開講学部	問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者	評点
理工, 情報工学部	2	無	なし	80 分	微分積分 II	数学担当	

持込許可等	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
一切不可	学部		年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証，記名用のペン，鉛筆またはシャープペンシル，消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 解答欄が不足した場合は「裏へ」指示を書き裏面に解答してもよい．
注意 4. $\tan^{-1}x$ は $\tan x$ の逆関数を表す． $\sin^{-1}x$ は $\sin x$ の逆関数を表す．

1 (各 3 点) 次の積分を求めよ：

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^2+10x-9}{x^2+2x-3}\,dx$

解答 Subtext p.136, (3a) 型. 「分子」，「分母」の順で次数下げをして

$$(\text{与式}) = \int\left(3+\frac{4x}{(x+3)(x-1)}\right)dx = \int\left(3+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+3}\right)dx$$
$$= 3x+\log|x-1|+3\log|x+3|+C \ (C \text{ は積分定数}) \ \cdots \text{ Ans.}$$
$$\left(= 3x+\log\left|(x-1)(x+3)^3\right|+C\right)$$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}+e^x+2}{e^x+e^{-x}}\,dx$

解答 $e^x=u$ とおくと $x=\log u$ で $\frac{dx}{du}=\frac{1}{u}$ であるから（同 p.136 (3c) 型）

$$(\text{与式}) = \int\frac{u^2+u+2}{u+u^{-1}}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int\frac{u^2+u+2}{u^2+1}\,du$$
$$= \int du+\int\frac{u}{u^2+1}\,du+\int\frac{1}{u^2+1}\,du$$
$$= u+\frac{1}{2}\log(u^2+1)+\tan^{-1}u+C \ (C \text{ は積分定数})$$
$$= e^x+\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1)+\tan^{-1}e^x+C \ \cdots \text{ Ans.}$$

(3) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$ （同 p.136, (3e) 型, あるいは 28.24 の型）

解答 $u=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ をおくと $x=\dfrac{u^2}{u^2+1}$ となり，$\dfrac{dx}{du}=\dfrac{2u}{(u^2+1)^2}$ となる．

$$(\text{与式}) = \int \underset{\text{ビ}}{u}\cdot\underset{\text{セ}}{\frac{2u}{(u^2+1)^2}}\,du$$
$$= -u\cdot\frac{1}{u^2+1}+\int\frac{1}{u^2+1}du$$
$$= -u\cdot\frac{1}{u^2+1}+\arctan u+C \quad (C \text{ は積分定数})$$
$$= -\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{\frac{x}{1-x}+1}+\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$$
$$= -\sqrt{\frac{x}{1-x}}\cdot(1-x)+\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C$$
$$= -\sqrt{x(1-x)}+\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}+C.$$

注意：見掛け上，これと異る答は有り得る．

2 (各 3 点) 次の定積分を求めよ：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

解答

$$(\text{与式}) = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\underset{\text{ビ}}{x}\,\underset{\text{セ}}{\frac{1}{\cos^2 x}}\,dx = \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$$
$$= \frac{\pi}{3}\sqrt{3}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}-\log 2 \ \cdots \text{ Ans.}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1\tan^{-1}x\,dx$

解答

$$(\text{与式}) = \int_0^1 \underset{\text{セ}}{1}\cdot\underset{\text{ビ}}{\tan^{-1}x}\,dx = \int_0^1 (x)'\tan^{-1}x\,dx = \Big[x\tan^{-1}x\Big]_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= (\tan^{-1}1-0)-\frac{1}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1$$
$$= \tan^{-1}1-\frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\cdots \text{ Ans.}$$

(3) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+3x+2}\,dx$

解答

$$(\text{与式}) = \int_1^{\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx = \int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$
$$= \Big[\log|x+1|-\log|x+2|\Big]_5^{\infty}$$
$$= \lim_{M\to\infty}\left[\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\right]_1^M = \log\frac{3}{2}\cdots \text{ Ans.}$$

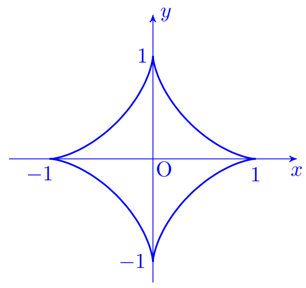
3 (4 点) $a>0$ を定数とする．Asteroid

$$\begin{cases} x=\cos^3\theta, \\ y=\sin^3\theta \end{cases} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答 変数 x を θ に置換するが，

x	$0 \to 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \to 0$



であるから，積分の向きに注意して，

$$4\int_0^1 y\,dx = -12\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x\cos^2 x\,dx$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,(1-\sin^2 x)\,dx$$
$$= 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x-\sin^6 x)\,dx = 12\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

4 (各 4 点) 次の問に答へよ．但し，記憶してゐる（e^x や $\sin x$ などの）Maclaurin 展開（$x=0$ における Taylor 展開）は使つてよい．

