型(方法 (19.19)) $\displaystyle\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx$ だと見切る場合

(2c) 置換積分 2 型(方法 (19.20))
別の変数 t を取って $\displaystyle\int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt}\,dt$ と変換する場合

3. 特殊な方法(“横糸”)

(3a) 有理函数の積分
(必ずできる. 分子は除法で次数下げ. 分母は部分分数分解で次数下げ. 第 20.2 節)

(3b) $\displaystyle\int \big(\sqrt{ax+b}$ と x の有理式$\big)\,dx$ の型.
$\sqrt{ax+b} = t$ とおけば (3a) に帰着する. 第 20.7 節.

(3c) e^x のみの有理函数は $t = e^x$ とおくと (3a) に帰着する.

(3d) $\sin x$ と $\cos x$ の有理式は $t = \tan\frac{x}{2}$ とおけば (3a) に帰着する.

(3e) $\displaystyle\int \big(\sqrt{ax^2+bx+c}$ と x の有理式$\big)\,dx$ の型.
第 20.8 節で説明する方法により (3a) に帰着する.

(3f) その他の非常に特殊なものもある(旧教科書の p.105, 2.3[A]2(3)(4) など)

20.4. 有理函数の積分 2

分母が 1 次式の積には因数分解されないときの方法を説明する. まず, 基本的な公式 :

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + C, \qquad \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log|x^2+1| + C$$

を確認しておいて頂きたい.

例題 20.9 積分を求めよ :

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\, dx.$$

解答 まず, 被積分函数を部分分数分解する. 即ち

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

とおいて定数 A, B, C を求める. ここで, なぜ第 2 項の分子を定数にしないで 1 次式にするのかを考へよ. その結果,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}$$

となる. よつて

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\, dx = \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{4} \log|x^2+1| + C$$

となる. □

例題 20.10 積分を求めよ :

$$\int \frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\, dx.$$

解答 被積分函数を部分分数分解する. 即ち

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2}$$

を満たす $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ を求める. 結果は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{4(x-1)^3} - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{-x+1}{4(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \log|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{1}{4} \log|x^2+1| \\ &\qquad + \frac{1}{8(x^2+1)} + \int \frac{1}{4(x^2+1)^2}\, dx. \end{aligned}$$

この最後の項は手間が掛かるが,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \tan^{-1} x - \int \frac{x}{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \tan^{-1} x + \frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \tan^{-1} x + \frac{x}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C \\ &= \frac{1}{2}\tan^{-1} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C'\end{aligned}$$

となる. 以上をまとめて

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{8(x-1)^2} - \frac{1}{4}\log|x^2+1| \\ &\qquad + \frac{1}{8(x^2+1)} + \frac{1}{8}\tan^{-1} x + \frac{x}{8(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

□

20.2 の証明を詳しく知りたい場合は一松信著 「微分積分入門第 1 課」を見よ（互除法を使ふ）.

演 習 問 題

20.11 積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)(x-3)}\,dx$ 〔≒2.3 A1(1)(2)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x-1)}\,dx$ 〔≒2.3 A1(3)〕

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)^2\,(x^2+x+1)}\,dx$

20.5. cos x と sin x の有理式の積分など

u と v の有理式 $R(u,v)$ について, 積分

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

は $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換することで t の有理式の積分になる. 実際,

$$\begin{aligned}(u=)\ \cos x &= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\\ (v=)\ \sin x &= \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(2\tan^{-1}t) = \frac{2}{1+t^2}\end{aligned}$$

であるから

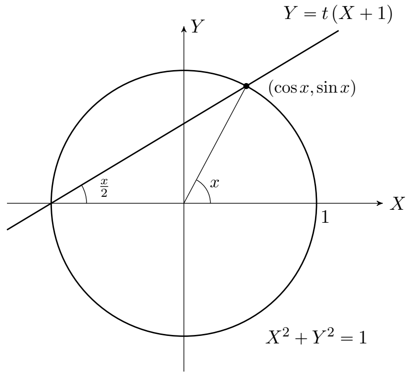
$$(\text{与式}) = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり, 被積分函数は t の有理式の積分である.

この置換の idea は, 非常に味はひ深い. 右図で $t=\tan\frac{x}{2}$ である. 点 $(\cos x, \sin x)$ の座標は連立方程式

$$\begin{cases} X^2+Y^2=1,\\ Y=t\,(X+1)\end{cases}$$

の解 (X,Y) のうち $(-1,0)$ でないものに他ならない. それは a priori に t の有理式である.



例題 20.12 次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{\sin x}dx.$$

解答 (方法 1) $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換して,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C\\ &= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}\end{aligned}$$

(方法 2) 分母子に $\sin x$ を掛けて変形することでもできる. □

例題 20.13 次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,dx.$$

解答 (方法 1) $t=\tan\frac{x}{2}$ と置換して,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{t+1} + C = \frac{1}{1+\tan\frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

(方法 2) 分母子の $1-\sin x$ を掛けて

$$(\text{与式}) = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C$$

となるが, この方法は一般性がない. □

例題 20.14　次の積分を求めよ：

$$\int \frac{1}{3+\cos x}\,dx.$$

解答　$t=\tan\frac{x}{2}$ と置換して，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan\frac{x}{2}\right)+C
\end{aligned}
$$

となる．□

三角函数を含んだ積分計算の別の例を挙げる．

例題 20.15　次の積分を求めよ：

$$\int \sin 5x\,\cos 4x\,dx.$$

解答　この形は積和の公式を用いて次数を下げればよい．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{2}\bigl(\sin(5x+4x)+\sin(5x-4x)\bigr)\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}\bigl(\sin(9x)+\sin x\bigr)\,dx = -\frac{1}{18}\cos(9x)-\frac{1}{2}\cos x+C
\end{aligned}
$$

となる．□

演習問題

20.16　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\,(1+\cos x)}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1-2\sin x+\cos x}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\sin x-\cos x}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$　〔$\fallingdotseq$ 2.2 A1(14)〕

(5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx.$　〔$\fallingdotseq$ 2.2 A1(16)〕

(6) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx.$　〔$=$ 2.2 A2(1)〕

(7) $\displaystyle\int (\sin x)\log|\sin x|\,dx.$〔$=$ 2.2 A2(4)〕

20.17　次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \sin 4x\,\cos 5x\,dx.$　〔$=$ 2.1 A5(2)〕

(2) $\displaystyle\int \cos 7x\,\cos 3x\,dx.$　〔$=$ 2.1 A5(3)〕

20.18　次の積分を求めよ．

$$\int \frac{x}{1+\cos x}\,dx.$$

（Hint：部分積分と $t=\tan\frac{x}{2}$ による置換．）

20.6.　指数函数を含む積分

指数函数 e^x の有理式は $u=e^x$ とおくことで積分できる.

例題 20.19　次の積分を求めよ:

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx.$$

解答　$u=e^x$ とおくと $x=\log u$, $\dfrac{dx}{du}=\dfrac{1}{u}$ なので,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{u+u^{-1}}\frac{dx}{du}\,du = \int \frac{1}{u+u^{-1}}\frac{1}{u}\,du\\ &= \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \tan^{-1}u + C = \tan^{-1}e^x + C\end{aligned}$$

となる. □

有理式でない場合の例も挙げておく.

例題 20.20　次の積分を求めよ:

$$\int \sqrt{e^x-1}\,dx.$$

解答　$u=\sqrt{e^x-1}$ とおくと, $x=\log(u^2+1)$ で $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{2u}{u^2+1}$ なので,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int u\frac{2u}{u^2+1}\,du = \int \frac{2u^2}{u^2+1}\,du\\ &= \int \left(2-\frac{2}{u^2+1}\right)du = 2u-2\tan^{-1}u+C\\ &= 2\sqrt{e^x-1}-2\tan^{-1}\sqrt{e^x-1}+C\end{aligned}$$

となる. もし $t=e^x$ として計算を始めても結局, この置換に誘導されるであろう. □

演 習 問 題

20.21　次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{e^x-e^{-x}}\,dx.$　〔$=$ 2.2 A1(13)〕

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+e^x}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{e^x+1}\,dx.$　〔$=$ 2.2 B2(1)〕

(4) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx.$

20.7. 無理函数の積分 1

あいまひな謂(いひ)ではあるが, 根号を含んだ函数を 無理函数 といふ.

命題 20.22 a と b は定数で, $R(x,y)$ は x と y の有理式であるとする. このとき

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})\, dx$$

は $t = \sqrt{ax+b}$ と置換することで, t の有理式の積分に変換できる.

これの証明は述べないで, 例を挙げるに止める.

例題 20.23 次の積分を求めよ:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx.$$

解答 $t = \sqrt{2x+3}$ とおくと $x = \dfrac{t^2-3}{2}$, $\dfrac{dx}{dt} = t$ であるから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\, dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-3}{t}\cdot t\, dt = \frac{1}{2}\int (t^2-3)\, dt \\ &= \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t + C = \frac{1}{6}(2x+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(2x+3)^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{\sqrt{2x+3}\,(x-3)}{3} + C \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}\end{aligned}$$

となる. □

注意 20.24 より一般に u, v の有理式 $R(u,v)$, 自然数 n, 定数 a, b, c, d について,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$$

は, 次の置換により t の有理式の積分に変換される:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

但し, もちろん $(c,d) \neq (0,0)$ とする.

演 習 問 題

20.25 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{2x-5}\, dx.$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\, dx.$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\left(1-\sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}\right)}\, dx.$

(Hint : $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x}}$ とおくと,

$(\text{与式}) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \left(\frac{1}{(t-1)^2} - \frac{1}{t^2+t+1}\right) dt.$)

20.8. 無理函数の積分 2

ここが後期の講義の中で, 最も高級な部分である. $R(x,y)$ は x と y の有理式であるとする. このとき

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\big)\,dx$$

を積分する方法を解説する. これには, 以下の事実を利用する.

2 次曲線の有理一意化の原理

(1) 陰函数表示 $y^2 = ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ で表される曲線 C 上に 1 点 A を取つて固定し, C とそこを通る直線 ℓ とのもう一つの交点の座標 $(x,y) = (x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)$ は, この直線の傾き t の有理式になる.

(2) C が双曲線の場合は A として無限の遠方にある点を選び, 傾きの代りに y 軸などの切片の座標を t としても同様のことが成り立つ.

これを一般的に述べると返つてわかりづらいので, いくつかの例を示しつつ述べていく.

例題 20.26

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

解答 この問題では

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \tag{20.27}$$

とおくとよい. (理由は以下の 20.28 に述べてある.) このとき

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

であり,

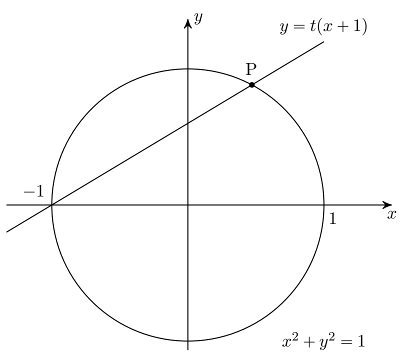
$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,dt = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt \\
&= \int \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \log|t-1| - \log|t+1| + C \\
&= \log\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1\right| - \log\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1\right| + C \\
&= \log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\right| + C = \log\left|\frac{(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\,)^2}{2x}\right| + C \\
&= \log\left|\frac{2-2\sqrt{1-x^2}}{2x}\right| + C = \log\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C
\end{aligned}$$

と積分できる. □

注意 20.28 20.26 の問題において, 安直に

$$y = \sqrt{1 - x^2} \tag{20.29}$$

と置換積分してみても, 有理化はされず, 積分はできない（試してみよ）.
以下, 上の置換 (20.27) の idea を説明する. (20.29) は単位円の上半分を表し, 点 $(-1,0)$ を通る. いま新たに変数 t をとり, $(-1,0)$ を通つて, 傾き t の直線を考へて, その交点 P の x 座標が積分の変数 x だと見做し, x を t の式で表してみる. 同時に P の y 座標も t の式で表される. 具体的には次の連立方程式を解けばよい:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \quad y = t(x+1). \end{cases}$$

ここで重要なのは, 次の様な考察からこの方程式を解かなくても（a priori に）この解 (x,y) は t の有理式になることを予見できることである. 実際, y を消去すれば x の 2 次方程式になる. もし, 解に本質的に根号 $\sqrt{}$ が必要となるならば, そこには $\pm\sqrt{}$ の形で 2 つの解が現れる. しかし, そもそも, 一方の解が $x = -1$ であることはわかつてゐるので, 根号は現れ得ない. つまり t の有理式となる[1].

少し一般化して, 楕円とその上の定点を通る直線の交点を考へやう. 具体的には

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = t(x+a) \quad \text{（定点 $(a,0)$ を通る）} \end{cases} \tag{20.30}$$

の解 (x,y) は t の有理式になることが, 同様な考察により予見できる.

さらに, 双曲線に関しても

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = \dfrac{b}{a}x - t \quad \text{（傾きが漸近線と同一）} \end{cases} \tag{20.31}$$

の解 (x,y) も t の有理式になることが, この方程式を解かなくても予見できる. 図 20.32 から, 理由を見出して欲しい[2]. あまり利用されないが,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = t(x+a) \quad \text{（定点 $(-a,0)$ を通る）} \end{cases}$$

の交点の座標は t の有理式になる. 次 page の図を参考に理由を考へていただきたい.

---

[1] 一般に, 一意化や有理化（媒介変数表示）は深い考察に基く.「志村・谷山予想」も驚くべき方法での一意化が可能であることを主張するものであつた.

[2] この場合は (20.30) の「定点」に相当する点が無限遠にあるとも考へられる.

図 20.32　双曲線の有理一意化 (1)

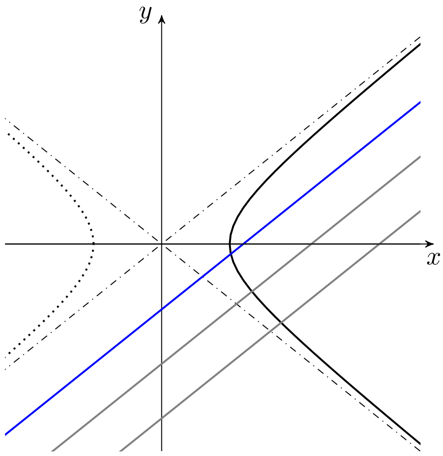
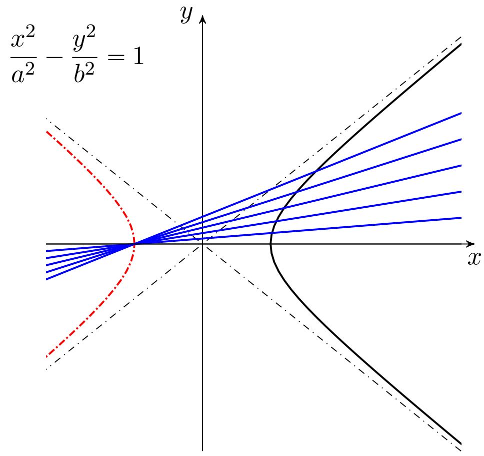


図 20.33　双曲線の有理一意化 (2)



ここで (20.31) の考へを使つて例題を解いておく.

例題 20.34　実数 A について

$$\int \sqrt{x^2 + A}\, dx$$

を求めよ.

解答　$\sqrt{x^2+A} + x = t$ とおくと

$$x^2 + A = (t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2.$$

$$\therefore\ 2tx = t^2 - A,$$

$$x = \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{A}{t}\right).$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{t^2}\right) = \frac{t^2 + A}{2t^2}$$

このとき

$$\sqrt{x^2 + A} = t - x = t - \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{t^2 + A}{2t}.$$

ゆゑに

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{(t^2+A)^2}{4t^3} dt = \frac{1}{4}\int \left(t + \frac{2A}{t} + \frac{A^2}{t^3}\right) dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2 + 2A\log|t| - \frac{A^2}{2t^2}\right).\end{aligned} \tag{20.35}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+A}+x} = \frac{\sqrt{x^2+A}-x}{A}, \\ \therefore\ \frac{A}{t} &= \sqrt{x^2+A} - x.\end{aligned}$$

よつて (20.35) の最後について, 第 1 項と第 3 項の和は

$$\frac{1}{8}\left(t^2-\frac{A^2}{t^2}\right)=\frac{1}{8}\left((\sqrt{x^2+A}+x)^2-(\sqrt{x^2+A}-x)^2\right)=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+A}$$

となり, 最終的には

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+A}+A\log\big|\sqrt{x^2+A}+x\big|\big)+C.$$

ここで,

$$\frac{A}{\sqrt{x^2+A}-x}=\sqrt{x^2+A}+x$$

なので

$$(\text{与式})=\frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+A}-A\log\big|\sqrt{x^2+A}-x\big|\big)+C'$$

とも書けることに注意して欲しい. また, <u>双曲線函数</u>を学べば, より理解が深まるだらう. □

この計算はたいへんだつたので, 結果は公式として記憶されることをお勧めする.

