実施：2015 年 7 月 29 日 (水) 18:10-19:40, H-302 室

2015 年度　**前期　定期試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
1/1	有	なし	80 分	線形代数（再履修）水曜 6 時限, 参考書：三宅著《入門線形代数》	機械, 交通	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証，記名用のペン，鉛筆またはシャープペンシル，消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために，退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

1 (10 点) $z=\sqrt{3}+i$ の絶対値と偏角を求めよ．またこれを極形式の形に表せ．さらに z^6 を計算せよ．

【解答例】 絶対値は $|z|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{4}=\underline{2}$．　偏角は $2\cos\theta=\sqrt{3}, 2\sin\theta=1$ となる角 θ であるから，$\theta=\underline{\frac{\pi}{6}}$．

de Moivre の定理により $z^6=2^6(\cos 6\frac{\pi}{6}+i\sin 6\frac{\pi}{6})=\underline{\underline{-64}}$．

2 (15 点) 拡大係数行列の簡約化で連立 1 次方程式を解け:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -7 & 9 & 4 \\ -9 & 6 & 33 & -48 & -17 \\ -1 & 1 & 4 & -7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -15 \\ 67 \\ 8 \end{bmatrix}$$

◎ 検算を！…解を代入して成り立つか.

【解答例】 拡大係数行列を簡約化する:

$$\begin{array}{rrrrrcrl}
2 & -1 & -7 & 9 & 4 & \vdots & -15 & \\
-9 & 6 & 33 & -48 & -17 & \vdots & 67 & \\
-1 & 1 & 4 & -7 & -2 & \vdots & 8 & \\ \hline
0 & 1 & 1 & -5 & 0 & \vdots & 1 & ①+③\times 2 \\
0 & -3 & -3 & 15 & 1 & \vdots & -5 & ②-③\times 9 \\
-1 & 1 & 4 & -7 & -2 & \vdots & 8 & \\ \hline
1 & -1 & -4 & 7 & 2 & \vdots & -8 & -③ \\
0 & 1 & 1 & -5 & 0 & \vdots & 1 & ① \\
0 & -3 & -3 & 15 & 1 & \vdots & -5 & ② \\ \hline
1 & 0 & -3 & 2 & 2 & \vdots & -7 & ①+② \\
0 & 1 & 1 & -5 & 0 & \vdots & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 & ③+②\times 3 \\ \hline
1 & 0 & -3 & 2 & 0 & \vdots & -3 & ①-③\times 2 \\
0 & 1 & 1 & -5 & 0 & \vdots & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -2 &
\end{array}$$

これより

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x_1 & & -3x_3 & +2x_4 & & = & -3 \\ & +x_2 & +x_3 & -5x_4 & & = & 1 \\ & & & & +x_5 & = & -2 \end{array}\right.$$

$$\therefore \left\{\begin{array}{lcr} x_1 & = & 3x_3-2x_4-3 \\ x_2 & = & -x_3+5x_4+1 \\ x_5 & = & -2 \end{array}\right.$$

$x_3=c_1,\ x_4=c_2$ とおいて

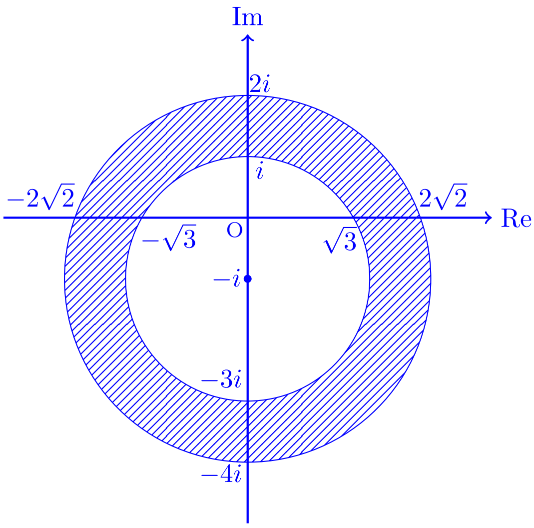
$$\left\{\begin{array}{lcrrr} x_1 & = & 3c_1 & -2c_2 & -3 \\ x_2 & = & -c_1 & +5c_2 & +1 \\ x_3 & = & c_1 & & \\ x_4 & = & & c_2 & \\ x_5 & = & & & -2 \end{array}\right. \qquad (c_1,\ c_2\in\mathbb{R})$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (c_1,\ c_2\in\mathbb{R})$$

$\cdots\cdots\cdots$ Ans.