(1) $f(x)=\cos(x^2)$ の Maclaurin 展開．

解答

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$

より

$$f(x)=\cos(x^2)=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\cdots \ \cdots \text{ Ans.}$$

(2) $g(x)=e^x\sin x$ の Maclaurin 展開の x^3 までの部分を求めよ．

解答 e^x と $\cos x$ の Maclaurin 展開について，x^4 より低い次数の部分まで求めれば

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots,$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\cdots.$$

この 2 式の積を通常の多項式のときと同様に展開すれば（x^4 より高次の項は無視して），

$$g(x) = x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+\cdots$$
$$= x+x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots \quad \cdots \text{ Ans.}$$

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

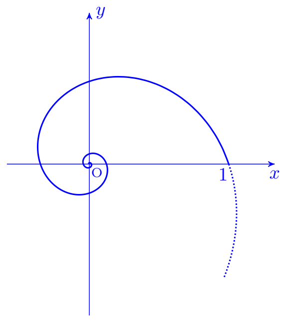
5 (7 点) $a>0$ を定数とする．極座標で

$$r = e^{-a\theta} \quad (0 \leqq \theta < \infty)$$

と表される対数螺旋の<u>長さ</u> ℓ を広義積分の考へ方により求めよ．また，およその形も図示せよ．

解答

$$\begin{aligned}
\ell &= \int_0^\infty \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^\infty \sqrt{e^{-2a\theta} + a^2 e^{-2a\theta}}\, d\theta \\
&= \int_0^\infty e^{-a\theta}\sqrt{1+a^2}\, d\theta \\
&= \sqrt{1+a^2}\int_0^\infty e^{-a\theta}\, d\theta \\
&= \sqrt{1+a^2}\left[-\frac{1}{a}e^{-a\theta}\right]_0^\infty \\
&= \sqrt{1+a^2}\left(0-\left(-\frac{1}{a}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \quad \cdots \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

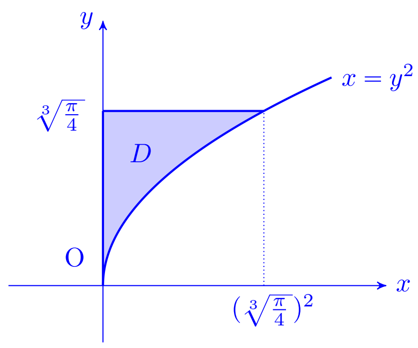


6 (8 点) 次の累次積分について答へよ．

$$\int_0^{(\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}})^2}\left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \sin y^3\, dy\right)dx.$$

(1) 与式を $\displaystyle\iint_D \sin y^3\, dxdy$ と表したときの領域 D を図示せよ．

解答



(2) 積分の順序交換を行ひ，与へられた重積分の値を求めよ．

解答

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}\left(\int_0^{y^2} \sin y^3\, dx\right)dy \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \Big[x \sin y^3\Big]_0^{y^2} dy \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} y^2 \sin y^3\, dy \\
&= -\tfrac{1}{3}\Big[\cos y^3\Big]_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} \\
&= -\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}(2-\sqrt{2}) \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

7 (7 点) 次の重積分の値を求めよ．

$$\iint_D (x-y+1)\cos(2x+y)\, dxdy,$$

但し　$D = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x-y \leqq 2,\ 0 \leqq 2x+y \leqq \frac{\pi}{6}\}$.

解答

$$u = x-y, \quad v = 2x+y$$

とおくと

$$x = \frac{u}{3}+\frac{v}{3}, \quad y = -\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}$$

である．このとき

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}.$$

よつて

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^2 (u+1)\cos v\, du\right)dv \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_0^2 (u+1)\, du\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos v\, dv\right) \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}u^2+u\right]_0^2\Big[\sin v\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{2}{3} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

8 (8 点) 次の重積分を求めよ．(Hint: 極座標に変換)

$$\iint_D x^3\, dxdy,$$

但し　$D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0\}$.

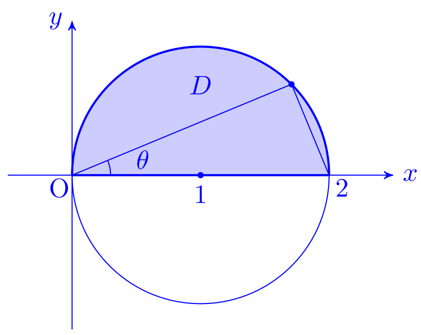
解答　$x^2+y^2 \leqq 2x$ は

$$(x-1)^2 + y^2 \leqq 1$$

と変形される．これは，下図を参考にすることで，極座標表示では

$$D = \left\{(r,\theta)\,\middle|\,0 \leqq r \leqq 2\cos\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

と書くことができる．



よつて（$\boxed{dxdy = r dr d\theta}$ に注意して）

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta} (r\cos\theta)^3\, r dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta)\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^{2\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{32}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8\theta\, d\theta \\
&= \frac{32}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (\because \text{ Subtext の } (30.11)) \\
&= \frac{7\pi}{8} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}
\end{aligned}$$