(20.36)
$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+A}\,dx&=\frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+A}+A\log\big|\sqrt{x^2+A}+x\big|\big)+C\\&=\frac{1}{2}\big(x\sqrt{x^2+A}-A\log\big|\sqrt{x^2+A}-x\big|\big)+C'.\end{aligned}$$

例題 20.37 次の積分を求めよ：

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx.$$

解答 上と同じく, $\sqrt{x^2+A}+x=t$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\int\frac{2t}{t^2+A}\frac{t^2+A}{2t^2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt\\&=\log|t|+C=\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|+C.\end{aligned}$$

を得る. □

これも公式として記憶されることをお勧めする.

(20.38)
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,dx=\log\left|\sqrt{x^2+A}+x\right|+C.$$

以上の説明に基き, 方法のみをまとめれば, 次の様になる.

20.39 単独の 2 次式の平方根を含む積分の求め方.
$R(x, y)$ が x, y の有理式であるとき, 以下の方法で

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\right) dx$$

は t の有理積分の形に変形される：

(1) $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される場合は

$$\sqrt{\frac{a(x-\alpha)}{x-\beta}} = t,$$

(2) $a>0$ ならば

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x = t$$

とおけ. ただし, 上記 (1) と (2) は互ひに排反ではない. 即ち $a>0$ で $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解される場合は, (1) と (2) の双方が使へる.

くどいかも知れないが, もう 1 題だけ提示しておく.

例題 20.40 次の積分を求めよ：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(1-x)}}.$$

解答 上の説明 (1) に従つて $t = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$ とおくと $x = -\dfrac{2t^2+1}{t^2+1}$ となる. 従つて

$$\sqrt{(x+2)(1-x)} = (x+2)\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} = \left(-\frac{2t^2+1}{t^2+1}+2\right)\cdot t = \frac{t}{t^2+1},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2t}{(t^2+1)^2}$$

である. よつて

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{t^2+1}{t}\cdot\frac{-2t}{(t^2+1)^2}dt = -\int\frac{2}{t^2+1}\,dt \\ &= -2\tan^{-1}t + C = -2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x+2}} + C \quad \cdots\cdots \text{ Ans.}\end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

20.41 積分を求めよ. 〔≒2.3 B2〕

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(1-x)}}$

(2) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}\,dx$

4 積分（4）定積分の定義を確認して、微分積分学の基本定理を理解する。図形の面積を求める。

§ 21. 微分積分学の基本定理, 面積

21.1. 定積分

閉区間 $[a, b]$ を次の様な小区間に分割する：

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

これを, 以下, 簡単に分割 Δ と称し, $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ $(i = 1, \cdots, n)$ と書く. また $|\Delta| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leqq i \leqq n\}$（小区間の幅の最大値）と記し, Δ の目と称する. さらに, 各 $[x_{i-1}, x_i]$ から一つづつ任意に値を取り出して ξ_i と記す. ここで, 我々が示したいのは, 次の事実である.

定理 21.1 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続函数 $f(x)$ について, 極限値

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

が存在する. ここで, 極限の意味は以下で説明される. この極限においては, もちろん n は無限に大きくなつていく.

証明 $f(x)$ は連続だから, 各小区間 $[x_0, x_1]$ 上の最小値 m_i と最大値 M_i が存在する.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i.$$

ここで, 左辺, 中辺, 右辺を図示したものが次 page の 3 つの図であり, それぞれ, 図 21.5, 図 21.6, 図 21.7 に対応する. ここで, Δ を細かくするにつれて, 左辺は増大し, 右辺は減少する. また, 不変と左辺の差は, $\{M_i - m_i \mid 1 \leqq i \leqq n\}$ の最大値 d の $b-a$ 倍以下である. $|\Delta| \to 0$ のとき $d \to 0$ であるから, 左辺と右辺の差は 0 に限りなく近付く. 以上のことから, $|\Delta| \to 0$ のとき, 各辺は一定の値に限りなく近づく. □

定義 21.2 上の極限値を

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx \tag{21.3}$$

と書いて, $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における定積分と呼ぶ.

$a \geqslant b$ の場合には定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{21.4}$$

定義する. 特に $a = b$ の場合はこの値は 0 である.

図 21.5　定積分の定義

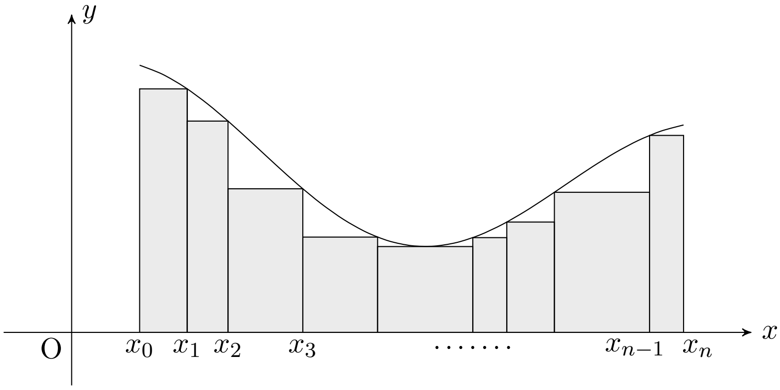


図 21.6　定積分の定義

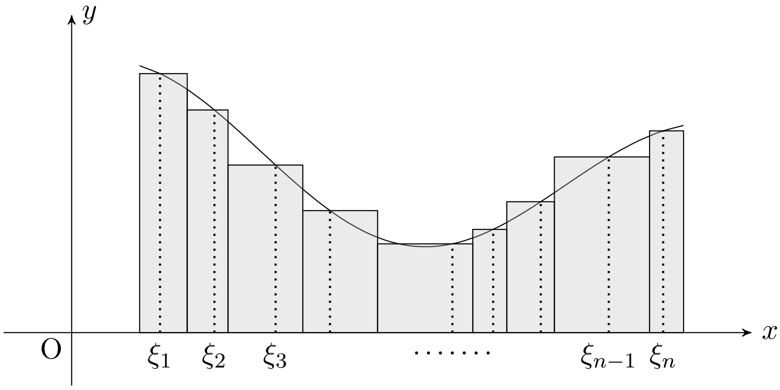
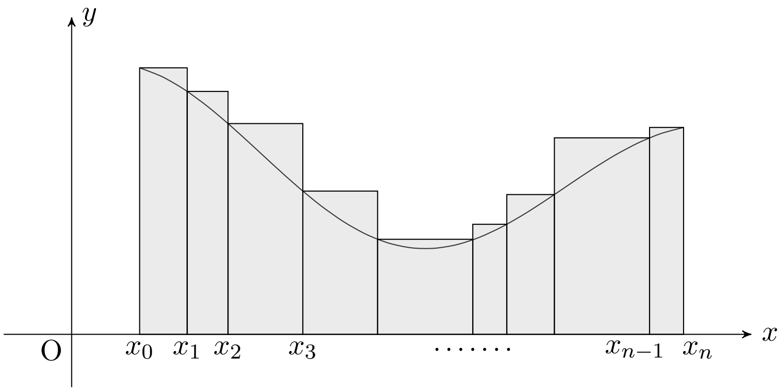


図 21.7　定積分の定義



注意 21.8　（面積）連続函数 $f(x)$ について, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分のうち, $y \geqq 0$ なる部分の面積を S_+ とし, $y \leqq 0$ なる部分の面積を S_- とすると, (21.3) の値は $S_+ - S_-$ を与える[3].

[3] ここでは, 「数学的に厳密に面積とは何か」を問はないで直観的な理解で済ませる.

5 積分（5）定積分の計算、特に、区分求積法、部分積分法、置換積分法を用いた初等関数の積分計算を学ぶ。

21.2. 微分積分学の基本定理

ここまでの流れでは, 原始函数と定積分は全く無関係な概念である. しかし, それが表裏一体の関係にあることを主張するのが次の 微分積分学の基本定理 である.

定理 21.9 （微分積分学の基本定理）連続函数 $f(x)$ は原始函数を持つ. その 1 つを $F(x)$ と記すとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \Big[F(x) \Big]_a^b \text{ と記す} \right)$$

が成り立つ.

この定理の証明は次の小節で行ふ.

注意 21.10 これにより, 曲線で囲まれた図形の面積を代数的な計算で求めることができる様になつた！ 球の体積の公式をなぜ美しいと感じたのか, その 1 つの答が与へられたとも言へる.

21.3. 不定積分と微分積分学の基本定理の証明

微分積分学の基本定理の証明をするために, 1 つ定義をする.

定義 21.11 函数 $f(x)$ の定義域内に含まれる区間 $[a,b]$ において, b が変化するとき, 定積分を使つて函数

$$b \longmapsto \int_a^b f(x)dx$$

が定義される. これを

$$\int_a^x f(x)dx$$

などと書いて 不定積分 と呼ぶ.

以下に示す様に, 実は不定積分は $f(x)$ の原始函数の 1 つに他ならないので, 原始函数と不定積分は同一の概念と見做されることが多い. 21.11 の証明の前に 1 つ補題を用意する.

補題 21.12 a, b, c を含む区間 I で積分可能な函数 $f(x)$ について, 次が成り立つ：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx. \tag{21.13}$$

証明 $a = b$ または $b = c$ のときは明らかに成り立つ. 次に $a < b < c$ のときには b を分割箇所の 1 つに含めておき, 右辺についての (21.3) を考へよ. このとき (21.3) の左辺の和を $[a, b]$ の部分の和と $[b, c]$ の部分の和に分けることで, 上記の左辺に一致することが了解される. a, b, c がその他の大小関係にあるときも, (21.3) を使つて最初の場合に帰着させることで示される. □

証明 (21.9 の) まづ

$$G(x)=\int_a^x f(x)dx$$

とおく. $G'(x)=f(x)$ であることが次の様にしてわかる. 区間 $[x, x+\Delta x]$ 内での $f(x)$ の最小値, 最大値をそれぞれ m, M とせよ. このとき,

$$m\cdot\Delta x \leqq \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx \leqq M\cdot\Delta x \quad (\Delta x>0 \text{ のとき}),$$
$$m\cdot\Delta x \geqq \int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx \geqq M\cdot\Delta x \quad (\Delta x<0 \text{ のとき}),$$
$$G(x+\Delta x)-G(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(x)\,dx \quad (\because (21.13))$$

であるから,

$$m\leqq \frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}\leqq M,$$
$$G'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{G(x+\Delta x)-G(x)}{\Delta x}.$$

ここで, $f(x)$ は連続函数なので $\Delta x\to 0$ のとき, $m\to f(x)$, $M\to f(x)$ である. 従つて

$$G'(x)=f(x)$$

でなくてはならない. 以上から $G(x)$ は原始函数の 1 つであることがわかつた. 以下 $F(x)$ を $f(x)$ 任意の原始函数とする. ここで,

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)+C$$

であるが, $x=a$ とすれば $0=F(a)+C$ なので, $C=-F(a)$ である. ゆゑに

$$\int_a^x f(x)\,dx=F(x)-F(a).$$
$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

がわかり, 証明は終はる. □

原始函数の公式を使へば, 定積分が次々と計算される.

演 習 問 題

21.14 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x\,\cos x\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x\,\cos 3x\,dx.$ 〔≒2.5 A2(4)〕

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx.$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x-1)}\,dx.$

21.4. 不定積分と区分求積法

ここでは, §21.2 で学んだ事実を利用した式変形（区分求積法）を応用してみる.

例題 21.15 次の式を第 n 項とする数列の極限を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k^2+n^2}}{n^2}. \tag{21.16}$$

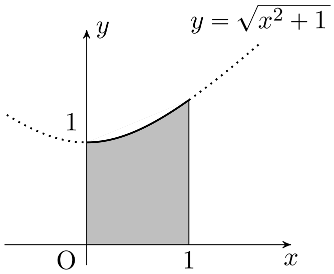
解答 上に述べたことから,

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1} \longrightarrow \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \quad (n \to \infty) \\ &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\log\left|\sqrt{x^2+1}+x\right|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right)\end{aligned}$$

である. □

注意 21.17 上の (21.16) の第 10, 50, 100, 300 項を計算した値を記す:

n	第 n 項
10	$1.169093\cdots$
50	$1.151959\cdots$
100	$1.149870\cdots$
300	$1.148484\cdots$
真値	$1.147793\cdots$



ここから, 理論的な計算がどれほど強力かを感じていただきたい.

演 習 問 題

21.18 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{n}\right)$ 〔≒2.5 A1(1)〕

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$ 〔≒2.5 A1(2)〕

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+4n^2}$

(4) $\displaystyle\frac{1}{n}(n!)^{\frac{1}{n}}$ （Hint : 対数の極限を求める. ） 〔= 2.5 A1(4)〕

§ 22. 定積分の計算

22.1. 定積分の基本性質

ここで, 定積分の基本的な性質をまとめておく.

命題 22.1 (定積分の線形性など) a, b を含む区間 I で積分可能な函数 $f(x)$, $g(x)$ と任意の定数 k について, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle\int_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

(3) 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ であれば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$ である.

(4) 区間 $[a, b]$ で $f(x) > g(x)$ であれば, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$ である.

証明 以下 $f(x)$, $g(x)$ の原始函数を選んで $F(x)$, $G(x)$ と書く.
(1) 19.3(1) より $F(x)+G(x)$ は $f(x)+g(x)$ の原始函数なので, 21.2 を何度か使つて

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Bigl[F(x)+G(x)\Bigr]_a^b = \bigl(F(b)+G(b)\bigr) - \bigl(F(a)+G(a)\bigr) \\
&= \bigl(F(b)-F(a)\bigr) + \bigl(G(b)-G(a)\bigr) = \Bigl[F(x)\Bigr]_a^b + \Bigl[G(x)\Bigr]_a^b = (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

(2) 19.3(2) により, $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始函数であるから, 21.2 を 2 回使つて,

$$
(\text{左辺}) = \Bigl[kF(x)\Bigr]_a^b = kF(b) - kF(a) = k\bigl(F(b)-F(a)\bigr) = k\Bigl[F(x)\Bigr]_a^b = (\text{右辺}).
$$

(3) 函数 $f(x)-g(x)$ を $f(x)$ として 21.2 を適用する. 仮定より $f(x)-g(x) \geqq 0$ であるから, 21.3 の左辺の lim の中のすべての項が正または 0 である. 従つて

$$
\int_a^b \bigl(f(x)-g(x)\bigr)\,dx \geqq 0; \qquad \therefore \int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx
$$

を得る. (4) は (3) と同様に示せる. □

ここで, 22.1(4), (5) の有名な応用例を 1 つ挙げておく.

例題 22.2 次の極限値が存在することを示せ[4]: 〔= 2.6 B〕

$$
\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right).
$$

証明 右辺の一般項を

$$
a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n
$$

[4] この極限値は Euler の定数 と呼ばれ, 近似値は $\gamma = 0.57721566490153286060651209 00\cdots$ である.

とおく. $x\in[k,k+1]$ のときに成り立つ不等式

$$\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{x}\quad\text{（等号は } x=k,\ k+1 \text{ 以外で不成立）}$$

を積分することにより

$$\frac{1}{k+1}=\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx=\frac{1}{k}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{k+1}<\log(k+1)-\log k<\frac{1}{k}. \tag{22.3}$$

(22.3) の左側の不等式を $k=1$ から $n-1$ まで辺々加へると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}&<\log n.\\ \therefore a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\log n&<1.\end{aligned}\tag{22.4}$$

(22.3) の右側の不等式（で $k=n$ としたもの）

$$\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}\ \text{ より }\ a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n}-\log(n+1)+\log n>0.$$

つまり, 数列 $\{a_n\}$ は上界 1 を持つ単調増加数列であるから 2.19 により収束する. □

定理 22.5　（部分積分）$f(x)$ と $g(x)$ が積分可能で, $F(x)$ が $g(x)$ の原始函数であるとき, 次の公式が成り立つ:

$$\int_a^b \underset{\text{セ}}{f(x)}\,\underset{\text{ビ}}{g(x)}\,dx=\Big[F(x)\,g(x)\Big]_a^b-\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx.$$

証明　19.12 において $x=b$ を代入した式から $x=a$ を代入した式を差し引いたあと, 21.2 を使へば与式を得る. □

例題 22.6　次の定積分を求めよ:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx.$$

解答　部分積分法 22.1 により

$$\text{（与式）}=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1\ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

を得る. □

定理 22.7　（置換積分法）$f(u)$ a, b を含む区間 I で定義された連続な函数とする．さらに $\varphi(x)$ を区間 J で定義されて, その値域が I に含まれる連続函数とする．また $A=\varphi(a)$, $B=\varphi(b)$ とする．このとき

$$\int_A^B f(u)du = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

が成り立つ.

