線 形 代 数 学

2 0 2 5 年 度 版

はじめに

この冊子（講義 note）は, 名城大学理工学部数学科の 2018 年度と 2019 年度の「線形代数 1」,「同 演習」,「線形代数 2」,「同 演習」,「線形代数 3」,「線形代数 4」の授業用に少しづつ配布しながら執筆したものを, 修正を加へてまとめたものである.

前半は, 筆者が長年の講義で愛用してきた [M1] からかなり影響を受けてゐて, [M1] とその拡大版 [M2] のすぐれた解説の方法を随所に取り入れてゐる. 但し, 講義の方針に合はせて, 行列式を先に述べて, 連立 1 次方程式は後に述べてゐる.

「線形代数 1」から「線形代数 4」のおよその内訳は以下の通り：

—. 第 1 章から第 4 章まで ……「線形代数 1」 及び「同 演習」,
—. 第 5 から 第 6 章まで ……「線形代数 2」 及び「同 演習」,
—. 第 7 章から第 9 章まで ……「線形代数 3」,
—. 第 10 章から第 11 章まで ……「線形代数 4」.

余裕がある学生は, さらに進んで,

—. 第 12 章の Hermite 空間と正規行列の unitary 行列による対角化

を自習すると, 今後の数学の学習に有益であらう.

以下, 第 6 章以下のことについて述べる. これまでは基礎の体 [1] を実数体や複素数体としてきたが, 線形代数学はそもそも基礎の体を一般にして構築されてゐる. 一般の体について成立することと, さうでないことを意識して理解することが大切である. しかし, 直ちにその様な理解に至るのは困難かも知れないので, 主に実数体や複素数体を基礎の体としながら, 上記の事項を学ぶ.

第 8 章で学ぶ内積空間や対称行列の対角化は, 実数体上に特有のことである. これらの内容は 2 次曲線や 2 次曲面を分類することで一層理解が深まるであらう. 第 10 章では, 後の節のために, 線形変換が与へられた vector 空間を, その線形変換に応じた部分空間の和に分けることや, 双対空間, 商空間などの基本事項を学ぶ. 第 11 章では Jordan 標準形と呼ばれるものを学ぶ. これは, 必ずしも対角化できない行列の 1 種の標準形であつて, これにより, 線形変換を理解し易くなる. そのあと, 第 12 章では複素数体上で上記の内積の類似である Hermite 内積なるものと, 正規行列の unitary 行列による対角化について学ぶ.

問や演習問題については, 入念に選んだので, 積極的に取り組んでみて欲しい.

できれば, 2 次形式についても, この講義に盛り込みたかつたが, 分量として無理があるので取り止めた. また, Jordan 標準形の理論展開を「代数学 2」で学ぶ単因子論を用ゐて行なふ方法がある. 詳しくは, たとへば [S2] の第 6 章などを読まれたい.

この冊子を講義に使用された教員へ：現時点で, この冊子は, 次 page に挙げたすぐれた教科書からの剽窃に過ぎない [2] ので, 今後は, できるだけ特徴を出せる様に手直しを続けたいと思ふ. 是非とも忌憚のないご意見を寄せていただきたい.

最後に, 伯田恵輔氏, 興津俊介氏から多くの誤植を指摘して頂いた事を追記し謝意を表する.

大西 良博

---

[1] 体については 第 6.1 節に説明がある.
[2] ほとんどすべての線形代数学や微分積分学の大学用教科書はすべて剽窃であらう.

