実施：2023 年 12 月 26 日 (火) 13:10-14:30, N-102 室

2023 年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2	無	なし	80 分	微分積分 2 火曜 3 時限, 教科書：北岡 他 著 ＋α	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

評点
/60

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. $\boxed{1}$ (3) はやや手間が掛かるので $*$ を付けておいた.

$\boxed{1}$ (各 3 点) 次の積分を求めよ：

(1) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^2+2x-3}\,dx.$

解答 Subtext p.136 の表の (3a) 型.

$$(\text{与式}) = \int \frac{4x}{(x+3)(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3}\right)dx$$
$$= \log|x-1| + 3\log|x+3| + C \;(C \text{ は積分定数}) \cdots \text{Ans.}$$
$$\left(= \log\left|(x-1)(x+3)^3\right| + C\right)$$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^x+2}{e^x+e^{-x}}\,dx.$

解答 $e^x = u$ とおくと $x = \log u$ で $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$ であるから, (同 p.136 の表の (3c) 型)

$$(\text{与式}) = \int \frac{u+2}{u+u^{-1}}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{u+2}{u^2+1}\,du = \int \frac{u}{u^2+1}\,du + \int \frac{2}{u^2+1}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\log(u^2+1) + 2\tan^{-1}u + C \;(C \text{ は積分定数})$$
$$= \frac{1}{2}\log(e^{2x}+1) + 2\tan^{-1}e^x + C \cdots \text{Ans.}$$

(3)* $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+2}{x}}\,dx.$ (同 p.136, (3e) 型, あるいは 28.24 の型)

解答 $u = \sqrt{\dfrac{x+2}{x}}$ をおくと $x = \dfrac{2}{u^2-1}$ となり, $\dfrac{dx}{du} = -\dfrac{4u}{(u^2-1)^2}$ となる.

$$(\text{与式}) = -\int u\cdot\frac{4u}{(u^2-1)^2}\,du$$
$$= \int\left(\frac{-1}{u-1}+\frac{-1}{(u-1)^2}+\frac{1}{u+1}+\frac{-1}{(u+1)^2}\right)du \;(\text{部分分数分解した})$$
$$= \log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1} + C \;(C \text{ は積分定数})$$
$$= \log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + \frac{2u}{u^2-1} + C = \log\left|\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x}}+1}{\sqrt{\frac{x+2}{x}}-1}\right| + 2\frac{\sqrt{\frac{x+2}{x}}}{\frac{x+2}{x}-1} + C$$
$$= \log\left|\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\right| + \sqrt{x(x+2)} + C$$
$$= 2\log\left|\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right| + \sqrt{x(x+2)} - \log 2 + C$$
$$= 2\log\left|\sqrt{x+2}+\sqrt{x}\right| + \sqrt{x(x+2)} + C' \cdots \text{Ans.}$$

$\boxed{2}$ (各 3 点) 次の定積分を求めよ：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx.$ ($u = \sin x$ とみる.)

解答

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdots \text{Ans.}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx.$

解答

$$(\text{与式}) = \int_0^1 \underset{セ}{1}\cdot\underset{ビ}{\tan^{-1}}x\,dx = \int_0^1 (x)'\tan^{-1}x\,dx = \Big[x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= \tan^{-1}1 - \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \cdots \text{Ans.}$$

(3) $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx.$ ($u = \frac{1}{\log x}$ とみる.)

解答

$$(\text{与式}) = \left[\frac{-1}{2(\log x)^2}\right]_{e^2}^{\infty} = 0 + \frac{1}{2(\log e^2)^2} = \frac{1}{8} \cdots \text{Ans.}$$

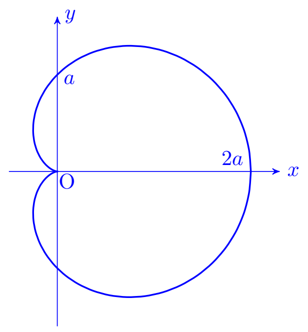
$\boxed{4}$ (5 点) $a > 0$ を定数とする. 極座標で

$$r = a(1+\cos\theta) \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

と表される曲線 (cardioid) で囲まれる部分の面積 S を求めよ. また, およその形も図示せよ.

解答

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= a^2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta)\,d\theta \quad \left(\because \int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = 0\right)$$
$$= a^2\int_0^{\pi}d\theta + 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= a^2\pi + 2a^2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \quad (\because \text{ Subtext の (30.11)})$$
$$= \frac{3\pi a^2}{2} \cdots \text{Ans.}$$



$\boxed{5}$ (7 点) 次の問に答へよ. 但し, 記憶してゐる (e^x や $\sin x$ などの) Maclaurin 展開 ($x=0$ における Taylor 展開) は使つてよい.