証明　19.3 の式において $x=b$ を代入した式から $x=a$ を代入した式を差し引いたあと, 21.2 を使へば与式を得る. □

もちろん 22.1 についても 使用法 1 19.19, 使用法 2 19.20 に対応して 2 通りの使用法があるので, 式だけ書いておく:

使用法 1　$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\frac{dx}{dt}dt \quad \bigl(x=\psi(t),\ \ a=\psi(\alpha),\ b=\psi(\beta)\bigr),$$

使用法 2　$$\int_a^b f(u)\frac{du}{dx}dx = \int_A^B f(u)du \qquad \bigl(u=\varphi(x),\ \ A=\varphi(a),\ B=\varphi(b)\bigr).$$

例題 22.8　次の定積分の値を求めよ:

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

解答　公式 (20.8) を使へばよいが, 復習も兼ねて使はないで計算してみる．20.39(3) に従つて $t=\sqrt{1+4x^2}-2x$ とおくと, x が 0 から 1 に増加するとき, t は 1 から $\sqrt{5}-2$ へ減少する.

$$(t+2x)^2 = 1+4x^2 \quad \text{より}\ t^2+4xt=1. \quad \therefore\ x=\frac{1-t^2}{4t}.$$
$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = -\frac{1+t^2}{4t^2}. \quad \text{また}\ \sqrt{1+4x^2} = t+2x = t+\frac{1-t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{2t}.$$

よつて

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_1^{\sqrt{5}-2} \frac{1+t^2}{2t}\left(-\frac{1+t^2}{4t^2}\right)dt = -\frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{5}-2}\frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\,dt \\
&= -\frac{1}{8}\left[-\frac{1}{2t^2}+2\log|t|+\frac{1}{2}t^2\right]_1^{\sqrt{5}-2} \\
&= -\frac{1}{8}\biggl(-\frac{1}{2}(9+4\sqrt{5})+2\log(\sqrt{5}-2)+\frac{1}{2}(9-4\sqrt{5})\biggr) \\
&= \frac{1}{8}\bigl(2\log(\sqrt{5}+2)+4\sqrt{5}\bigr) = \frac{1}{4}\log(\sqrt{5}+2)+\frac{\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

を得る. □

例題 22.9 次の等式を示せ：〔= 2.5 B1(1)(2)(3)〕

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \\
&= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n \geqq 3 \text{ は偶数}) \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\dfrac{n-5}{n-4}\cdots\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3} & (n \geqq 2 \text{ は奇数}). \end{cases}
\end{aligned}
\tag{22.10}
$$

解答 最初の等号は $t = \frac{\pi}{2} - x$ とおくことで示される．求める定積分を

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

をおく．(19.26) で, $x = \frac{\pi}{2}$ を代入したものから $x = 0$ を代入したものを差し引けば

$$(n+2)A_{n+2} = (n+1)A_n, \quad \therefore\ A_n = \frac{n-1}{n}A_{n-2} \quad (n \geqq 2)$$

を得る．これより n が偶数のときは,

$$A_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot A_0$$

となり, n が奇数のときは,

$$A_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot A_1$$

となる．$A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$ ゆゑ, 与式が示された． □

注意 22.11 (22.10) は Wallis の公式と呼ばれる有名な公式につながる．〔= 2.5 B1(4)〕

演習問題

22.12 次の定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3} xe^{x^2+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{2x}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx.$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\,dx.$

(7) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$

22.13 次の不等式を示せ：

(1) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots < 2.$ 〔= 2.6 A3(1)〕

(2) $1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + \cdots < \dfrac{4}{3}.$ 〔= 2.6 A3(2)〕

22.2. 面積の計算

この節では面積の計算について例を通して述べる.

例題 22.14 $a > 0$ を定数とする. Cycloid

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

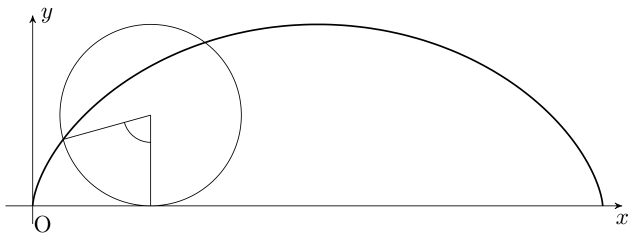
と x 軸で囲まれた部分の面積 S

解答 x は 0 から $2\pi a$ へ変化し,

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$$

なので

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi a} y\,dx \qquad = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= a^2(2\pi - 2\cdot 0 + \pi) = 3\pi a^2 \end{aligned}$$



となる. □

面積の計算では, 次のこともよく使はれる.

> 区間 $[a, b]$ で定義された 2 つの連続函数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の graphes と 2 直線 $x = a$, $x = b$ によつて囲まれた部分の面積 S は
>
> $$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$
>
> で与へられる.

証明 まづ 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ である場合を考へる. この場合, 21.8 によつて, 求める面積は

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

であるから主張は正しい. それ以外の場合はすべてこの場合に帰着される. □

極座標で表示された図形の面積の計算について述べる.

命題 22.15 連続函数 $f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と, 2 直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ により囲まれた図形の面積 S は

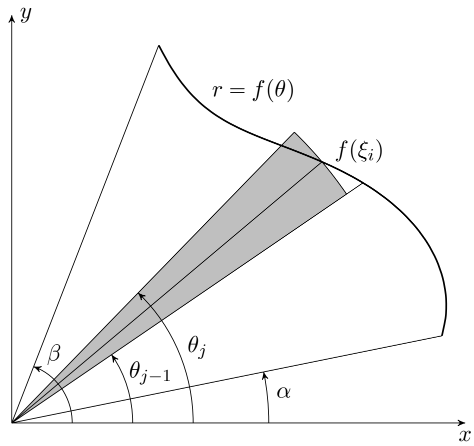
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2\, d\theta$$

で与へられる.

証明 区間 $[\alpha, \beta]$ を細分して

$$\varDelta : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

$$[\alpha, \beta] = [\theta_0, \theta_1] \cup [\theta_1, \theta_2] \cup \cdots \cup [\theta_{n-1}, \theta_n]$$



塗りつぶした部分の面積は $\frac{1}{2} f(\xi_i)^2(\theta_j - \theta_{j-1})$ であるから, 21.8 と同様の考察によつて, 所望の面積は

$$S = \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} f(\xi_i)^2(\theta_j - \theta_{j-1})$$

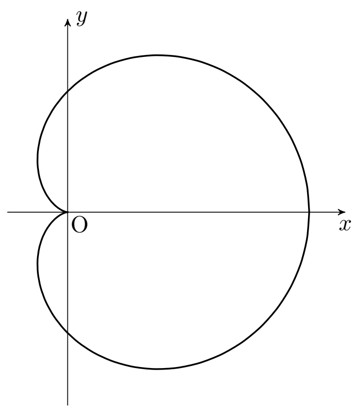
である. これは (21.3) によつて

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2\, d\theta$$

で与へられる. □

例題 22.16 $a > 0$ を定数とする. 極座標による方程式 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で表される曲線（Cardioid, 心臓形）で囲まれる部分の面積 S を求めよ.

解答



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos\theta)^2\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left(2\pi + 0 + 4\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3a^2}{2} \quad \cdots\cdots \text{ Ans.} \end{aligned}$$

となる. □

演 習 問 題

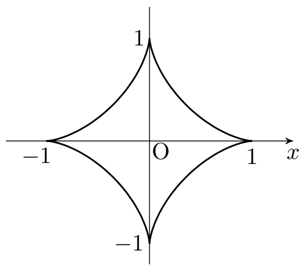
22.17

θ を媒介変数として, 直交座標系で, 方程式

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases}$$

で表される曲線で囲まれた図形（asteroid, 星芒形）の面積 S を求めよ.

図 22.18　asteroid



22.19　極座標で表示された次の曲線で囲まれた図形の面積を求めよ. $a > 0$ は定数である.

(1)　極座標で $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$
　　$\left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{4}\right)$（lemniscate, 連珠形）

(2)　三葉形 $r = a\cos 3\theta$

(3)　四葉形 $r = a\cos 2\theta$

図 22.20　lemniscate

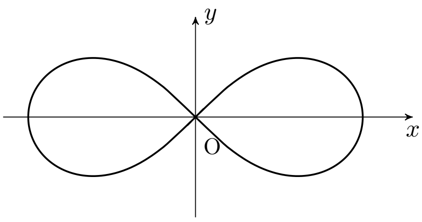


図 22.21　三葉形

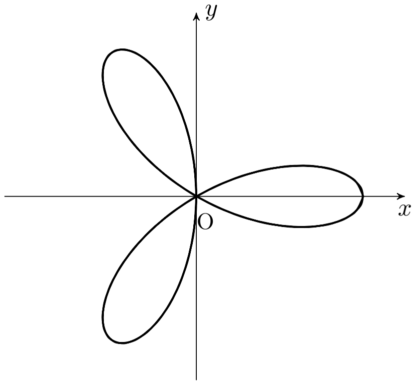
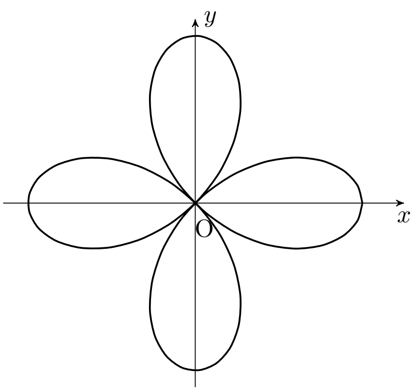


図 22.22　四葉形



22.3.　広義積分

6a 積分 (6) 広義積分の収束と発散を学ぶ。ガンマ関数とベータ関数を理解する。

Γ, B の関係は重積分のあとへ移動

これまでは, 積分する区間は閉区間であつたが, 開区間を閉区間で近似することで, 開区間における積分を定義できる場合が多い. これについて学ぶ. 以下の例を通して説明するに留める. .

例 22.23　$[0,\infty)$ での積分を $[0,M]$ における積分の $M\to\infty$ とした極限と定義する :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^M = \lim_{M\to\infty}\left(1-\frac{1}{M}\right) = 1.$$

これは, 積分範囲が無限区間であるといふ意味で広義の 積分である.

例 22.24　函数が定義されてゐない点（区間の端点）を外して, わずかに小さい区間の積分を考へ, その区間を限りなく目的の区間に広げていつたときの極限と定める :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2}(1-\varepsilon) = 1.$$

こちらは, 函数が定義されてゐない点が積分区間に含まれてゐる場合である.

例 22.25　発散する広義積分の例を挙げておく.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

演 習 問 題

22.26　次の広義積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[7]{x^5}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \sqrt[5]{x^7}\,dx.$

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx.$　〔= 2.6 A2(2)〕

(5) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{e^x}\,dx.$　〔= 2.6 A2(4)〕

(6) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx.$　〔= 2.6 A2(3)〕

(7) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx.$　〔= 2.6 A2(5)〕

(8) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx.$　〔= 2.6 A2(6)〕

(9) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x-1)}x^2\,dx.$　〔= 2.6 A2(8)〕

(10) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx.$　〔= 2.6 A2(9)〕

(11) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$　〔= 2.6 A2(9)〕

22.27　以下の計算は誤つてゐる. 正しく計算し直せ.　〔= p.113, $\ell\ell$. 1-4〕

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -2.$$

8 微積分の応用 (1) 部分積分の応用としてのテーラーの公式、関数の展開について理解する。

§ 23. Taylor の定理, 函数の展開

23.1. Taylor の定理

前期に学んだ Taylor の定理を別の角度から眺めてみたい.

定理 23.1 （積分型の剰余項による Taylor の定理） $f(x)$ が C^{n+1} 級の函数のとき,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j\,!}(x-a)^j + R_n(x), \qquad (23.2)$$
$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$$

が成り立つ. $R_n(x)$ を積分型の剰余項と呼ぶ. また, 以下の便宜のために, (23.2) を a を中心とした n 次の積分型の有限 Taylor 展開 と呼ぶことにする.

証明 $n=1$ のときは

$$R_0(x) = \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

より正しい. また,

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \underset{\text{ビ}}{f^{(n)}(t)}\underset{\text{セ}}{(x-t)^{n-1}}dt \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\Big[-f^{(n)}(t)\frac{1}{n}(x-t)^n\Big]_a^x + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{1}{n}(x-t)^n dt \\
&= \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt \\
&= \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

であるから, 帰納法によつて示される. □

注意 23.3 前期に学んだ Taylor 展開の（13.6）の剰余項と比較することにより

$$\frac{1}{n\,!}f^{(n)}(c)\,(x-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \qquad (23.4)$$

となる c が a と x の間に存在する.

次の極限に関することが頻繁に使はれる :

命題 23.5 次の式が成り立つ :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

証明 与えられた x に対し $2|x|$ より大きい自然数 N を選んで固定する. このとき,

$n \geqq N$ ならば $|x|/n < 1/2$ であるから, 十分大きい n について

$$\begin{aligned}
&\frac{|x|^{n-N}}{N(N+1)(N+2)\cdots(n-1)n} \\
&= \frac{|x|}{N} \cdot \frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{N+2} \cdots\cdots \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n} \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}
\end{aligned}$$

$$\therefore \left|\frac{x^n}{n!}\right| < \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty \text{ のとき})$$

となるからである. □

例 23.6 11.3 で示した様に

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

であるから $f(x) = \sin x$ と $a = 0$ については,

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \sin(x + \frac{n\pi}{2})(x-t)^{n-1}\,dt\right| \\
&\leqq \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left|(x-t)^{n-1}\right|dt \\
&\leqq \left|\frac{1}{n!}\left[\,(x-t)^n\,\right]_0^x\right| \\
&\leqq \frac{1}{n!}|t|^n.
\end{aligned}$$

23.5 によつて, これは $n \to \infty$ で 0 に限になく近づくから, $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$ についての

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots + R_n(x)$$

は n が大きい程, よい近似を与へる. 同様のことが $\cos x$ についても成立する. (演習にあり)

$f(x) = \tan x$ の高次導函数は複雑なので, これについての上と同様な考察は難しい. 代りに $f(x) = \tan^{-1} x$ について述べるが, これの剰余項を調べるには, 13.1（高次導函数による）の方法でも 23.1（積分型）の方法でもうまく行かない, 以下の方法だとうまくいく.

例題 23.7　次の函数の $x = 0$ での冪級数展開を求めよ. 〔= p.67 1.11A 4(2)〕

$$\tan^{-1} x.$$

演習書 p.53, 例題 1.11.1 (4) そこでの解答は未履修事項 (項別積分定理) を使用してゐるので良くない.

解答　いま, 等式 〔= p.67 1.11A 1(2)〕

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \frac{z^{n+1}}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

に $z = -x^2$ を代入すると

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

を得る. これは任意の x について正しい. これを $x = 0$ から x まで積分して

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

となる. 最後の項について

$$\left| \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| = \int_0^{|x|} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \right| dx = \int_0^{|x|} \frac{|x|^{2n+2}}{1+x^2} dx$$
$$< \int_0^{|x|} |x|^{2n+2} dx = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

ここで $|x| < 1$ ならば

$$< \frac{1}{2n+3} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

従つて

$$\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

が成り立つ. (解答終了)

この解答は（残念ながら?）Taylor の定理（13.1 や 23.1）を使つてはゐない.　□

演 習 問 題

23.8 次の函数 $f(x)$ の a を中心とした n 次（n は自然数）の積分型有限 Taylor 展開を求めよ．（もちろん）剰余項は積分表示のままを答へよ．

(1) $f(x) = \cos x$,（但し $n = 2m$ で m は自然数）.

(2) $f(x) = \sin x$,（但し $n = 2m - 1$ で m は自然数）.

(3) $f(x) = e^x$.

(4) $f(x) = \log(1 + x)$.