参 考 文 献

[A] 有馬 哲 著：線型代数入門, 1974, 東京図書
[M1] 三宅 敏恒 著：入門線形代数, 1991, 培風館
[M2] 三宅 敏恒 著：線形代数学 — 初歩からジョルダン標準形へ —, 2008, 培風館
[S] 佐武 一郎 著：線型代数学 (数学選書 1), 1974, 裳華房
[S2] 齋藤 正彦 著：線型代数入門 (基礎数学 1), 1966, 東京大学出版会
[K] 片山 孝次 著：複素数の幾何学 (数学入門シリーズ 3), 1982, 岩波書店

基本的な記号

この冊子では, 以下の記法を使ふ：

$\mathbb{N}$ ……… 自然数 1, 2, 3, $\cdots$ の全体,
$\mathbb{Z}$ ……… 整数の全体,
$\mathbb{Q}$ ……… 有理数の全体,
$\mathbb{R}$ ……… 実数の全体,
$\mathbb{C}$ ……… 複素数の全体.
$\boldsymbol{i}$ ……… 虚数単位 (i は添字として多用するので, これと区別するために bold-italic 体を使用),
$o(x)$ …. 多項式としての 0 ($= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$).

集合 C と, その部分集合 A, B について $A \setminus B$ は B に属さない A の元の全体を意味する.

目 次

第 1 章　複素数

ここでは, 高校で学んだ複素数を厳密に再構成し, その基本的な性質を学ぶ.

1.1　複素数の構成

まづ, 2 つの実数の組の全体

$$\mathbb{C} = \{\, (x,\, y) \,|\, x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \,\}$$

を考へて, これの要素を $\alpha = (a,\, b)$, $\beta = (c,\, d)$ の様に書く. この集合 $\mathbb{C}$ に対して, 次の 2 種類の演算（和と積）を定める：即ち, 任意の $\alpha = (a,\, b)$, $\beta = (c,\, d) \in \mathbb{C}$ に対して,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= (a + c,\, b + d), \\ \alpha\beta &= (ac - bd,\, ad + bc). \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

ここで, 演算とは次の意味で用ゐられてゐる. 一般に, 集合 A について, 写像

$$\varphi \ :\ A \times A \longrightarrow A$$

が与へられたとき, A に演算 φ が定義された, といはれる.

以下のことは, 簡単に確かめられる.

命題 1.1.2　集合 $\mathbb{C}$ について, 上の状況下で次が成り立つ.

C0　上の (1.1.1) のそれぞれは $\mathbb{C}$ の 2 種類の演算を定める. それを $\mathbb{C}$ の加法, 乗法と呼ぶ. これらについて, 次の性質 **C1〜C9** が全て満たされる：（下記において $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{C}$ は任意の元を表す）

C1　（加法に関する結合律）　$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

C2　（加法に関する交換律）　$\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

C3　$0 = (0, 0)$ は加法に関する単位元と呼ばれ $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ を満たす.

C4　各 $\alpha = (a, b)$ に対して $-\alpha = (-a, -b)$ は加法に関する逆元と呼ばれ $a + (-a) = 0$ を満たす.

C5　（乗法に関する結合律）　$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

C6　（乗法に関する交換律）　$\alpha\beta = \beta\alpha$.

C7　$1 = (1, 0)$ は乗法に関する単位元と呼ばれ $a1 = 1a = a$ を満たす.

C8　各 $\alpha = (a, b) \neq 0$ に対して $\alpha^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2},\, \dfrac{b}{a^2 + b^2}\right)$ は乗法に関する逆元と呼ばれ $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$ を満たす.

C9　（分配律）　$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$.

上の 1.1.2 を一言で云へば, $\mathbb{C}$ は四則演算が自由にできる（但し 0 による除法は除く）といふことである. その様な集合は体（たい）と呼ばれ, 特に, $\mathbb{C}$ を複素数体, その元を複素数と呼ぶ.

問 1.1.3 上の演算に関して $(0,1)(0,1) = (-1,0)$ となることを示せ.
（即ち $(0,1)$ が虚数単位 $\boldsymbol{i}$ に対応し, この関係式が $\boldsymbol{i}^2 = -1$ に対応する.）

問 1.1.4 上の 1.1.2 の主張をすべて確認せよ.

