微分積分 1　— 2 次導関数について —

(β 版, July 13, 2017, by Y. Ô.)

この note では, 2 次の導関数 z_{xy} と z_{yx} は, この両者が連続関数であれば一致すること[1]を説明する.

定理　領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を定義域とする偏微分可能な関数 $z = f(x, y)$ について, z_{xy} と z_{yx} が存在して, どちらも D において連続であれば

$$z_{xy} = z_{yx}$$

である.

証明. 1 点 $(x, y) = (a, b) \in D$ において $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ を証明する. 十分小さい絶対値をもつ実数 h, k に対して

$$\mathit{\Delta} = f(a + h, b + k) - f(a, b + k) - f(a + h, b) + f(a, b)$$

とおき, これを 2 通りに計算する. そのために

$$\varphi(x) = f(x, b + k) - f(x, b),$$
$$\psi(y) = f(a + h, y) - f(a, y)$$

とおくと, 仮定より $\varphi(x)$ は微分可能で

$$\mathit{\Delta} = \varphi(a + h) - \varphi(a)$$

であるから, 平均値の定理により

$$\mathit{\Delta} = h\varphi'(a + \theta_1 h) \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

と書ける. さらに

$$\varphi'(a + \theta_1 h) = f_x(a + \theta_1 h, b + k) - f_x(a + \theta_1 h, b)$$

であるから, 再び平均値の定理から

$$\varphi'(a + \theta_1 h) = k f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) \quad (0 < \theta_2 < 1)$$

と書ける. ゆゑに

$$\mathit{\Delta} = hk f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k)$$

となる. $\psi(y)$ についても同様の推論で

$$\mathit{\Delta} = hk f_{yx}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k) \quad (0 < \theta_3 < 1,\ 0 < \theta_4 < 1)$$

なる表示を得る. 従つて

$$f_{xy}(a + \theta_1 h, b + \theta_2 k) = f_{yx}(a + \theta_3 h, b + \theta_4 k).$$

ここで $h \to 0$, $k \to 0$ とすれば

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

を得る. □

[1]教科書 p.70, 定理 1.28