23.9 先に（前期に）Taylor の定理 13.1 を利用して 13.8 で Napier の数 e の近似値を計算した．そこでの計算を参考にしながら，ここでは 23.1 を $n = 10$ として使つて，

$$2.718281 < e < 2.718282$$

となることを示せ．

23.10 Taylor の定理を使つて $\sin(1)$ を

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = \frac{101}{105} = 0.841\dot{6}$$

で近似したとき，小数第何桁まで正しいといへるか．

23.11 $A, B \in \mathbb{R}$ を含む区間 I で定義された函数 $F(t)$, $G(t)$ について，A と B の間に次の式を満たす c が存在する：

$$\int_A^B F(t)G(t)dt = F(c)\int_A^B G(t)dt.$$

(Hint : $A = B$ については明かである．まづ $A < B$ について証明する．最後に $B < A$ についても成立することを示せ．)〔$=$ p.131 定理 2.8〕

23.12 $F(t) = f^{(n)}(t)$, $G(t) = (x - x)^{n-1}$ とおいて，23.11 を用いて (23.4) を証明せよ．〔$=$ p.131 ℓ. -7 – p.132 ℓ. 2〕

23.2. Taylor 展開

定義 23.13 Taylor の定理において, 剰余項が

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

なる性質を持つとき,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と書ける. これを $f(x)$ の $x=a$ における Taylor 展開と呼ぶ. 伝統的に $a=0$ の場合の Taylor 展開を Maclaurin 展開とも称する.

多くの重要な函数について, 有限 Taylor 展開の剰余項 $R_n(x)$ を調べると

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

であることがわかることが多い.

例 23.14 例へば $f(x)=e^x$ の第 n 次剰余項 $R_n(x)$ は

$$\begin{aligned}
|\,R_n(x)\,| &= \left| \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x e^t(x-t)^{n-1}dt \right| \\
&< \frac{1}{(n-1)!}e^x \left| \int_0^x (x-t)^{n-1}dt \right| \\
&< \frac{1}{(n-1)!}e^x \left| \left[\frac{1}{n}(x-t)^n \right]_{t=0}^x \right| \\
&< e^x \left| \frac{1}{n!} \right| \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

ここで, 最後の極限は 23.5 により示される. 同様な考察により, 例へば以下の様な函数の Maclaurin 展開が得られる.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots, \\
\cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots, \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots, \\
\tan^{-1} &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots, \quad (23.1\ 参照) \\
\log(1-x) &= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots \quad (\alpha \neq -1).
\end{aligned}$$

演 習 問 題

23.15 次の函数 $f(x)$ の Maclaurin 展開を求めよ.

(1) $f(x) = \cos(2x)$.

(2) $f(x) = \sin^2 x$.

(3) $f(x) = e^{x^2}$.

23.16 次の函数 $f(x)$ の Maclaurin 展開の x^3 の項までを求めよ.

(1) $f(x) = \sin(2x) + \cos x$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. 〔= 2,8 A1(4)〕

(3) $f(x) = e^x \sin x$. 〔= 2.8 A1(1)〕

(4) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

§ 24.　曲線の長さ

9 微積分の応用 (2)　パラメータで表示された曲線の長さの計算を学ぶ。

24.1.　陽函数表示の場合の曲線の長さ

閉区間 $[a, b]$ おいて微分可能な函数 $f(x)$ に対して, 曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さとは何かを考察し, それを求めたい.

閉区間 $[a, b]$ を小区間に分割する：

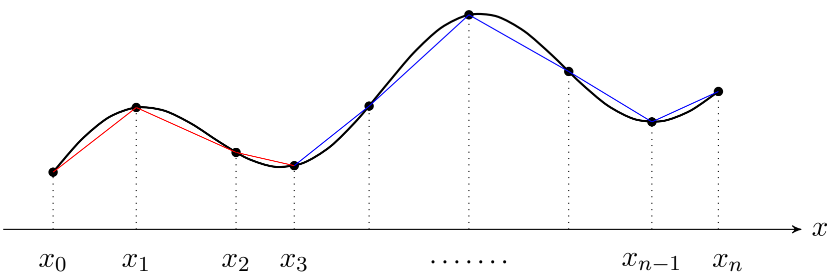
$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

この各区間に属する曲線の部分を, 端点を結ぶ線分の長さで置き換へて, それらの総和

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2}\,(x_i - x_{i-1})
\end{aligned}$$

の $|\Delta| \to 0$ とした極限値が存在するとき, これを曲線 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における 長さ と呼ぶ. （これが定義なのか定理なのかは意見が分かれるかも知れないが, ここは純粋に数学的に進める.）



平均値の定理により, 各 i について,

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]$$

なる x_i が存在する. それゆゑ, 上の総和の極限が存在すれば, それは

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

で与へられる. 以上をまとめておく：

定理 24.1　微分可能な函数 $f(x)$ について, 曲線 $y = f(x)$ の区間 $[a, b]$ における長さ ℓ は次で与へられる：

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

24.2. 媒介変数表示された曲線の長さ

区間 $[\alpha, \beta]$ で定義され, この区間で連続で, 区間 $[\alpha, \beta]$ で C^1 級の 2 つの函数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が与へられたとする. $\varphi'(t) = \psi'(t) = 0$ となる t は有限個しかないとする. このとき, 直交座標に関して媒介変数を使つて表される曲線

$$C = \{\,(x, y)\,|\,x = \varphi(t),\ y = \psi(t)\,\}$$

の長さ $\ell(C)$ も同様に定義され, その値は次の式で与へれられる :

命題 24.2 上の曲線 C の長さ $\ell(C)$ は次の式で表される :

$$\ell(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{24.3}$$

証明 始めに区間 $[\alpha, \beta]$ において $\varphi'(t) \neq 0$ であるとする. この場合, この区間で常に $\varphi(x) > 0$ または常に $\varphi(x) < 0$ なので, 逆函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が存在し,

$$\big(\varphi(t), \psi(t)\big) = (x, y) \iff y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = f(x)$$

となる函数 $f(x)$ が存在する. さらに 8.7（媒介変数表示による導函数）より

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

t が α から β まで変化するとき x が $\varphi(\alpha)$ から $\varphi(\beta)$ まで変化し,

$$\begin{aligned}\ell(C) &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt.\end{aligned}$$

次に, $[\alpha, \beta]$ において $\psi'(t) \neq 0$ であるとすると, x 座標と y 座標の役割を入れ替へれば上と同様にできる. 最後に, 一般の場合は全区間を $\varphi'(t) = 0$ または $\psi'(t) = 0$ なる点で有限個の小区間に分割すれば, それぞれの小区間で, 上のどちらかの場合に帰着されるから, 21.2 により, 所望の結果が得られる. □

24.3. 極座標で表示された曲線の長さ

さらに極座標によつて表示された曲線の場合は

命題 24.4 函数 $f(\theta)$ は θ の C^1 級函数とし, 極座標によつて $r = f(\theta)$, $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ と表される（滑らかかな）曲線 C の長さ $\ell(C)$ は次の式で与へられる：

$$\ell(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\, d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

証明 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ だから

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta$$

となる. このとき

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2$$

なので, 24.3 より与式を得る. □

演 習 問 題

24.5 次の曲線 C の長さ $\ell(C)$ を求めよ.

(1) $C : y = x^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$.

(2) Cycloid $C : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ （但し, $a > 0$ は定数）.

(3) Asteroid（星芒形） $C : x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ （但し, $a > 0$ は定数）.

24.6 極座標によつて表された次の曲線 C の長さ $\ell(C)$ を求めよ.

(1) Cardioid（心臓形） $C : r = a(1 + \cos\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ （但し, $a > 0$ は定数）.

第 5 章　重積分

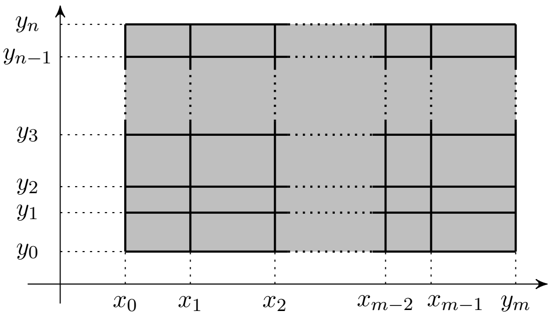
§ 25.　重積分の定義と性質

10 多変数関数の積分（1） 重積分可能性の定義を理解する。累次積分を使った重積分の計算を学ぶ。

長方形領域 …… 実定数 a, b, c, d について, 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の

$$R = \{\,(x,y) \in \mathbb{R} \,|\, a \leqq x \leqq b,\ c \leqq x \leqq d\,\}$$

なる部分集合を一般に長方形領域と呼ぶ.



長方形領域の分割 …… 上の R を定める a, b, c, d について, 区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ を

$$\Delta_x \ :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b, \quad \Delta_y \ :\ c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

の様に分割して, それに応じて R を図の様に小さい mn 個の長方形領域に分ける. 境界が重なり合うが, それは気にしなくて良いことがあとでわかる. この様な分割にも記号を用ゐる. 上の分割を Δ と表す.

長方形領域の分割の幅上の分割 Δ について,

$$\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|, \quad \Delta y_j = |x_j - y_{j-1}|$$

と記す. このとき

$$|\Delta| = \max\{\,|\Delta x_i|,\ |\Delta y_j|\,;\, 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\,\}$$

（つまり mn 個の小長方形の辺の最大値）を Δ の幅と呼ぶ.

分割の細分

長方形領域における積分以下の様に 1 変数の場合と同じ考へ方で定義する. 小長方形を表す記号を用意する：

$$\Delta_{ij} = \{\,(x,y)\,;\, x_{i-1} \leqq x \leqq x_i,\ y_{j-1} \leqq y \leqq y_j\,\}.$$

Δ_{ij} の面積は $\Delta x_i \Delta y_j$ である. 上の長方形領域 R で定義された函数 $f(x,y)$ が与へら

れたとき, 各 (i,j) について任意に $\mathrm{P}_{ij} \in \varDelta_{ij}$ をとり固定する．さらに

$$S(f,\varDelta) = \sum_{(i,j)} f(\mathrm{P}_{ij})\varDelta x_i \varDelta y_j$$

なる和を考へる．この和は P_{ij} の選び方に依存することに注意されたい．さて, いま

$$\lim_{|\varDelta|\to 0} S(f,\varDelta) \tag{25.1}$$

なる極限を考へる．これは各小長方形に属する点の集合 $\{\mathrm{P}_{ij}\}$ のあらゆる選び方を想定した上での極限である．もし, この極限が存在すれば, 1 変数の場合と同様な考へ方に基き, それを長方形領域 R における函数 $f(x,y)$ の積分であると考へて

$$\iint_R f(x,y)dxdy \tag{25.2}$$

といふ記号で表し, これを函数 $f(x,y)$ の R 上の 重積分 と称する．この極限が存在する場合 重積分可能 であるといふ．ここで, 注意すべきことがある．1 変数のときは区間 $[a,b]$ で積分するといつても, 積分の下端を a, 上端を b とするのと, 積分の下端を b, 上端を a とするのとでは, 結果の値の符号が逆転する．2 変数の場合も, R にも 向きの様なもの があることに留意しなくてはならない．このことは以下でも折に触れて述べる．

図 25.3 重積分の定義

（ここに図が入るが重いので当面は省略）

直観的な説明 (ここの説明がわかることが重要) 図を見ていただきたい.
水平面が 1 枚だけ描かれてゐるが, それは xy 平面である. ところどころに見える滑らかな曲面が $z=f(x,y)$ の graph S の概形である. 多くの柱 (直方体) があるが, 一つ一つは丁度 Δ_{ij} の上下に立つてゐる. その柱の高さは, 各 Δ_{ij} のどこかに (図では中央に) 選ばれてゐる P_{ij} における値 $f(\mathrm{P}_{ij})$ である. これらの直方体の体積の和が (25.1) に他ならない. 但し, $f(\mathrm{P}_{ij})$ が負の値であれば, そこに立つ柱の体積を負として勘定してゐる. 以上のことから, (25.2) は, 曲面 S と xy 平面の間にある部分の体積を表してゐると考へるのが妥当である. xy 平面よりも下にある部分の体積は負の値で勘定されるので, これを <u>符号付き体積</u> と呼ぶことにする.
つまり, 直観的には

$$\boxed{\textbf{重積分}} = \boxed{\textbf{符号付き体積}}$$

である.

注意 25.4 (1) ここで, 重積分は符号つきの体積である, と述べたが, 厳密には「体積とは何か」を定めておかなくてはならない. 一般的な方法で体積を定義するのには, 通常は 3 重積分を使ふ. 28.1 において述べる.
(2) (25.1) が収束することを, より厳密に示すには, 次の様にする. それぞれの小長方形 Δ_{ij} において, そこの中での $f(x,y)$ の最大値 M_{ij} と 最小値 m_{ij} を高さに持つ 2 種類の柱を立てる. それらの体積は $m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$, $M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j$ である. すべての小長方形を渡つて, これら高い柱の体積の和を $V(f,\Delta)$ とし, 同じく, これら低い柱の体積の和を $v(f,\Delta)$ とする:

$$v(f,\Delta)=\sum_{(i,j)} m_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j, \quad V(f,\Delta)=\sum_{(i,j)} M_{ij}\,\Delta x_i \Delta y_j.$$

このとき, もちろん

$$v(f,\Delta) \leqq S(f,\Delta) \leqq V(f,\Delta)$$

である. ここで, $|\Delta| \to 0$ の極限をとる (そのとき, もちろん m や n は無限に大きくなる) と, $V(f,\Delta)$ は減少し, $v(f,\Delta)$ は増加する. また, 各小長方形での最大値 M_{ij} と最小値 m_{ij} が限りなく近づく. ⋯

ここまでで, 重積分が一通りは定義された. 次に, 定義域が長方形ではない (一般の有界集合の) 場合について, 説明する.

有界集合 …… ある長方形領域に含まれる様な $\mathbb{R}^2$ の部分集合を <u>有界集合</u> と呼ぶ. 無限に広がっている様な部分集合は有界領域ではない.

有界集合上での重積分

D を有界集合とし, それを含む長方形集合を R とせよ. D を定義域とする関数 $f(x,y)$ について, $(x,y) \notin D$ の場合は, $f(x,y)=0$ と定めることで, 定義域を R に拡張する.

さうしておいて,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy$$

と定める.（もちろん右辺の存在が前提である）

重積分の線形性

定理 25.5 （重積分の線形性）D を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする．以下の積分の値が存在する様な $f(x,y)$ と $g(x,y)$, および, 実定数 c について, 以下の等式が成り立つ.

(1) $\displaystyle\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

(2) $\displaystyle\iint_D c\,f(x,y)\,dxdy = c\iint_D f(x,y)\,dxdy.$

命題 25.6 不等式の保存性 領域 D 内の任意の点 (x,y) において, $f(x,y) \geqq 0$ であれば,

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geqq 0$$

である．この仮定の下では, 等号は D 上の至るところで $f(x,y)=0$ のときにのみ成立する.

注意 25.7 領域 D に“向き”を考へる場合があるが, その場合は 25.6 は修正が必要となる.

ここまでで, 重積分が一通りは定義された. 与へられた函数 $f(x,y)$ に対してどの様に計算するかを述べていく.

定理 25.8 （累次積分法）区間 $[a,b]$ において, 函数 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ は連続であるとし, この区間で常に $\varphi_1(x) \leqq \varphi_2(x)$ が成り立つとする. 領域

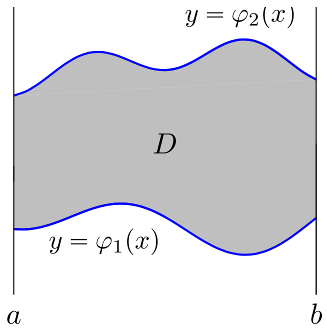
$$D = \{\,(x,y)\,|\,\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\,\}$$

を定義域とする函数 $f(x,y)$ が D で 連続な函数ならば, それは D 上で重積分可能であり,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \tag{25.9}$$

が成り立つ.