この章では, 以後, 特に断らない限り, 複素数を α, β 等の Greek 文字で表示する. また, $\mathbb{C}$ の元 (a,b) を通常の記法で $a+b\boldsymbol{i}$ と書く. つまり

$$(a,b) = a+b\boldsymbol{i},$$
$$\mathbb{C} = \{a+b\boldsymbol{i} \,|\, a,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

また, $(a,0)$ なる元を $a \in \mathbb{R}$ と同一視し, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ であるとする. かうすると, 実数における四則演算は複素数としての四則演算と一致する（確かめよ）から, 実数全体 $\mathbb{R}$ はその演算も込めて $\mathbb{C}$ の部分集合と見做される.

また, $(0,b) = b\boldsymbol{i}$ と書かれて, この形の元は $b \neq 0$ なる場合に純虚数と呼ばれる. もちろん $(0,0)=0$, $(1,0)=1$, $(-1,0)=-1$, $(0,1)=\boldsymbol{i}$, $(0,-1)=-\boldsymbol{i}$ などと書かれる.

実部, 虚部, 複素共役 複素数 $\alpha = (a,b) = a+b\boldsymbol{i}$ に対し, a を α の実部, b を α の虚部といひ, 本書では次の様に記す [3]：

$$a = \mathrm{real}(\alpha), \quad b = \mathrm{imag}(\alpha)$$

複素数の実部や虚部は a, b, x, y などの alphabet で表示する. $\alpha = a+b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ に対し $\overline{\alpha} = a - b\boldsymbol{i}$ と定義し, これを α の共役（複素共役, 共役複素数）と呼ぶ. 明らかに

$$\alpha \in \mathbb{R} \iff \alpha = \overline{\alpha}$$

であり, また $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について

$$\mathrm{real}(\alpha) = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}, \quad \mathrm{imag}(\alpha) = \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2\boldsymbol{i}},$$
$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \quad (\text{但し } \beta \neq 0) \tag{1.1.5}$$

が成り立つことも容易にわかる.

例題 1.1.6 実際の計算を例示しておく：

$$\overline{\frac{3+2\boldsymbol{i}}{1-4\boldsymbol{i}}} = \frac{3+2\boldsymbol{i}}{1+4\boldsymbol{i}} = \frac{(3+2\boldsymbol{i})(1-4\boldsymbol{i})}{(1+4\boldsymbol{i})(1-4\boldsymbol{i})}$$
$$= \frac{(3-8)+(-12+2)\boldsymbol{i}}{1^2+4^2} = \frac{-5-10\boldsymbol{i}}{17} = \frac{-5}{17} - \frac{10}{17}\boldsymbol{i}.$$

演習問題 1.1

1.1.7 次の複素数を $a+b\boldsymbol{i}$ $(a,\ b \in \mathbb{R})$ の形に表せ.

(1) $(3+4\boldsymbol{i})(2-3\boldsymbol{i})$. (2) $\dfrac{4-19\boldsymbol{i}}{5-2\boldsymbol{i}}$. (3) $\dfrac{7-8\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}}$.

1.1.8 複素数 α, β について, (1.1.5) が成り立つことを示せ.

---
[3] 通常は $\mathrm{Re}(\alpha)$, $\mathrm{Im}(\alpha)$ などと記すが, 後の 7.1.8 の記号との混同を避けるために, 本書ではこの記法とした.

1.2　複素数平面, 絶対値, 偏角, 極形式

$\mathbb{C}$ の元 $\alpha = a + b\boldsymbol{i}$ を a の値を横軸 (<u>実軸</u>と呼ぶ) にとり, b の値を縦軸 (<u>虚軸</u>と呼ぶ) にとつた平面上の点として表すことで, $\mathbb{C}$ の各元はこの平面上の点と 1 対 1 に対応する．この様な平面（図 1.2.1）を <u>複素数平面</u>または <u>Gauss（ガウス）[4] 平面</u>と呼ぶ.