(1) $f(x) = \sin(x^3)$ の Maclaurin 展開.

解答

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

より

$$f(x) = \sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{1!} + \frac{x^{15}}{5!} - \frac{x^{21}}{7!} + \cdots \cdots \text{Ans.}$$

(2) $g(x) = e^x\cos x$ の Maclaurin 展開の x^3 までの部分を求めよ.

解答 e^x と $\cos x$ の Maclaurin 展開について, x^4 より低い次数の部分まで求めれば

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

より

$$g(x) = 1 + x + (1-1)\frac{x^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)x^3 + \cdots$$
$$= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots \cdots \text{Ans.}$$

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

6 (7 点) xy 座標平面上の曲線

$$x = t^2 \cos t,\ \ y = t^2 \sin t \ \ (0 \leqq t \leqq 1)$$

の<u>長さ</u> ℓ を求めよ.

解答

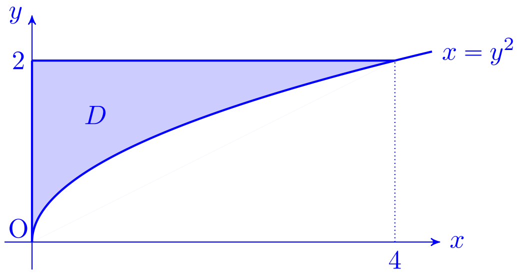
$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{(2t\cos t - t^2 \sin t)^2 + (2t \sin t + t^2 \cos t)^2}\, dt \\
&= \int_0^1 t\sqrt{t^2+4}\, dt \\
&= \left[\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\,(t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \tfrac{1}{3}\left(5^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \tfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 8\right) \cdots\cdots\ \text{Ans.}
\end{aligned}$$

7 (8 点) 次の類似積分について答へよ.

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 e^{y^3}\, dy\right) dx.$$

(1) 与式を $\displaystyle\iint_D e^{y^3}\, dxdy$ と表したときの領域 D を図示せよ.

解答



(2) 積分の順序交換を行ひ, 与へられた重積分の値を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^2 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3}\, dx\right) dx \\
&= \int_0^2 \left[x\, e^{y^3}\right]_0^{y^2} dx \\
&= \int_0^2 y^2 e^{y^3}\, dx \\
&= \tfrac{1}{3}\left[e^{y^3}\right]_0^2 \\
&= \tfrac{1}{3}(e^8 - 1) \ \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}
\end{aligned}$$

8 (7 点) 次の重積分の値を求めよ.

$$\iint_D (2x+y+1)\cos(x-y)\, dxdy,$$

但し $D = \{(x,y)\,|\, 0 \leqq 2x+y \leqq 2,\ 0 \leqq x-y \leqslant \frac{\pi}{2}\}$.

解答

$$u = 2x+y, \quad v = x-y$$

とおくと

$$x = \frac{u}{3} + \frac{v}{3}, \quad y = \frac{u}{3} - \frac{2v}{3}$$

である. このとき

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}.$$

よつて

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (u+1)\cos v\, du\right) dv \\
&= \frac{1}{9}\left(\int_0^2 (u+1)\, du\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, dv\right) \\
&= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}u^2 + u\right]_0^2 \Big[\sin v\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{9}(1-0) = \frac{4}{9} \quad \cdots\cdots\ \text{Ans.}
\end{aligned}$$

9 (8 点) 次の重積分を求めよ. (Hint: 極座標に変換)

$$\iint_D x^2\, dxdy,$$

但し $D = \{(x,y)\,|\, x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0\}$.

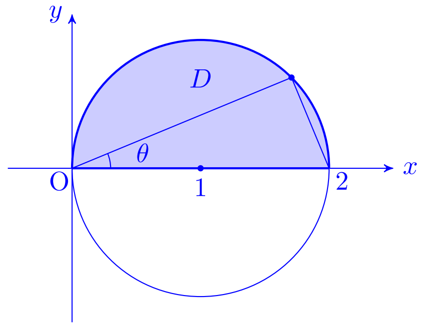
解答 $x^2 + y^2 \leqq 2x$ は

$$(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$$

と変形される. これより極座標表示では

$$D = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0 \leqq r \leqq 2\cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

と書ける.



よつて

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos\theta} (r\cos\theta)^2\, r dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\, d\theta \\
&= 4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{5\pi}{8} \ \ (\because\ \text{Subtext の (30.11)}) \ \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}
\end{aligned}$$