証明



$$\sum_j m_{ij} \Delta y_j \leqq \int_{\varphi_1(\alpha_i)}^{\varphi_2(\alpha_i)} f(\alpha_i,y)dy \leqq \sum_j M_{ij} \Delta y_j.$$

x のみの函数

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

について

$$\int_a^b F(x)dx = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_i F(\alpha_i)\Delta x_i$$

であるから, ⋯ □

同様に, 領域 D が

$$D = \{\,(x,y)\,|\,\psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\,\}$$

とも書けるとき⋯

(25.10)

3 変数の場合 : 有界集合, 重積分, 累次積分

演 習 問 題

25.11 次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (1+x+2y)\,dx\,dy$, $D = \{\,(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ x \leqq y \leqq 2x\,\}$. 〔≒2.10 A2(1)〕

§ 26. 類似積分の順序交換

領域 D が 2 通りに

$$D = \{\,(x,y)\,|\,\varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x),\ a \leqq x \leqq b\,\}$$
$$= \{\,(x,y)\,|\,\psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y),\ c \leqq y \leqq d\,\}$$

と書けるときは, (25.9) の左辺の重積分は (25.9) の右辺の形にも (25.10) の右辺の形にも書ける. この 2 つの表示の仕方の変形にも慣れておかう.

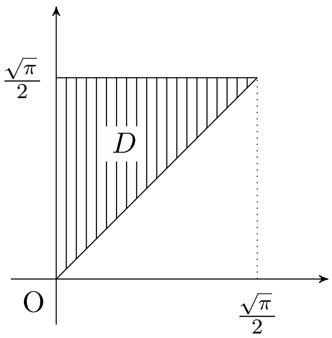
例題 26.1 領域

$$D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ x \leqq y \leqq \tfrac{\sqrt{\pi}}{2},\ 0 \leqq x \leqq \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\right\}$$

について, 重積分

$$\iint_D \sin y^2\,dxdy$$

を求めよ. (被積分函数は $\sin^2 y$ ではない.)



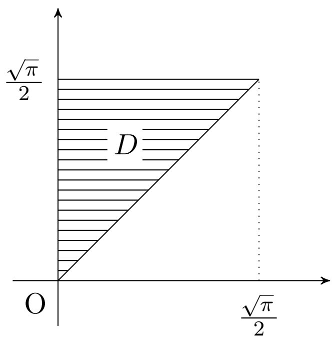
解答 まづは,

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_x^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \sin y^2\,dy \right) dx$$

と類似積分の形に書いてみると, ここから進めない. しかし

$$D = \left\{\,(x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq y,\ 0 \leqq y \leqq \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,\right\}$$

とも書けるから,



$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \left(\int_0^y \sin y^2\,dx \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \Big[x \sin y^2 \Big]_{x=0}^{y} dy \\
&= \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} y \sin y^2\,dy = \left[-\frac{1}{2} \cos y^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{\sqrt{2}-1}{4} \quad \cdots\cdots\ \text{Ans.}
\end{aligned}$$

を得る. □

演 習 問 題

26.2 累次積分の順序を考へて, 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_D x e^{y^2}\,dxdy, \quad D = \{\,(x,y)\ |\ x^2 \leqq y \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq 1\,\}$ ([1], p.197)

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}} y e^{\tan^{-1} x}\,dx \right) dy$

§ 27. 重積分における置換積分

11 多変数関数の積分（2）変数変換、特に極座標変換について学び、重積分の計算を行う。

重積分の置換積分について 2 つの重要な例を述べたあと一般的な公式を述べる.

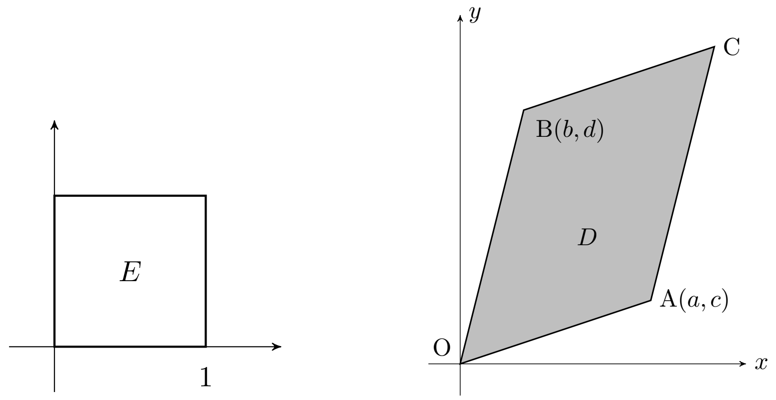
平行四辺形の領域

uv 平面から xy 平面への写像

$$(u,v) \mapsto (au+bv,\ v = cu+dv)$$

により, 次の領域 E は領域 D に写される：

$$E = \{\,(u,v)\,|\,0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1\,\},$$
$$D = \{\,(x,y)\,|\,x = au+bv,\ v = cu+dv,\ (u,v) \in E\,\}.$$



まづ, D の面積を $|D|$ と書くと, $|D| = |\,ad - bc\,|$ であり,

$$|D| \iint_E f(au+bv, cu+dv)dudv = \iint_D f(x,y)dxdy$$

である. つまり

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = |ad-bc| \iint_E f(au+bv, cu+dv)\,dudv$$

であるが, これは

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(au+bv, cu+dv)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv}$$

とも書けて, こちらの方が 1 変数との類似が見えるので覚え易い！ ここに

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

である.

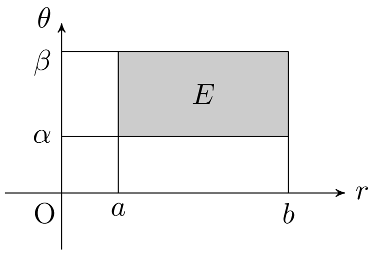
扇台形の領域

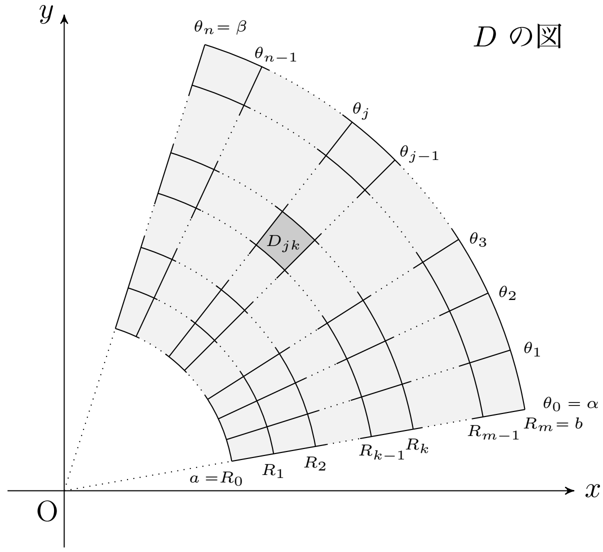
次に, 直交座標を極座標に変換した場合の重積分の公式を説明する.

$0 \leqq \alpha < \beta < 2\pi$, $0 < a < b$ を定数とし,

$$E = \{(r,\theta)\,|\,\alpha \leqq \theta \leqq \beta,\ \ a \leqq r \leqq b\}$$

とする.





D の図

また

$$D = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,(r,\theta) \in E\}$$

とおく. この様な形を 扇台形（おおぎだいけい） と呼ぶことにする. 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

を計算したい. そこで, 自然数 n に対し, α から β の間を n 等分し

$$\varDelta\theta:\ \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta, \quad \theta_j = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}j \ \ (j = 0,\ \cdots,\ n).$$

さらに, 別の自然数 m を取り a から b の間を m 等分する:

$$\varDelta r:\ a = R_0 < R_1 < \cdots < R_{m-1} < R_m = b,$$
$$R_k = a + \frac{b-a}{m}k \ \ (k = 0,\ \cdots,\ m).$$

また,

$$D_{jk} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|\,\theta_{j-1} \leqq \theta \leqq \theta_j,\ \ R_{k-1} \leqq r \leqq R_k\},$$
$$r_k = \frac{R_{k-1}+R_k}{2}, \quad \varDelta r = \frac{b-a}{m}, \quad \varDelta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}$$

とおくと, D_{jk} の面積 $\mu(D_{jk})$ は (扇型の面積の公式を使って)

$$\mu(D_{jk}) = \frac{1}{2}{R_k}^2\cdot\varDelta\theta - \frac{1}{2}{R_{k-1}}^2\cdot\varDelta\theta = \frac{1}{2}(R_k + R_{k-1})\,(R_k - R_{k-1})\cdot\varDelta\theta$$
$$= r_k\,(R_k - R_{k-1})\cdot\varDelta\theta = r_k\cdot\varDelta r\cdot\varDelta\theta$$

であるから,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)\,\mu(D_{jk}) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \underline{f(r_k\cos\theta_j, r_k\sin\theta_j)\,r_k}\,\varDelta r\right)\varDelta\theta$$

が成り立つ. ここで, 点 $(r_k \cos\theta_j, r_k \sin\theta_j)$ が小矩形 D_{jk} 内の点であることから, 左辺で, $m \to \infty$ $n \to \infty$ としたときの極限は重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

の定義に他ならない. 一方, 各 r_k が小区間 $[R_{k-1}, R_k]$ 内にあることから, 下線部を r の関数 $f(r\cos\theta_j, r\sin\theta_j)r$ の r に r_k を代入したものと考へて, 1 変数のときの区分求積法を使ふと, 右辺において $m \to \infty$ としたものは

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_a^b f(r\cos\theta_j, r\sin\theta_j)r\,dr\Big)\Delta\theta$$

に収束する. さらに $n \to \infty$ とすると, 再び区分求積法から

$$\int_\alpha^\beta \Big(\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\Big)d\theta = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,drd\theta$$

に収束する. 以上から

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

が了解される. この公式は

$$\boxed{\boldsymbol{dxdy = rdrd\theta}}$$

と覚えやう. この場合も

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

であつて, やはり

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta}$$

が成り立つ.

もつと一般な状況で, この公式は成り立つ. 即ち, 変数 (x,y) と (u,v) がある程度の望ましい函数関係にあれば, (x,y) に関する重積分を (u,v) に関する重積分に書き替へることができて, その様な状況では, いつでも上の式が成立する.

$\partial(x,y)/\partial(r,\theta)$ は Jacobi 行列式 (Jacobian) と呼ばれ, これが, 積分する領域の変数変換における局所的な拡大倍率を精確に表してゐるため, この公式が成り立つのである.

1 変数のときの公式と 2 変数のときの公式をよく見比べて欲しい. 数学は, 一般的な状況へ広がるにつれて, 必ずしも複雑になるわけではなく, 正しく理論が構成されてゐれば, 一般的な状況で理解した方が簡単に感じられるものなのである. 力ある方

には, どうか, 様々な場面を通し, 数学のその様な面を多く感じていただけることを切望する.

とはいつても, この note では, 上で述べた 2 つの場合（平行四辺形を長方形へ, あるいは, 扇形や扇台形を長方形へ変換する場合）以外は述べない.

演 習 問 題

27.1 次の重積分を求めよ. その際, 領域 D も図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)dx\,dy,$
$D=\{(x,y) : 0 \leqq x+y \leqq 1,\ 0 \leqq x-y \leqq 1\}.$ 〔$=$ 2.11 A1(1)〕

(2) $\displaystyle\iint_D (x+2y)dx\,dy,$
$D=\{(x,y) : 0 \leqq 3x-y \leqq 3,\ -4 \leqq x-3y \leqq 0\}.$ 〔$\fallingdotseq$ 2.11 A1(2)〕

(3) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : |y+2x| \leqq 2,\ |2y-x| \leqq 1\}.$ 〔$=$ 2.11 A1(4)〕

27.2 次の重積分を求めよ. その際, 領域 D も図示せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\}.$ 〔$=$ 2.11 A2(1)〕

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2\}.$ 〔$=$ 2.11 A2(2)〕

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}.$ 〔$=$ 2.11 A2(3)〕

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\}.$ 〔$\fallingdotseq$ 2.11 A2(4)〕

(5) $\displaystyle\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq \tfrac{\pi^2}{4}\}.$ 〔$\fallingdotseq$ 2.11 A2(5)〕

(6) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\}.$ 〔$=$ 2.11 A2(6)〕

(7) $\displaystyle\iint_D y\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq x\}.$ 〔$\fallingdotseq$ 2.11 A2(7)〕

(8) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,$
$D=\{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0\ x \leqq x^2+y^2 \leqq 1\}.$ 〔$\fallingdotseq$ 2.11 A2(8)〕

第 6 章　応用

この章では, 重積分の応用として体積の計算, Γ 函数や B 函数の構成と性質, 線積分, Green 公式などと学ぶ.

12 多変数関数の積分（3） 回転体や錐の体積の計算法を理解して、重積分の計算を行う。

§ 28. 立体の体積の計算

28.1. 体積の定義

xyz 空間内の有界領域 V について,

$$\iiint_V 1dxdydz \quad \left(\text{通常は } \iiint_V dxdydz \text{ の様に 1 を省く.}\right)$$

が存在するとき, これを V の体積と呼び $\mathrm{vol}(V)$ と記す：

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V dxdydz.$$

定理 28.1 （Cavalieri の原理） xy 平面上の有界領域 D 上で定義された函数 $f(x,y)$ が, 常に $f(x,y) \geqq 0$ を満たすとき,

$$V = \{\,(x,y,z)\,|\,0 \leqq z \leqq f(x,y),\ (x,y) \in D\,\}$$

についての $\mathrm{vol}(V)$ の累次積分表示は様々な仕方で 2 変数の重積分と 1 変数の重積分との累次積分に表される：

$$\mathrm{vol}(V) = \iiint_V 1\,dxdydz = \iint_D \left(\int_0^{f(x,y)} 1\,dz\right)dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$
$$= \int_a^b \left(\iint_{V_x} 1\,dydz\right)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

ここで V_x は点 $(x,0,0)$ を通り yz 平面に平行な平面による V の切り口を表し, $S(x)$ は V_x の面積を表す. これ以外にも書けるが, 煩雑なので書かない.

28.1 において, $\mathrm{vol}(V)$ が最後の式に等しいといふ事実を Cavalieri の原理と呼ぶ. これで, 高校「数学 III」で学んだ体積の公式が, 我々の重積分の定義に沿つて再確認されたことになる.

注意 28.2 xy 平面上の領域 D で定義された連続函数 $z = f(x,y)$ に対する重積分

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

は, $z = f(x,y)$ が D 上に定める xyz 空間内の立体の符号付きの体積と考へられる.

注意 28.3 歴史的には, 体積から積分の概念が生まれたのに, 結局, 積分を使つて体積を定義することになつてしまつた. 純粋数学ではこの様に, 常識的に上位にある概念と常識的に下位にある概念の逆転がよく起こる. 他の例として, 厳密な円周率の定義は線積分によるのであり, 三角函数の厳密な定義の前に逆三角函数を定義することは, 純粋数学的には, 自然である. さらに, 重大な一例を挙げると, 筆者には,「確率」の概念は, あらゆる科学的概念の根本概念へと変貌を遂げつつある様に感じられる. 常識的には, この様な概念の逆転は直ちには受け入れ難いであらうことも, 数学者は心得てゐる. とはいへ, 理論の堅牢さ, 健全さを保つには, この様な概念の逆転現象を受け入ていかなくてはならない.

ここでは, 数学的な厳密な定義は気にしないで, 次の様に理解しておく. まづ, xyz 空間内の立体 V が平面 $x=a$ と $x=b$ の間に存在してゐて ($a \leqq b$ と仮定する), 平面 $x=c$ ($a \leqq c \leqq b$) と交はつてできる部分の面積を $S(c)$ と記すことにする. いま c を変化させることで, 函数 $S(x)$ が得られる. このとき,

$$\boxed{(28.4) \qquad \mathrm{vol}(V) = \int_a^b S(x)\,dx}$$

であることが次の様に理解される. ここで V のうち, 2 平面 $x=a$ と $x=c$ の間に存在する部分の体積を $V(c)$ と書くことにする. このとき, もちろん

$$V(a) = 0, \quad V(b) = \mathrm{vol}(V)$$

である. 次に $a \leqq c \leqq c+h \leqq b$ となる c と h を用意する. ここで h は小さいとする. このとき

$$V(c+h) - V(c) \fallingdotseq S(c)h$$

であり, この近似式は単に両辺が近いといふだけではなく,

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(c+h)-V(c)}{h} = S(c)$$

が成り立つといふことを意味するものである. c は変化するから, この式は

$$\frac{d}{dx}V(x) = S(x)$$

を意味する. つまり $V(x)$ は $S(x)$ の原始函数の 1 つである. しかも $V(a)=0$ なので,

$$V(x) = \int_a^x S(x)\,dx$$

である. $x=b$ とすれば, 所望の式が得られる.