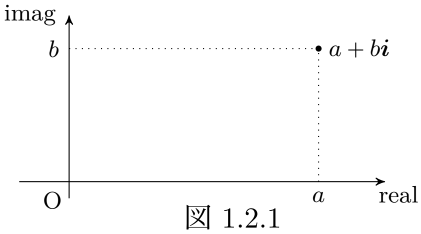


図 1.2.1

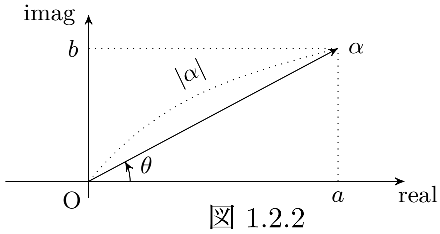


図 1.2.2

複素数平面上で原点 O から $\alpha = a + b\boldsymbol{i}$ までの距離 $\sqrt{a^2+b^2}$ を $|\alpha| = |a + b\boldsymbol{i}|$ と書いて α の <u>絶対値</u>と称する (図 1.2.2)．三角函数の性質から, 0 と異なる $a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ に対し, 次の式を満たす $\theta \in \mathbb{R}$ が存在する：

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

つまり θ は $\angle \alpha \mathrm{O} a$ であつて,

$$a + b\boldsymbol{i} = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta), \quad r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

この表示を $a + b\boldsymbol{i}$ の <u>極形式</u>による表現と称する．この θ は複素数平面において 原点から $a + b\boldsymbol{i}$ を通つて延びる半直線が, 実軸となす角の大きさに他ならない．それゆゑ, その値は 2π の整数倍の加減の曖昧さがある．θ を $a + b\boldsymbol{i}$ の <u>偏角</u> (argument) と呼び,

$$\theta = \arg(a + b\boldsymbol{i})$$

と表示する．これを $-\pi < \theta \leqq \pi$ になる様に選ぶときは, $\theta = \mathrm{Arg}(a + b\boldsymbol{i})$ と書いて, これを $a + b\boldsymbol{i}$ の <u>偏角の主値</u>と呼ぶ.

積の幾何学的な意味　分配法則

$$(a + b\boldsymbol{i})(c + d\boldsymbol{i}) = a(c + d\boldsymbol{i}) + b\boldsymbol{i}(c + d\boldsymbol{i})$$

にもとづき, 積の意味を考察する．

$\boldsymbol{i}(c + d\boldsymbol{i}) = -d + c\boldsymbol{i}$ であるから, $\boldsymbol{i}$ 倍は原点 O 中心の角 $\frac{\pi}{2}$ の回転である (図 1.2.3 参照). a 倍, b 倍は O を中心にした単なる a 倍, b 倍の (正負により向き付けられた) 拡大 (縮小) である．よつて, これらの和は $a + b\boldsymbol{i}$ を O を中心に $\sqrt{c^2+d^2}$ 倍して, $\arg(c + d\boldsymbol{i})$ だけ回転したものになる．つまり, 次式が成り立つ：

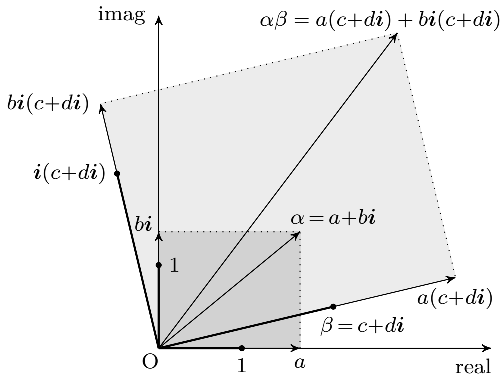


図 1.2.3

(1.2.4)　$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|, \quad \arg(\alpha\beta) = \arg(\alpha) + \arg(\beta) + (2\pi \text{ の整数倍}).$$

ここで, この式の α を $\frac{\alpha}{\beta}$ と書き替へた式を整理すれば, 次式を得る：

(1.2.5)　$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (\beta \neq 0), \quad \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg(\alpha) - \arg(\beta) + (2\pi \text{ の整数倍}).$$

[4] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Germany 生.

