実施：2019 年 7 月 24 日 (水) 18:10-19:40, H-302 室

2019 年度　**前期　定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	線形代数 (再履修) 水曜 6 時限, 参考書：三宅著《入門線形代数》	工学系学科	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.　**注意** 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

$\boxed{1}$ (5 点) $z = -\sqrt{3} + i$ の絶対値と偏角を求めよ. またこれを極形式の形に表せ.

【略解】 $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ (絶対値).
$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ となる θ は $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (偏角).
よって　$z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$ (極形式).

$\boxed{2}$ (10 点) 拡大係数行列の簡約化で連立 1 次方程式を解け:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & -2 & 16 & 8 \\ -4 & 12 & -2 & 2 & -15 \\ 1 & -3 & 3 & -13 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 20 \\ -6 \end{bmatrix}$$

◎ 検算を！…解を代入して成り立つか.

【略解】 与へられた方程式の拡大係数行列は

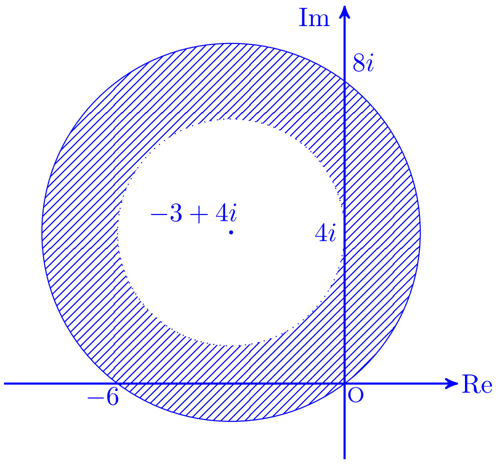
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

となり, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{3}$ (10 点) 複素数平面上で $3 < |z + 3 - 4i| \leqq 5$ で表わされる領域を図示せよ.

【解答例】 与えられた不等式は, 幾何的には z と $-3+4i$ との距離が 3 以上かつ 5 以下なので, $-3+4i$ を中心にした半径 3 の円と, 同じく半径 5 の円とで挟まれた領域になる.



内側の境界は含まない. 外側の境界は含む.

$\boxed{4}$ (5 点) 次の等式を示せ.　(できるだけ見通しの良い方法で計算せよ.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c).$$

【略解】

$$(\text{与式}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a-x & a-x & a-x \\ x & y-x & b-x & b-x \\ x & y-x & z-x & c-x \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}-\boxed{1} \\ \boxed{4}-\boxed{1} \end{matrix}$$

$$= (a-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y-x & b-x & b-x \\ y-x & z-x & c-x \end{vmatrix}$$ ① で展開し,

① の $(a-x)$ を括り出す.

$$= (a-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y-x & b-y & b-y \\ y-x & z-y & c-y \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \boxed{2}-\boxed{1} \\ \boxed{3}-\boxed{1} \end{matrix}$$ ① で展開し,

① の $(b-y)$ を括り出す.

$$= (a-x)(b-y)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z-y & c-y \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-y)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ z-y & c-z \end{vmatrix} \quad \boxed{2}-\boxed{1}$$

$$= (a-x)(b-y)(c-z)$$

$$= -(x-a)(y-b)(z-c).$$

5 (7 点) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ の逆行列を 簡約化で 求めよ．

◎ 検算を！　(掛けて E になるかどうか．)

【略解】

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

を簡約化すると（途中省略），

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

となるので，求める逆行列は

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\text{Ans.}$$

6 (8 点) 逆行列の公式を使って $\begin{bmatrix} -2 & 8 & 5 \\ -2 & 7 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ．

◎ 検算を！　(掛けて E になるかどうか．)

【略解】与へられた行列を $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ とおく．9 つの $a_{ij}{}^* = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$ を計算することで，

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

を得る．また $|A| = 3$ である（計算途中は省略）．よつて

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots\text{Ans.}$$

7 行列式の値を計算せよ．

(1) (5 点) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 10 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

【略解】

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} && \begin{array}{l} ①-②\times 3 \\ \\ ③-②\times 3 \end{array} \\ &= -4 \times \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} && \boxed{1}\ \text{で展開} \\ &= -4 \times (-23) \\ &= 92 \quad \cdots\cdots\text{Ans.} \end{aligned}$$

(2) (10 点) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \\ 5 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

【略解】

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} && ④-① \\ &= (-6) \times \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} && ④\ \text{で展開} \\ &= -6 \times \begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} && ②-①\times 2 \\ &= -6 \times 7 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} && ②\ \text{で展開} \\ &= -42 \times (-9) \\ &= 378 \quad \cdots\cdots\text{Ans.} \end{aligned}$$