演 習 問 題

28.5 a を正の定数とする. xyz 空間において, 球 $\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2\}$ と円柱 $\{(x,y,z) \mid (x-a)^2+y^2 \leqq a^2\}$ の共有部分の体積 V を求めよ. 〔≒2.11 B2〕

28.6 a, b, c を正の定数とする．楕円体

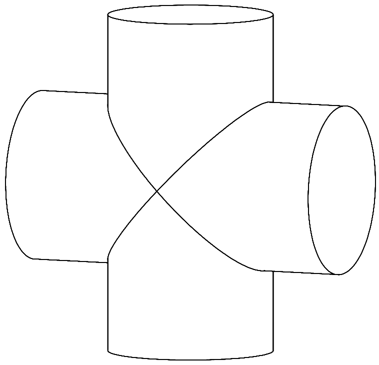
$$E = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \right\}$$

の体積 V を求めよ．〔$=$2.10 B1〕

28.7 xyz 空間内の 2 つの円柱

$$S = \{ (x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \leqq 1 \},$$
$$T = \{ (x, y, z) \,|\, y^2 + z^2 \leqq 1 \}$$

の共通部分の体積 V を求めよ．
〔$=$2.10 B2〕



28.2. 回転体や錐の体積

この節では回転体の体積について述べる.

命題 28.8 函数 $f(x)$ が C^1 級であるとき, 区間 $[a,b]$ で, 曲線 $y=f(x)$ と x 軸と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる図形を x 軸の廻りに一回転させてできる立体の体積 V は

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2 dx$$

で与へられる.

証明 (28.4) を使ふ. 今の場合, $S(x)$ は半径 $|f(x)|$ の円の面積に他ならないから $S(x)=\pi f(x)^2$ であるゆえに, 所望の式が成り立つ. □

例題 28.9 $a>0$ を定数とする. Cycloid

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases} \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

と x で囲まれた図形を x 軸の廻りに回転してできる回転体の体積 V を求めよ.
〔= 2.12 A5(1)〕

解答 28.8 を使ひ, 積分変数 x から θ に置換すると,

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \pi\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos\theta)^3\,d\theta \\ &= \pi\int_0^{2\pi} a^3\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^3 d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} a^3\left(2\sin^2 t\right)^3 dt = 2^4a^3\pi\int_0^{\pi}\sin^6 t\,dt \\ &= 2\cdot 2^4a^3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt = 2\cdot 2^4a^3\pi\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 5\pi^2a^3 \end{aligned}$$

となる. 最後の定積分を求めるところで (22.10) を使つた. □

演 習 問 題

28.10 Asteroid で囲まれた図形 $\{(x,y)\,|\,x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leqq 1\}$ を x 軸の廻りに回転させてできる立体の体積を求めよ.

28.11 Catenary (懸垂線)

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{2}}+e^{-\frac{a}{2}}\right)\quad(-a\leqq x\leqq a)$$

を x 軸の廻りに回転させてできる図形と 2 平面 $x=-a$, $x=a$ で囲まれる部分の体積を求めよ.

錐の体積つて ???

§ 29.　曲面積もぜひ入れたい

定理 29.1　函数 $f(x,y)$ が C^1 級であるとき, 領域 D 上の曲面

$$K = \{\,(x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D\,\}$$

は面積を持ち, その値は次式で与へられる :

$$S(K) = \iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\; dx\, dy.$$

証明　局所的には, 接平面の傾きを θ とするとき, $S(\Delta_{ij})$ の $1/\cos\theta$ 倍に拡大されてゐる. θ は, 点 $(x, y, f(x,y)$ における接平面の法線 vector

$$\boldsymbol{n} = (f_x(x,y),\, f_y(x,y),\, 1)$$

の鉛直線からの傾きであるから, 鉛直な vector $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ との内積を考へれば,

$$1 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}_3 = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{e}_3| \cos\theta.$$

$$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}$$

□

例題 29.2　$D = \{\,(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\,\}$ 上で $z = xy$ が与へる曲面の表面積 S を求めよ.

証明

$$z_x = y, \quad z_y = x$$

であるから,

$$S = \iint_D \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\, dxdy$$

である. 極座標に変換すると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \sqrt{r^2+1}\, rdr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3}\bigl(2\sqrt{2} - 1\bigr) \end{aligned}$$

となる.　□

命題 29.3 函数 $f(x)$ が C^1 級であるとき, 区間 $[a,b]$ で, 曲線 $y=f(x)$ を x 軸の廻りに一回転させてできる曲面の面積 S は次式で与へられる:

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

証明 与へられた曲面の方程式は

$$y^2 + z^2 = f(x)^2$$

である. このとき, $z \geqq 0$ において,

$$2y + 2zz_y = 0, \quad 2zz_x = 2f(x)f'(x)$$

であるから

$$\begin{aligned}
{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1 &= \frac{f(x)^2 f'(x)^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} + 1 \\
&= \frac{f(x)^2 f'(x)^2 + y^2 + z^2}{z^2} \\
&= \frac{f(x)^2 f'(x)^2 + f(x)^2}{z^2} \\
&= \frac{f(x)^2 (1 + f'(x)^2)}{y^2 - f(x)^2}
\end{aligned}$$

から, 領域

$$D = \{\,(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y \leqq |f(x)|\,\}$$

上の上の曲面の $z \geqq 0$ の部分の面積の 4 倍である. 従つて, 求める面積は

$$\begin{aligned}
S &= 4\iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\,dxdy \\
&= 4\iint_D \sqrt{\frac{f(x)^2(1+f'(x)^2)}{y^2 - f(x)^2}}\,dxdy \\
&= 4\int_a^b \left(\int_0^{|f(x)|} \sqrt{\frac{f(x)^2(1+f'(x)^2)}{y^2 - f(x)^2}}\,dy\right)dx \\
&= 4\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\left(\int_0^{|f(x)|} \frac{1}{\sqrt{y^2 - f(x)^2}}\,dy\right)dx \\
&= 4\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\left[\sin^{-1}\frac{y}{f(x)}\right]_0^{|f(x)|} dx \\
&= 4\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\,dx \\
&= 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx
\end{aligned}$$

となる. □

例題 29.4 区間 $[0,\pi]$ において, 函数 $f(x)=\sin x$ の graph を x 軸の廻りに 1 回転させてできる曲面の表面積 S を求めよ.

解答

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi |\sin x| \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx \\ &= \int_0^\pi \sqrt{1+\cos^2 x}\sin x\, dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\cos^2 x+1}\cos x + \log\left|\sqrt{\cos^2 x+1}+\cos x\right|\right)\right]_0^\pi \\ &= -\left(\sqrt{2}(-1) + \log\left|\sqrt{2}-1\right|\right) \\ &= \sqrt{2} - \log\left|\sqrt{2}-1\right| \\ &= \sqrt{2} + \log\left|\sqrt{2}+1\right|. \end{aligned}$$

□

定理 29.5 $\mathbb{R}^2$ 内の有界な領域 D から $\mathbb{R}^3$ 内への全単射な C^1 級の写像

$$(u,v) \longmapsto (x,y,z) = (\varphi(u,v),\, \psi(u,v),\, \chi(u,v))$$

について, 像の表面積 S は次で与へられる :

$$S = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, dudv.$$

これを使つて, 表面積が得られる様な一般的な曲面の例を見たことがない.

これと平面曲線の長さの公式 (24.3) との類似点を観察されたい.
この様な公式から, 例へば行列式の重要性/自然さを感じ取つていただきたい.

a, b, c を正定数とする. 楕円体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

は, 媒介変数 θ, φ を用いて,

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\theta, \\ y = b\cos\varphi\sin\theta, \\ z = c\sin\varphi; \end{cases} \qquad D = \left\{ (\theta,\varphi) \;\middle|\; 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\ -\tfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \tfrac{\pi}{2} \right\}$$

と表される. $a=b=c$ の場合, つまり球の体積は, 確かに既知の $\frac{4}{3}\pi a^3$ と一致する.
一般の a, b, c の場合は, S を初等函数で書くことはできない.

演 習 問 題

29.6 a を正定数とする. 区間 $[0, a]$ において, 函数 $f(x) = x^2$ の graph を x 軸の廻りに 1 回転させてできる曲面（放物面）の表面積 S を求めよ.

29.7 区間 $[0, 1]$ において, 函数 $f(x) = e^x$ の graph を x 軸の廻りに 1 回転させてできる曲面の表面積 S を求めよ.

29.8 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ と円柱 $(x - a)^2 + y^2 \leqq a^2$ の共有部分の面積 S を求めよ.

29.9 回転 Cycloid の表面積

29.10 Catenary（懸垂線）

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{2}} + e^{-\frac{a}{2}}\right) \quad (-a \leqq x \leqq a)$$

を x 軸の廻りに回転させてできる曲面の表面積を求めよ.

§ 30. Γ 函数, B 函数

6b 積分（6） 広義積分の収束と発散を学ぶ。ガンマ関数とベータ関数を理解する。

Γ 函数は, 微積分の知識を集大成し, さらに深い数学へと導くための恰好の素材である.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt &= \left[t^n(-1)e^{-t}\right]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= 0 + n\int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\
&= \cdots = n! \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\
&= n!
\end{aligned}$$

ここまでは, n は負でない整数であるが, この積分は n が, より一般の実数であつても定義できることに注目し, 次下の定義をする. この idea はたいへん優れてゐて, この函数は非常に役に立つ.

> **定義 30.1** $x \geqq 0$ に対して $\overset{\text{ガンマ}}{\Gamma}$ 函数 $\Gamma(x)$ を次式で定義する :
>
> $$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

注意 30.2 実際の $\Gamma(x)$ の定義域はもつと広いのであるが, 微積分の範囲では定義域が $x \geqq 0$ の場合しか扱はない.

> **命題 30.3** $x \geqq 0$ について次式が成り立つ :
>
> $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

証明

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} \underset{\text{ビ}}{t^x}\, \underset{\text{セ}}{e^{-t}} dt \\
&= \left[t^x\,(-1)e^{-t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x\, t^{x-1}(-1)e^{-t} dt \\
&= 0 + x\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= x\,\Gamma(x)
\end{aligned}$$

となつて証明された. □

> **定義 30.4** 2 つの実数 $p > 0$, $q > 0$ を変数とする函数 $B(p, q)$ を次式で定義する :
>
> $$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt = \int_0^{\infty} (y+1)^{-p-q} y^{q-1} dy \qquad \left(t = \frac{1}{y+1}\right).$$
>
> これを $\underline{\overset{\text{ベータ}}{B}\text{ 函数}}$ と呼ぶ :

命題 30.5 次の式が成り立つ：

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}.$$

証明

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}du\right)\left(\int_0^\infty v^{q-1}e^{-v}dv\right)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}v^{q-1}e^{-v}dudv\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty u^{p-1}v^{q-1}e^{-u-v}dudv\end{aligned}$$

$$u+v=z,\quad \frac{u}{v}=\frac{1-t}{t}.$$

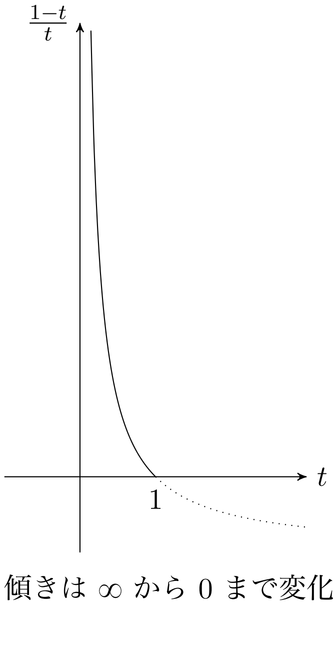
$$u=v(1-t)/t,\quad v+v(1-t)/t=z.$$

$$(vt+v-vt)/t=z.$$

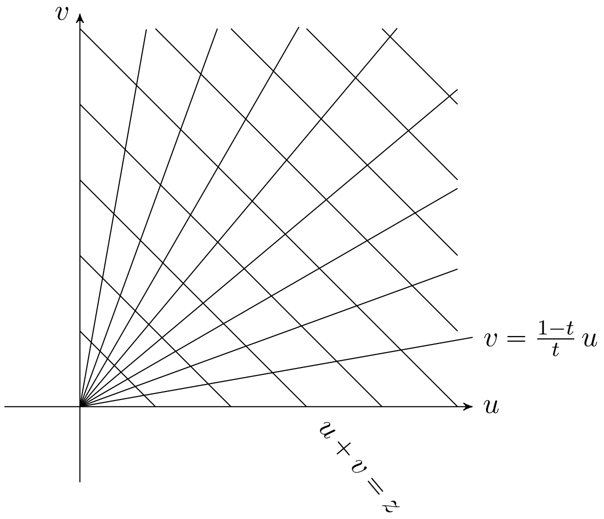
$$v/t=z.$$

$$v=tz,\quad u=z(1-t).$$

Jacobian



傾きは ∞ から 0 まで変化



$$u = zt,\ v = z(1-t)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & t \\ -z & 1-t \end{vmatrix} = z$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^1 (tz)^{p-1}(z(1-t))^{q-1} e^{-z} z\,dt\,dz &= \int_0^\infty \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, z^{p+q-1} e^{-z} dt\,dz \\ &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \int_0^\infty z^{p+q-1} e^{-z}\,dz \\ &= B(p,q)\,\mathit{\Gamma}(p+q)\end{aligned}$$

となり所望の式が示された. □

注意 30.6 30.5 から B 函数が 2 項係数の一般化であることがわかる:

$$\binom{p}{q} = B(p,q) \quad (p,\ q \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

命題 30.7 次の式が成り立つ:

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\,d\theta.$$

証明 .... □

これを使ふと

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2} B\Big(\frac{5}{2}, \frac{4}{2}\Big) = \frac{1}{2} \frac{\mathit{\Gamma}\big(\frac{5}{2}\big)\mathit{\Gamma}(2)}{\mathit{\Gamma}\big(\frac{9}{2}\big)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathit{\Gamma}\big(\frac{1}{2}\big)}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\mathit{\Gamma}\big(\frac{1}{2}\big)} = \frac{2}{35}$$

の様に計算できる.

命題 30.8 次の式が成り立つ：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

証明 前半.

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad (t = x^2) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

後半の証明は技巧的である．まず

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}
I^2 &= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-M}^{M} e^{-y^2} dy \\
&= \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M}\int_{-M}^{M} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{R}\int_0^{2\pi} e^{-r^2} rdrd\theta \quad \text{（ここは以下で説明）} \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R d\theta \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}(e^{-R^2}-1)\right) d\theta \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

ゆえに $I = \sqrt{\pi}$. □

注意 30.9 大きな n について, $n!$ のおよその大きさを知るのに, 次の公式がある.

(**Stirling の公式**. Herbert Robbins による強化版の Γ 函数版)
任意の $x \geqq 0$ に対して

$$\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} \exp\left(-x + \frac{1}{12x+1}\right) < \Gamma(x) < \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} \exp\left(-x + \frac{1}{12x}\right)$$

が成り立つ.

上の式の精度を試してみる:

$$\begin{aligned} 100! &= 933262154\cdots (156 \text{ 桁}) \\ \text{左辺} &= 9.332615\cdots \times 10^{157}, \\ \text{右辺} &= 9.332621\cdots \times 10^{157}. \end{aligned}$$

証明はしないが, 次の様なことも知られてゐる.