3 (10 点) 複素数平面上で $2\leqq|z+i|\leqq 3$ で表わされる領域を図示せよ．

【解答例】 与えられた不等式は，幾何的には z と $-i$ との距離が 2 以上かつ 3 以下なので，$-i$ を中心にした半径 2 の円と，同じく半径 3 の円とで挟まれた領域になる．境界も含む．



4 (15 点) 次の行列式を因数分解せよ．
（できるだけ見通しの良い方法で計算せよ.）

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 1 & b & b^2+ca \\ 1 & c & c^2+ab \end{vmatrix}$$

【解答例】

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 1 & b & b^2+ca \\ 1 & c & c^2+ab \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b-a & b^2-a^2+ca-bc \\ 0 & c-a & c^2-a^2+ab-bc \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ ②-① \\ ③-① \end{array}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & b-a & (b-a)(b+a-c) \\ 0 & c-a & (c-a)(c+a-b) \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & 1 & b+a-c \\ 0 & 1 & c+a-b \end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+bc \\ 0 & 1 & b+a-c \\ 0 & 0 & 2c-2b \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ ③-② \end{array}$$

$$=2(a-b)(b-c)(c-a) \ \cdots\cdots\cdots \ \text{Ans.}$$

$\boxed{5}$ (15 点) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 10 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ の逆行列を <u>簡約化で</u> 求めよ．

◎ 検算を！　(掛けて E になるかどうか．)

【解答例】与えられた行列を A とし，$[A \,\vdots\, E]$ を簡約化する：

$$
\begin{array}{rrrcrrrl}
\hline
-1 & -2 & -5 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \\
3 & 4 & 10 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \\
2 & 3 & 7 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
-1 & -2 & -5 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -2 & -5 & \vdots & 3 & 1 & 0 & ② + ① \times 3 \\
0 & -1 & -3 & \vdots & 2 & 0 & 1 & ② + ① \times 2 \\
\hline
1 & 2 & 5 & \vdots & -1 & 0 & 0 & -① \\
0 & 1 & 3 & \vdots & -2 & 0 & -1 & -③ \\
0 & -2 & -5 & \vdots & 3 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & \vdots & 3 & 0 & 2 & ① - ② \times 2 \\
0 & 1 & 3 & \vdots & -2 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & -2 & ① + ② \times 2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 1 & 0 & ① + ③ \\
0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & -3 & 5 & ② - ③ \times 3 \\
0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & 1 & -2 & \\
\hline
\end{array}
$$

$\boxed{6}$ (15 点) <u>逆行列の公式を使って</u> $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & -10 \\ 10 & -1 & 17 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．　◎ 検算を！　(掛けて E になるかどうか．)

【解答例】与えられた行列を A として余因子行列 $\widetilde{A} = [a_{ij}^*]$ を計算すると，$a_{11}^* = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} = 7$，$a_{12}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 17 \end{vmatrix} = 1$，

$a_{13}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -10 \end{vmatrix} = 1$，

$a_{21}^* = (-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -10 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} = 2$，　$a_{22}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 17 \end{vmatrix} = -7$，

$a_{23}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -6 & -10 \end{vmatrix} = -4$，

$a_{31}^* = (-1)^4 \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -4$，　$a_{32}^* = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -1$，

$a_{33}^* = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = -1$ より

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

また，行列式は

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -6 & 1 & -10 \\ 10 & -1 & 17 \end{vmatrix} = (-1) \times (17 - 10) + (-1) \times (6 - 10)$$
$$= -7 + 4 = -3.$$

以上から

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \widetilde{A} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}$$

$\boxed{7}$ 行列式の値を計算せよ．

(1) (5 点) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 5 & 0 \\ 5 & 20 & -13 & -3 \end{vmatrix}$

【解答例】 下三角行列なので，

$$3 \times 2 \times 5 \times (-3) = -90 \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}$$

(2) (15 点) $\begin{vmatrix} -4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

【解答例】

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -9 & 17 & 18 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & 10 & 15 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} ① + ② \times 4 \\ \\ ③ + ② \times 2 \\ ④ + ② \times (-3) \end{array} \\
&= (-1) \times \begin{vmatrix} -9 & 17 & 18 \\ 3 & -1 & -6 \\ -3 & 10 & 15 \end{vmatrix} \\
&= (-3) \times \begin{vmatrix} -3 & 17 & 18 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 10 & 15 \end{vmatrix} \quad \boxed{1} \div 3 \\
&= (-3) \times \begin{vmatrix} 0 & 14 & 0 \\ 1 & -1 & -6 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} ① + ② \times 3 \\ \\ ③ + ② \end{array} \\
&= (-3) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} \\
&= 3 \times 14 \times 9 \\
&= 378 \quad \cdots\cdots\cdot \text{ Ans.}
\end{aligned}
$$

(ここより下は記入しないで下さい)