積の書き換へ 以上のことを極形式で書き直せば

$$r_1(\cos\theta_1 + \boldsymbol{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + \boldsymbol{i}\sin\theta_2) = r_1 r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + \boldsymbol{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big) \tag{1.2.6}$$

となる．これは, 三角函数の加法公式

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1+\theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2,\\ \sin(\theta_1+\theta_2) &= \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

を使へば示されるし, 上の幾何学的意味からも分る．後者の場合は三角函数の加法公式が逆に証明される．

演 習 問 題 1.2

1.2.8 次の複素数を極形式に直せ．

(1) $3+3\boldsymbol{i}$. (2) $\sqrt{3}-\boldsymbol{i}$. (3) $\frac{-1+\sqrt{3}\boldsymbol{i}}{2}$.

1.2.9 (1.2.6) を 2 通りに証明せよ．

(1) (1.2.4) を使つた説明で．

(2) 左辺を展開し, 三角函数の加法公式などの性質を使つて．

1.3 de Moivre の公式

式 (1.2.6) で $r_1 = r_2$, $\theta_1 = \theta_2$ とすれば

$$\big(r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)\big)^2 = r^2(\cos 2\theta + \boldsymbol{i}\sin 2\theta)$$

を得る．さらに (1.2.6) で $r_1 = r^2$, $r_2 = r$, $\theta_1 = 2\theta$, $\theta_2 = \theta$ とすれば

$$\big(r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)\big)^3 = r^3(\cos 3\theta + \boldsymbol{i}\sin 3\theta)$$

となる．帰納的に考へて, 次の公式で自然数 n の場合を得る．

> **定理 1.3.1**（de Moivre（ドゥモワヴル）[5] の公式）整数 n に対して,
>
> $$\big(r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)\big)^n = r^n(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta) \tag{1.3.2}$$
>
> が成り立つ． 特に $r=1$ の場合は
>
> $$(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta.$$

問 1.3.3 任意の整数 n について (1.3.2) が成立することを示せ．

演 習 問 題 1.3

1.3.4 次の式の値を求めよ． （Hint：極形式への変形と de Moivre の公式を利用する．）

(1) $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4321}$. (2) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}\right)^{331}$. (3) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}}{2}\right)^{2331}$.

(4) $(1+\sqrt{3}\,\boldsymbol{i})^7 + (1-\sqrt{3}\,\boldsymbol{i})^7$.

[5] Abraham de Moivre (1667-1754) France 生．

1.4 代数学の基本定理

n を自然数とし, $f(z)$ を複素数を係数とする z に関する n 次多項式とする. α を $f(z)=0$ の解 (根) とする. つまり $f(\alpha)=0$ とする. このとき $f(z)$ は $(z-\alpha)$ で割り切れて $f_1(z)=f(z)/(z-\alpha)$ は $(n-1)$ 次式となる. もし $f_1(\alpha)=0$ であれば, 方程式 $f_1(z)=0$ は α を 2 重根に持つ, あるいは, 解 (根) α の重複度は 2 である, といはれる. 3 重根, 4 重根についても同様に定義される. それらをまとめて, 重根と称する.

命題 1.4.1 n を自然数とし, $f(z)$ を複素数を係数とする z に関する n 次多項式とする. 方程式 $f(z)=0$ は重解の重複度も含めて, 高々 n 個しか解を持たない.

証明 $f(z)=0$ の根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m 個) とすれば

$$\frac{f(z)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_m)}$$

は約分されて $(n-m)$ 次の多項式となるから $n-m \geqq 0$, つまり $n \geqq m$ である. □

実際は常に, 次数と丁度同じ個数の根を持つ. 即ち, 次のことが成り立つ.

定理 1.4.2 (代数学の基本定理) 任意に自然数 n と $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ が与へられたとせよ. ここで $a_0 \neq 0$ を仮定する. このとき, 不定元 z に関する多項式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

は $\mathbb{C}$ において n 個の 1 次式の積に分解する. 即ち, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$f(z) = a_0(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$$

となる.