命題 30.10 次の式が成り立つ:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\tfrac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\tfrac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\tfrac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-nx}\Gamma(nx).$$

演 習 問 題

30.11 次の積分を B 函数, Γ 函数を使つて求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\theta \cos^5\theta\, d\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^7\theta\, d\theta$

30.12 次の積分を B 函数, Γ 函数を使つて求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 t^3(1-t^4)^5\, dt$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^5}{\sqrt{1-t^3}}\, dt$

注意 30.13 Laplace 変換

13 多変数関数の積分（4） 線積分の概念を定義して、グリーンの定理の概略を理解する。

§ 31.　線積分と Green の定理

31.1.　平面曲線

Green の定理と呼ばれる定理を解説する．これは, Stokes の定理と呼ばれる定理の特別なものであつて, 重要である．Storkes の定理は微分積分学の基本定理の高次元化と見做されるものである．これは, 高校の物理で学ぶ Ampére の法則などの高度な理論をきちんと理解するために必須のものである．さて, これらの定理を説明するために, 閉曲線の囲む領域（逆の言ひ方だと, 領域の境界をなす曲線）について, きちんと述べておかなくてはならないため, それをこの小節で行ふ．以下の概念は, 初学者向けに狭めにしてある．

定義 31.1　区間 $I \subset \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への連続な写像のことを 曲線 と呼ぶ．即ち, 写像

$$C : I \ni t \longmapsto (\varphi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 \tag{31.2}$$

において, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ の双方が連続であれば C は 曲線 と呼ばれる．
曲線についての以下の様な概念を定義する．

(1)　(31.2) において, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ が微分可能で, かつ, $\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ が連続であるとき, 曲線 C は 滑らかな曲線 と呼ばれる．

(2)　(31.2) において, 写像 C が単射であるとき, 即ち

$$(\varphi(s), \psi(s)) = (\varphi(t), \psi(t)) \iff s = t$$

が成り立つとき, C を 単純曲線あるいは単純な曲線 と呼ぶ．

(3)　(31.2) において, I が閉区間の場合を考へる．いま $I = [a, b]$ と記すとき,

$$(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$$

が成り立つならば C は 閉曲線 と呼ばれる．

(4)　定義された区間内の有限個の点を除いて, C^1 級である様な曲線を 区分的に滑らかな曲線 と呼ぶ．

(5)　単純な閉曲線を Jordan 曲線 と呼ぶ．

曲線は, $\mathbb{R}^2$ の単なる部分集合ではなく, 像が同じでも異る曲線を表すことがある．特にその 向き が重要である．ここでの定義は, 受講者の理解を優先したため, かなり狭いものになつてゐることを付言しておく．

　次の定理の主張は, ほとんど自明に思はれるが, 証明はなかなか大変であり, 種々の歴史がある．

定理 31.3 （Jordan 曲線定理）C を Jordan 曲線とせよ. C の像の補集合は 2 つの互ひに素な連結成分から成り, 一方の成分は有界領域であり, 内部と呼ばれる. 他方の成分は非有界領域となり, 外部と呼ばれる. また, C は両成分（領域）の境界を成す.

証明 これの証明は, ここでは行はない. また特段の興味がない場合は, これを認めて進めばよい. 読み易い文献を挙げられないので, 証明を知りたい読者は各自で調べられたい. □

定義 31.4 以下の議論で必要な領域とその境界の定義する：

(1) Jordan 閉曲線 C の内部になつてゐる様な有界な領域 D について, C の向きを, D を左に見て進む方向づけ（向き）に（必要ならば）修正したものを D の境界と呼び, ∂D で表す.

(2) より一般的に, 有限個の互ひに交はらない Jordan 曲線の外部や内部の共通部分あるいは和集合をとる操作を, 何回か繰り返へすことにより定義される領域 D ついても, それらの境界を然るべく自然に定義する. その場合は ∂D は, 必要に応じて向きの反転を施した, いくかの Jordan 曲線として捉へられる. （図 31.7 参照）

$I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ を 2 つの区間とし, 2 つの滑らかな単純曲線

$$
\begin{aligned}
C_1 &: I_1 \ni t \longmapsto (\varphi_1(t), \psi_1(t)) \in \mathbb{R}^2, \\
C_2 &: I_2 \ni s \longmapsto (\varphi_2(s), \psi_2(s)) \in \mathbb{R}^2
\end{aligned} \tag{31.5}
$$

があつて, これらの向きと像が一致すると仮定する. 簡単のために, $({\varphi_1}'(t), {\psi_1}'(t)) = (0,0)$ となる t と $({\varphi_2}'(s), {\psi_2}'(s)) = (0,0)$ となる s は存在しないものとする. この様な C_1 と C_2 は互ひに同値であると称することにする.

以上のことを区分的に滑らかな単純曲線などに拡張できるが, それは読者にできることなので, 省略する.

31.2. 線積分と Green の定理

区分的に滑らかな曲線

$$C \ : \ x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

について,

$$
\begin{aligned}
\int_C f(x,y)dx &= \int_a^b f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\varphi'(t)dt, \\
\int_C f(x,y)dy &= \int_a^b f\bigl(\varphi(t), \psi(t)\bigr)\psi'(t)dt
\end{aligned}
$$

と書いて, C に沿ふ $f(x,y)$ の線積分と呼ぶ. さらに 2 つの函数 $f(x,y)$, $g(x,y)$ について

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_C f(x,y)dx + \int_C g(x,y)dy$$

と定める. 積分路 C が閉曲線であるとき, これを物理学の書物では

$$\oint_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

と記されてゐることが多い.

補題 31.6 C_1 と C_2 を (31.5) で与へられる互ひに同値な（滑らかな）2 曲線とする. このとき

$$\int_{C_1} f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_{C_2} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

である. このことは, 通常「線積分は積分路の媒介変数の選び方に依存しない」といふ言明で述べられる.

証明 ここでは I_1 と I_2 が閉区間のときにのみ示さう. $t = {\varphi_1}^{-1}\varphi_2(s)$ と定めれば,

$$t = {\psi_1}^{-1}\psi_2(s)$$

でもあり, s と t は s が I_2 を動くに従つて t が I_1 を動く. $I_1 = [\,a_1, b_1\,]$, $I_2 = [\,a_2, b_2\,]$ と記す.

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(x,y)dx &= \int_{a_1}^{b_1} f\big(\varphi_1(t), \psi_1(t)\big){\varphi_1}'(t)dt = \int_{a_2}^{b_2} f\big(\varphi_2(s), \psi_2(s)\big)\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}ds \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f\big(\varphi_2(s), \psi_2(s)\big)\frac{dx}{ds}ds = \int_{C_2} f(x,y)dx\end{aligned}$$

となる. $\displaystyle\int_{C_1} f(x,y)dy$ についても同様である. □

Green の公式とは, 次の定理のことである.

定理 31.7 D が有界な領域で, その境界は, いくつかの滑かな Jordan 曲線 $C_1, \cdots,$ C_n で構成されてゐるとせよ. このとき, 次が成り立つ：

$$\int_{\partial D} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

証明 まづ, 領域 D を単純な領域のときに示す. 即ち

$$D = \{\,(x,y)\,|\,a \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$$

と書けるとき, 媒介変数を y にとれる (図 31.7 を参照). 線分 C_2 と C_4 においては

媒介変数として y がとれるが $\dfrac{dx}{dy}=0$ である．よつて

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}P(x,y)dx &= \int_a^b (P(x,\varphi_1(x))dx + \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} P(b,y)\frac{dx}{dy}dy \\ &\qquad + \int_b^a (P(x,\varphi_2(x))dx + \int_{\varphi_2(a)}^{\varphi_2(a)} P(a,y)\frac{dx}{dy}dy \\ &= -\int_a^b \big(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\big)dx \\ &= -\int_a^b \Big(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\Big)dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy\end{aligned}$$

となり正しい．D が一般の領域の場合は, 図 31.7 に例示した様に, y 軸に平行な線分により, それを有限個の単純な領域に分割できる．この図において, 各小領域 D_j の周囲 ∂D_j は線分の部分では, 相互に行き交ふので, 線積分

$$\sum_j \int_{\partial D_j} P(x,y)dx$$

において, その部分の積分の総和は 0 となる．また, 各 D_j において主張が成り立つから

$$\begin{aligned}\int_{\partial D}P(x,y)dx = \sum_j \int_{\partial D_j} P(x,y)dx &= -\sum_j \iint_{D_j} \frac{\partial P(x,y)}{dy}dxdy \\ &= -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{dy}dxdy\end{aligned}$$

となつて, $Q(x,y)=0$ の場合に定理が証明された．
次に, 横に単純な領域に分割して同様な考察を行へば

$$\int_{\partial D} Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{dx}dxdy$$

が示される． □

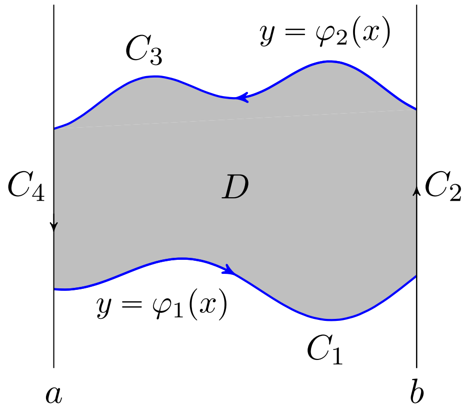


図 31.7

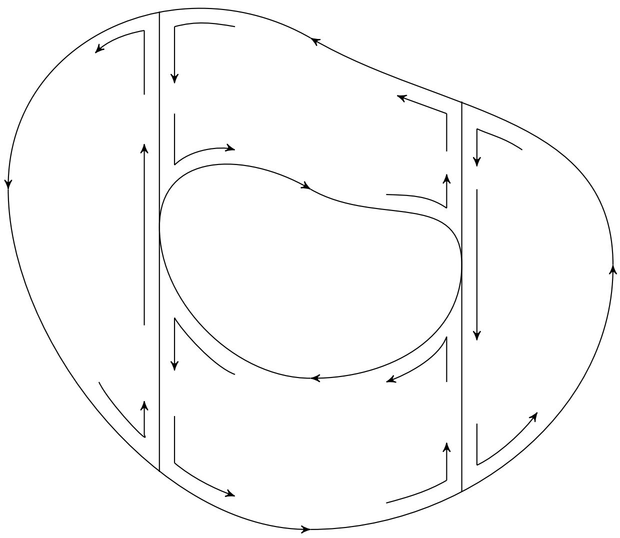


図 31.7

演 習 問 題

31.8 次の線積分を直接に計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_C (x^2+xy)dx+(3xy+y^3)dy,\ \ C:\ x=\cos t,\ y=\sin t \quad (t:\ 0\to 2\pi)$

31.9 次の線積分を Green の定理を使つて求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C xdy,\ \ C:\ x=\cos t,\ y=\sin t \quad (t:\ 0\to 2\pi)$

第 7 章　微分方程式

§ 32.　変数分離型の微分方程式

7 積分（7）　積分計算の応用として変数分離形の微分方程式の解法を理解する。

微分方程式 とは, 未知の函数 $y = f(x)$ について, $f(x)$ およびその導函数, 高次導函数に関する等式のことである．未知の函数 $f(x)$ の微分方程式が与へられたとき, そこから $f(x)$ を具体的に求めることを微分方程式を解くといふ．ここでは, 変数分離型と呼ばれる最も簡単な微分方程式の場合に限つて解説する．2 つ程, 例を挙げる．

例題 32.1　微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{32.2}$$

を満たす函数 $y = f(x)$ を求めよ．

解答　y が恒等的に 0 なる函数のとき, 与式が成り立つからそれは解の 1 つである．y が恒等的には 0 でないとし, $y \neq 0$ なる区間で考察する．このとき (32.2) から,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1.$$

両辺を x で積分すると

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int dx.$$

$$\therefore\ \log|y| = x + C.$$

$$\therefore\ y = \pm e^C e^x.$$

$$\therefore\ y = Ae^x \quad (A \neq 0 \text{ は定数}).$$

ここで, 最初に得た函数 $y = 0$ を合はせれば, 結局 A を任意の実数として,

$$y = Ae^x$$

が解である．□

例題 32.3　次の微分方程式を解け：

$$y' - xy = 2x.$$

解答　与式から, 以下の様に変形して

$$y' = x(y+2).$$

$$\frac{1}{y+2}y' = x.$$

$$\int \frac{1}{y+2}y'\,dx = \int x\,dx.$$

$$\int \frac{1}{y+2}\,dy = \int x\,dx.$$

$$\log|y+2| = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$y + 2 = \pm e^C e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

$$y + 2 = Ae^{\frac{1}{2}x^2} \quad (A \neq 0).$$

$$y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} - 2$$

を得る．ここで $A = 0$ の場合も解なので, 任意の解は A を任意の実数として,

$$y = Ae^{\frac{1}{2}x^2} - 2$$

となる．□

定義 32.4 変数分離型 一般に, 次の形の微分方程式を 変数分離型 と呼ぶ:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

但し, $f(x)$ や $g(y)$ は各変数に関して（区分的に）連続な函数である.

変数分離型の微分方程式は上の例 32.1 と同様な方法で解くことができる：

$$\frac{1}{f(x)}\frac{dy}{dx} = g(y).$$

$$\therefore \int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int f(x)\,dx.$$

$$\therefore \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx.$$

ここから, 両辺の不定積分が求まれば,

“ y の式” = “ x の式”

が得られる. これを y について解けば（解かなくても陰函数定理により）所望の函数 $y = f(x)$ が得られたことになる.

演 習 問 題

32.5 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = x^2 y$

(2) $y' = \dfrac{y}{x^2+1}$

(3) $y' = xy(x+1)$.

(4) $y' - 2xy = y$.

(5) $xy' - 2y = xy$.

(6) $y' + 2x = y + x^2 + 1$.

(7) $y' + 1 = e^{y+x}$.

§ 33. 定数係数の線形微分方程式

次に, 解法を一般的に扱へる微分方程式は, 定数係数の線形微分方程式 である. これについては, [2] の第 7 章を見ていただきたい.
さらに進んだ話題については…

第 8 章　級数

§ 34.　Landau の記号

Landau の記号 o について

<u>Taylor の定理</u>や <u>Taylor 展開</u> (<u>冪級数展開</u>) には 3 つの意味がある.
1．有限個の項で打ち切つたもの (つまり多項式) と剰余項の和が元の関数に等しいこと.
　(p.59. 定理 1.27, p.130, 定理 2.7)
2．冪級数展開において, その収束域の x に対しての等式として. (p.64, 系 1.2 など).
3．$|x-a|$ が小さいとき, 有限個の項で打ち切つたものと, 元の関数が近いことを示す. (Landau の o).

ここでは **3** について述べる. そのために Laudau の記号 $o(\ )$ といふものを説明する.
以下は **三宅敏恒著：『入門微分積分』**に基づく.
関数の局所的な評価を知りたいことは多い. それを表すために, $x=a$ の近くで定義された 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ に対して,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

のとき

$$f(x)=o(g(x))\quad(x\to a) \tag{34.1}$$

と書く. この記号を **Landau の記号**といふ (o はスモールオーと読む). 特に

$$f(x)=o(1)\quad(x\to a)$$

は $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ を意味する. 定義からわかる様に (34.1) は, a の近くでは $f(x)$ の方が $g(x)$ よりはるかに小さいことを意味する.

　以下は, 特に重要な $a=0$, $g(x)=x^n$ の場合に限つて説明する.

例 34.2　$\cos x-1=o(x)\ (x\to 0)$ である. 実際 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{1}=0.$

例 34.3　$\sin x-x=o(x^2)\ (x\to 0)$ である. 実際 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=0.$

$f(x) = o(x^m)$ $(x \to 0)$ を満たす関数 $f(x)$ に対して $f(x)$ の具体的な形は必要ないが, $x \to 0$ のときの評価が必要なとき, $f(x)$ の代りに $o(x^m)$ を用いると便利である.

例 34.4 $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$ とは

$$f(x) = 2x^2 + h(x), \quad \lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x^2} = 0$$

を意味する.

例 34.5 $\cos x = 1 + o(x)$ $(x \to 0)$ である. 例 34.2 の変形である.

例 34.6 $\sin x = x + o(x^2)$ $(x \to 0)$ である. 例 34.3 の変形である.

注意 34.7 Landau の記号を含む等式は, <u>左辺で右辺を評価する評価式</u>であつて, 普通の意味の等式ではないことに注意しなければならない.

例 34.8 $x \to 0$ のとき, $o(x^2) = o(x)$ ではあるが $o(x) = o(x^2)$ ではない.

注意 34.9 $x \to 0$ のとき, $o(x^m) - o(x^m) = o(x^m)$ ではあるが $o(x^m) - o(x^m) = 0$ といふ計算は正しくない. 実際, この左辺は評価式にすぎないので, それで評価される関数が常に 0 といふ決まつた関数になるとは限らないからである.

Landau の記号は, 慣れると非常に便利である.

定理 34.10 $x \to 0$ のとき, 次の (1), (2), (3) が成り立つ.
(1) $x^m o(x^n) = o(x^{m+n})$ (2) $o(x^m)o(x^n) = o(x^{m+n})$
(3) $m \leqq n$ ならば $o(x^m) + o(x^n) = o(x^m)$.

