

2019 年度 前期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80分	線形代数 (再履修) <small>水曜 6 時限, 参考書: 三宅著《入門線形代数》</small>	工学系学科	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

1 (10 点) $z = -1 + \sqrt{3}i$ の絶対値と偏角を求めよ。またこれを極形式の形に表せ。

【略解】 $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ (絶対値).
 $\cos \theta = \frac{-1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (偏角).
 よつて $z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ (極形式).

2 (15 点) 拡大係数行列の簡約化で連立 1 次方程式を解け:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 32 & -5 \\ 2 & -6 & 2 & -6 & 18 \\ -4 & 12 & 7 & -43 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

◎ 検算を! ...解を代入して成り立つか.

【略解】 与へられた方程式の拡大係数行列は

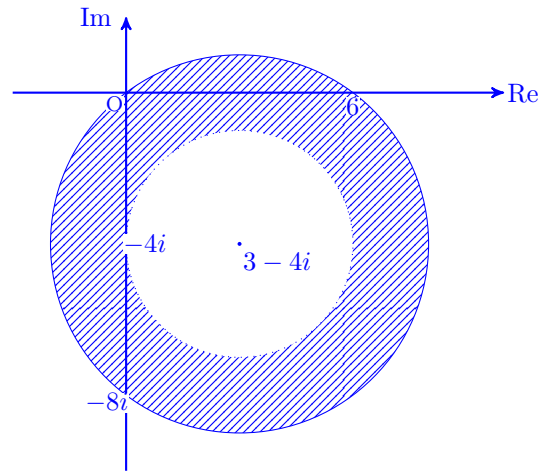
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

となり, 解は

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

3 (10 点) 複素数平面上で $3 < |z - 3 + 4i| \leq 5$ で表わされる領域を図示せよ。

【解答例】 与えられた不等式は, 幾何的には z と $3 + 4i$ との距離が 3 以上かつ 5 以下なので, $3 - 4i$ を中心にした半径 3 の円と, 同じく半径 5 の円とで挟まれた領域になる。



内側の境界は含まない。外側の境界は含む。

4 (15 点) 次の等式を示せ。

$$\left(\begin{array}{cccc} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{array} \right) = -(a-b)^4.$$

(できるだけ見通しの良い方法で計算せよ.)

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & a-b \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} - \textcircled{1} \\ \textcircled{3} - \textcircled{1} \end{array} \\ &= a \begin{vmatrix} 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & a-b \\ b & b & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & b & b \\ a-b & 0 & a-b \\ 0 & a-b & a-b \end{vmatrix} \\ &\quad \textcircled{1} \text{で展開} \\ &= a \begin{vmatrix} 0 & a-b & 0 \\ a-b & 0 & a-b \\ b & b & a-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{array} \\ &\quad - b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & a-b \\ a-b & -(a-b) & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{3} - \textcircled{1} \\ \textcircled{2} - \textcircled{1} \end{array} \\ &= -a(a-b) \begin{vmatrix} a-b & a-b \\ b & a-b \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} \text{で展開} \\ \textcircled{1} \text{で展開} \end{array} \\ &\quad - b^2 \begin{vmatrix} a-b & a-b \\ -(a-b) & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{1} \text{で展開} \\ \textcircled{2} \times (a-b)^{-1} \end{array} \\ &= -a(a-b)^2 \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \textcircled{2} \times (a-b)^{-1} \\ -b^2(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -(a-b) & 0 \end{vmatrix} \textcircled{1} \times (a-b)^{-1} \end{array} \\ &= -a(a-b)^2(a-2b) - b^2(a-b)^2 \\ &= -(a-b)^2(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= -(a-b)^4. \end{aligned}$$

5 (15点) $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ の逆行列を 簡約化 で求めよ.

◎ 検算を! (掛けて E になるかどうか.)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

を簡約化すると (途中省略),

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

となるので, 求める逆行列は

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

6 (15点) 逆行列の公式 を使って $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ の

逆行列を求めよ. ◎ 検算を! (掛けて E になるかどうか.)

与へられた行列を $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ とおく. 9 つの $a_{ij}^* = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$ を計算することで,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 11 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

を得る. また $|A| = 3$ である (計算途中は省略). よつて

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 5 & 11 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7 行列式の値を計算せよ. 済み

(1) (5点)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 & 10 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times \begin{vmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{①} - \text{②} \times 3 \\ &= -4 \times (-1) \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{③} - \text{②} \times 3 \\ &= -4 \times (-1) \cdot (-23) \quad \text{① で展開} \\ &= 92 \end{aligned}$$

(2) (15点)
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{(与式)} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{④} - \text{③} \\ &= -(-6) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{④ で展開} \\ &= 6 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{②} - \text{③} \times 2 \\ &= 6 \times (-7) \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{② で展開} \\ &= 6 \times (-7) \times 9 \\ &= -378 \quad \dots\dots \text{Ans.} \end{aligned}$$