証明. たとへば (3) は

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^m)+o(x^n)}{x^m} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{o(x^m)}{x^m} + x^{n-m}\frac{o(x^n)}{x^n}\right\} = 0.$$

他も同様である. □

例 34.11 2 つ程, 例を挙げる :

$$\begin{aligned} x\{1+x+o(x)\} - \{1-2x+o(x)\} &= x + x^2 + xo(x) - 1 + 2x + o(x) \\ &= -1 + 3x + x^2 + o(x^2) + o(x) \\ &= -1 + 3x + o(x) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{1+2x-x^2+o(x^2)\}\{2+x+o(x^2)\} \\ &\quad = 2 + 5x - x^3 + (2+x)o(x^2) + (1+2x-x^2)o(x^2) + o(x^2)o(x^2) \\ &\quad = 2 + 5x - x^3 + o(x^2) + o(x^2) + o(x^4) \\ &\quad = 2 + 5x + o(x^2) \quad (x \to 0). \end{aligned}$$

漸近展開

Taylor の定理の剰余項が $x \to 0$ のときに<u>評価できれば</u>, 代りに Landau の記号を用いると便利である.

定理 34.12 $f(x)$ が 0 を含むある開区間で, n 回まで微分可能であり, $f^{(n)}(x)$ が連続であれば

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \to 0).$$

これを Landau の o を用いた <u>n 次の漸近展開</u>と呼ぶ.

証明 Taylor の定理により $0 < \theta < 1$ なる θ が存在して,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &\qquad + \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!}x^n \end{aligned}$$

よつて

$$\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!} x^n = o(x^n)$$

が示されればよい. ところが $f^{(n)}(x)$ は $x = 0$ で連続であるから

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!} x^n}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

となり成り立つ. □

例 34.13 $o(x^2)$ で評価した式を挙げる.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sin x = x + o(x^3)$$

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 + x + o(x^2).$$

Landau の記号に使ひ慣れると, 次の例の様に, 極限の計算を L'Hôspital(ロピタル) の定理を使つた場合よりもわかり易くできる.

例 34.14

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x+o(x^2))}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\Big) = -\frac{1}{2}.$$

注意 34.15 $x=0$ 以外の点 $x=a$ での漸近展開を調べたければ, 調べた関数 $f(x)$ に対して, $g(x)=f(x+a)$ とおいて $g(x)$ の $x=0$ での漸近展開を調べれば良い.

命題 34.16 $n \geqq m$ ならば $o(x^m+o(x^n)) = o(x^m)$.

証明. 実際,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^m+o(x^n))}{x^m+o(x^n)}\frac{x^m+o(x^n)}{x^m} = 0\cdot(1+0) = 0$$

となる. □

例 34.17 例へば $\dfrac{1}{1-X} = 1+X+X^2+\dfrac{X^3}{1-X} = 1+X+X^2+o(X^2)$ を使へば

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2+o(x^2)} &= 1+(x^2+o(x^2))+(x^2+o(x^2))^2+o\big((x^2+o(x^2))^2\big)\\ &= 1+x^2+o(x^2)+(x^4+2x^2o(x^2)+o(x^4))\\ &\qquad\qquad +o(x^2+2x^2o(x^2)+o(x^4))\\ &= 1+x^2+o(x^2)+o(x^3)+o(x^2)\\ &= 1+x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

がわかる. この様にして $x\to 0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x} &= \frac{x}{x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}\\ &= \frac{x}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}\\ &= \frac{x}{x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))}\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}\\ &= 1+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2+o\big((\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2\big)\\ &= 1+(\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))+o\big((\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2))^2\big)\\ &= 1+\tfrac{1}{6}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

を得る. これが教科書 p.67 の問題 1.11 [A] 2 や p.134 の問題 2.8 [A] 1 の出題の意図であると思はれる.

教科書 『北岡 · 深川 · 河村 : 工科系の微分積分学の基礎』の p.67 (改題)

11.1 [A] (p.67)

2. 2 次の関数について $x \to 0$ のとき, Landau の o を用いた n 次の漸近展開を求めよ.

(4) $\dfrac{e^x - 1}{x}$

解答

$$\begin{aligned}\frac{e^x - 1}{x} &= \frac{\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})}{x} \\ &= 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!} + o(x^n).\end{aligned}$$

(5) $\dfrac{\sin x}{x}$ 　(但し, n は奇数で $n = 2m + 1$ とせよ)

解答

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})}{x} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+1}).\end{aligned}$$

5. 次の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

解答

$$\begin{aligned}\frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^4)\right)}{x^2} &= \frac{\frac{x^2}{2!} + o(x^3)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} + o(x) \longrightarrow \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(3)′ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right)$

解答

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(\frac{1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)}{x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{\left(x-\frac{x^3}{2!}+o(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^2\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)} \\
&= \frac{-\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}{x^3+o(x^4)} \\
&= \frac{-\frac{1}{3}+o(x)}{1+o(x)} \longrightarrow -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

§ 35.　収束半径と Abel の定理

定義 35.1　収束半径

定理 35.2　d'Alembert の判定法

定理 35.3　Hadamard の判定法

項別積分

定理 35.4　（Abel の連続性定理）級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の収束半径を R とし, 実数 r は $0 < r \leqq R$ を満たすとせよ. このとき

$$\lim_{x \to r-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

が成り立つ.

例題 35.5　Newton の公式〔= 2.8 B2〕

$$\frac{\pi}{2} = \sin^{-1} 1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{3}{5 \cdot 8} + \frac{15}{7 \cdot 48} + \frac{105}{9 \cdot 384} + \cdots\right)$$

例題 35.6　Leibniz(?) 〔= 2.5 B2〕

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots.$$

解答　（解 1）

（解 2）　□

第 9 章　付 録

§ 36.　双曲線函数

定義 36.1

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義し, それぞれ 双曲線余弦函数（hypabolic cosine, コッシュ） 双曲線正弦函数（hypabolic sinh, シンチ） 双曲線正接函数（hypabolic tangent, タンチ） と呼ばれる. 名前の由来はあとで述べる.

　単調性

これらの自然な逆函数は

変数の意味…面積角

§ 37. ここまでのまとめ

0. ここでは, ここまでの学習を俯瞰(ふかん)し, 今後の方向性を述べ, 数学を学ぶ上で大切であろうことを伝えておきたい.

1. まずは, この厳しい状況下で, ここまでこの授業を受けて頑張ってこられたみなさんのことを, 心より犒(ねぎら)いたいと思います. 高校の学習とは随分違っていましたし, それを遠隔授業で学習するのは相当に大変だったと思います. しかし, この授業を理解できたならば, これより高度な数学についてもきっと学んでいけると思います. 今回は, そのための助言をすることにしました. 担当者の私見が多くなりますが, 参考にしていただけたら光栄です.

2. 数学を学ぶに際して, 気に掛けて欲しいことが 2 つあります. まずは,
① 「**数学はどちらかというと, 計算の学問ではなく, 理解するということ, それ自体の学問である**」ということです. このことは, 授業の中のところどころで感じていただけたのではないでしょうか. もう一つは
② 「**あなたが「自身が理解できていないこと」に正直になること, そして「理解できたことと理解できていないことの境界をくつきりさせる努力」をすること**」です. 大袈裟ですが, それがよく生きることに直結していくことになります. 「わからない」という状況は決して悪いことではない. 「わからない」という状況のあるがままをつぶさに知ることが重要であって, それを放置しないで, そこから追求し続けて欲しい.

3. 微分積分 1, 2 の内容構成について.
数学の中で微分積分学と呼ばれる部分の範囲を限定するのは困難である. 実際, いくつもの重要な分野への入り口が「微分積分学」の中に存在する. しかし, 我々がこの授業「微分積分 1」と後期の「微分積分 2」で学ぶのは, 微分積分学を最も狭く捉えた場合の範囲である.

ここまで, 微積分を学んできた. 微積分には微分と積分の 2 つの枠組みに加えて 1 変数と 2 変数（多変数）という 2 つの枠組みがあり, この相互の組合せで 4 つの部分に大別できる.

	微分法	積分法
1 変数函数	①	②
2 変数函数	③	④

本学では ① と ③ を前期に講義し, ② と ④ を後期に講義している. 大学によっては, ① と ② を前期に講義し, ③ と ④ を後期に講義している.

4. ここまでの授業で補足しておきたいこと.
もし, もっと講義の時間があったとしたら, （前期の範囲に）取り入れたい事項は以下

の通り：

これらは, 最後の **6** に紹介する参考書で, 適宜, 補われたい.

(1) **実数の厳密な扱い, 極限の厳密な扱いについて**.
実数は微積分の根底にある概念である. これについては, 様々な解説書がある. ここには書かないが, 興味のある方は調べてみるとよい.

(2) **級数の収束半径**については全く述べられなかったが, 力のある方は, 適宜, 下記に挙げた参考書等を通して学んでいただきたい. ここでは, これに関係することで, 講義の中で述べられなかったが, 頻繁に現れる次の極限についてのみ証明しておく.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0.}$$

証明 与えられた x に対し $2|x|$ より大きい自然数 N を選んで固定する. このとき, $n \geqq N$ ならば $|x|/n < 1/2$ であるから, 十分大きい n について

$$\begin{aligned}
&\frac{|x|^{n-N}}{N(N+1)(N+2)\cdots(n-1)n} \\
&= \frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdot\frac{|x|}{N+2}\cdots\cdots\frac{|x|}{n-1}\cdot\frac{|x|}{n} \\
&< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \\
\therefore\ \left|\frac{x^n}{n!}\right| &< \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty \text{ のとき})
\end{aligned}$$

となるからである. □

(3) **Taylor の定理の極限計算への応用**. **Landau 記号** というものを理解すると, 様々な極限値の計算が l'Hôpital の定理よりも遥かに計算し易くなる. これについては, `http://www2.meijo-u.ac.jp/~yonishi//teaching/meijo_eng/calculus2/landau_o.pdf` **ここ**にある file を読まれたい.

(4) **使用中の text の修正すべき点**. 現在, みなさんが使用中の text にはいくつか修正を要する箇所がある. その一覧が `http://www2.meijo-u.ac.jp/~yonishi//teaching/meijo_eng/calculus1/on_text.pdf` **ここ**にあるので, 参考にされたい.

(5) **Taylor 展開, 冪級数展開**. Taylor の定理において, n を無限に大きくすることにより, 冪級数展開（Taylor 展開）と呼ばれるものが得られる. これについては教科書の p.61, p.64 の系 1.2 などを見られたい.

(6) **$\tan^{-1} x$ の冪級数展開について**. $\sin x$ や $\cos x$ の原点での冪級数展開（Taylor 展開）はたいへん規則的であるが, $\tan x$ のそれは, 簡単には記述できない. しかし, 逆函数においては事情が逆転し, $\tan^{-1} x$ の冪級数展開はたいへん美しい. これは Taylor の定理とは別の方法で得られる. この展開は円周率 π の値の精密計

算に有用である．教科書の問題 p.67, 1.11[A] 4(2) には挙げられているが, 積分を使うことになるので, http://math-meijo-u.heteml.net//teaching/meijo_eng/calculus1/expansion_arc_tan.pdf **ここ**にある詳しく記した note を参照されたい.

5．微分積分 1, 2 の内容を別の視点から.
多項式, 有理函数, 無理函数, 三角函数, 逆三角函数, 指数函数, 対数函数さらにこれらの合成函数のすべてを初等函数と呼ばれることがある．特に, 三角函数, 逆三角函数, 指数函数, 対数函数は初等超越函数と呼ばれる．これらは, ほとんどが高校で学ぶ函数ではあって, 初等と名がついているものの, 実は相当に奥が深く, その一部を学ぶのが, 微積分である, といってもよい.

「微積分は初等函数の扱いに習熟すること」と述べることもできると思う．微分できる函数であれば, どれも同様に扱える理論が微分積分学には含まれているが, それだけが微分積分学だと理解するならば, 誤解である.
実際に役に立ち, 計算可能な函数はほんのわずかしかない．しかも,
それらを自由に使い熟(こな)せる様になるにかなりの練習が必要である. 実際, さらに高等な函数（円柱函数, 球函数, 楕円函数, さらに多変数の高等な超越函数など）が実際に存在し, 日夜, 数学者によって研究が積み重ねられている（下記 [Te] を覗いてみるとよい）.

6．参考書について.
「微分積分学」の教科書は数多く出版されているし, 今までも多くの教科書が出版され続けている．その 1 冊 1 冊が, 多くの大学の数学教員がそれぞれの思いを込めて書いたものであろうけれども, その中から何冊かを紹介しておきたい.

参考文献

[F1] 藤原 松三郎：解析第一編 微分積分学（改訂新編）第 1 巻, 内田老鶴圃, 2016 年

[F2] 藤原 松三郎：解析第一編 微分積分学（改訂新編）第 2 巻, 内田老鶴圃, 2017 年

[OYT²] 岡安, 吉野, 高橋, 武元：「微分積分学入門」, 裳華房

[M] 三村 征雄：『大学演習 微分積分』, 裳華房, 1970 年

[T] 遠山 啓(ひらく)：『数学入門 (下巻)』, 岩波新書, 第 X 章, pp.61-78

[I1] 石谷(いしたに) 茂：『∀ と ∃ に泣く』, 現代数学社

[I2] 石谷 茂：『ε-δ に泣く』, 現代数学社 (これの p.69 まで)

[Te] 寺澤 寛一(かんいち)：自然科学者のための数学概論（増訂版）, 岩波書店, 1983

—. 数学の論理について学ぶには [I1] を読まれるとよい.

—. 収束の定義を理解するには [T] や [I2] を勧める.

—. 微積分学を網羅的に学びたい方は, 是非 [F1], [F2] を手元において, 機会あるごと

に読むとよい. 古い本であるが, 最近, 大幅に改訂されて再版された. 数学書はかなり寿命が長い. これら越えるものは出版されていないと思われる. 実際, この本は, かなり詳しく書かれている[1].
—. しかし, ここまでの大著でなくても [OYT^2] があれば十分であろう.
—. また, より応用を重視し, 微積分を越えた数学を簡潔にまとめた本として, [Te] がある. これも古い本である.
—. [M] は有名な演習書であり, だいたいの演習問題のネタはこの本にある.
—. また, この講義に関連する記述が
`http://www2.meijo-u.ac.jp/~yonishi//teaching/teaching2020.html` **ここ**にあるので, 覗いてみると何か有益なことがあるかも知れない.

7. 数学の重要性について.
最初に「数学は理解の学問である」と述べたが, そのためには, 感覚的な理解と論理的な理解の双方が必要である. 人生においても, 感覚的な理解と論理的に精密な理解の双方が必要であり, これが両輪である. 数学を学ぶことは, 決して理工系の学問の基礎のためにあるだけではない. 数学的な思考のできる人は「よく生きること」に直結していくと思う. また, これからは, 科学が真に生かされる時代になってくると思う. そのときに, 数学的な思考ができる人が非常に重要になってくることは間違いないでしょう.

後期は積分について学ぶ. 工学で使ふためだけの解説をすることはできるが, 数学の広い世界にも触れていただきたいので, さうはしないで, 微分積分学を通じて数学の文化を味はつていただける様に書いた. 筆者が長年, 微分積分学を教へてきて, 微分積分学を含めた数学といふ学問について感じてゐることを, ところどころに随想風に述べてゐる. これが, 読者が今後, 数学を学んでいく上での参考になればと期待する.

[1] 例えば, 後期に学ぶ $\sin^n x$ や $\cos^n x$ の不定積分に関する漸化式は $n<0$ でも通用するが, そのことを述べた本を, これ以外に知らない.

Greek Alphabet

	大文字	小文字	読み	読み	対応する alphabet
1	A	α	alpha	アルファ	a
2	B	β	beta	ベータ	b
3	Γ	γ	gamma	ガンマ	g
4	Δ	δ	delta	デルタ	d
5	E	ε, ϵ	epsilon	イプシロン	e
6	Z	ζ	zeta	ゼータ	z
7	H	η	eta	エータ	ē
8	Θ	θ, ϑ	theta	テータ, シータ	th
9	I	ι	iota	イオタ	i
10	K	κ	kappa	カッパ	k
11	Λ	λ	lambda	ラムダ	l
12	M	μ	mu	ミュー	m
13	N	ν	nu	ニュー	n
14	Ξ	ξ	xi	クシイ	x
15	O	o	omicron	オミクロン	o
16	Π	π, ϖ	pi	パイ	p
17	P	ρ, ϱ	rho	ロー	r
18	Σ	σ, ς	sigma	シグマ	s
19	T	τ	tau	タウ	t
20	Υ	υ	upsilon	ウプシロン	u
21	Φ	φ, ϕ	phi	フィ, ファイ	ph
22	X	χ	chi	カイ	ch
23	Ψ	ψ	psi	プシイ, プサイ	ps
24	Ω	ω	omega	オメガ	ō

索引