これの証明は簡単ではないので, ここでは行はない. この定理を初めて証明したのは Gauss であり, 彼の学位論文になつてゐる. Gauss 自身はいくつもの証明を与へたが, その他にも多くの方法が知られてゐる. 通常はまづ, 与へられた代数方程式 $f(z)=0$ が $\mathbb{C}$ に少くとも 1 つの複素数 α を根に持つことを証明する. これから $f(z)/(z-\alpha)=0$ の解の存在が知られるので, あとは帰納的に進めばよい. 最も実効的な証明は, 微積分で学ぶ Newton 法を複素数平面で行ふことだと思はれる. この方法だと, 実際に計算機で近似値を求めることができる.

この定理に興味のある読者は, 例へば,

片山(かたやま) 孝次(こうじ) 著: 複素数の幾何学, 岩波書店, 数学入門シリーズ 3, pp. 238–243

を覗いてみて欲しい. これには Gauss の第 1 証明が説明されてゐる. また「複素函数論」に関する本には, その中で証明が与へられてゐる筈である.

1.5 de Moivre の公式による 2 項方程式の解法

命題 1.5.1 複素数 $\alpha = r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$（但し $r > 0$）について, z の <u>2 項方程式</u>

$$z^n = \alpha$$

は n 個の複素数の解を持ち, それらは

$$z = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right) \quad (0 \leqq k \leqq n-1) \tag{1.5.2}$$

で与へられる.

証明 1.3.1 を使つて (1.5.2) の右辺の n 乗を計算すれば $r(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ となるから, これらの複素数は $z^n = \alpha$ の相異なる解である. しかるに, 1.4.1 によつて, これが全ての根である. これは 1.4.2 の特別な場合の証明になつてゐる. □

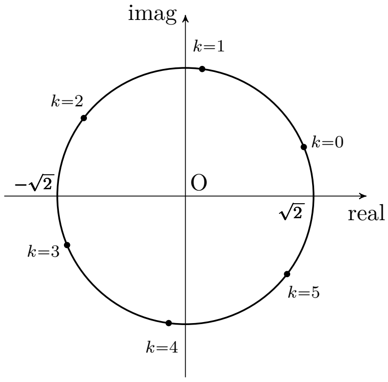
注意 1.5.3 (1.5.2) の右辺の式を見れば, これら n 個の解が複素数平面上で正 n 角形の n 個の頂点になつてゐることがわかる.

例題 1.5.4 方程式 $z^6 = 4\sqrt{2}(-1+\boldsymbol{i})$ の解を全て求めよ.

解 $4\sqrt{2}(-1+\boldsymbol{i}) = \sqrt{2}^6(\cos\frac{3\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{3\pi}{4})$ であるから, 1.5.1 に従つて, 求める根は

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{6}\right) + \boldsymbol{i}\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{6}\right)\right)$$
$$(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

である. □



演 習 問 題 **1.5**

1.5.5 次の方程式を複素数の範囲で解け.

(1) $z^3 = 8\boldsymbol{i}$. (2) $z^4 = -16$. (3) $z^5 = -1$.

1.5.6 方程式 $z^5 = 1$ に関する次の問に答へよ.

(1) $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ であることを確認せよ.

(2) $\frac{1}{z^2}(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ を $t = z + \frac{1}{z}$ の多項式で表せ.

(3) (2) で得られた多項式を $f(t)$ とおく. $f(t) = 0$ の解を求めよ.
（Hint : 2 次方程式の解の公式）

(4) $z^5 = 1$ の解をすべて求めよ. （Hint : 2 次方程式の解の公式）

(5) $\cos\frac{2\pi}{5}$ と $\sin\frac{2\pi}{5}$ の値を有理数の四則と平方根でもつて表せ.

1.5.7 奇数 $n > 0$ について, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\prod_{j=1}^{n-1} 2\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right) = n.$$

但し, $\prod$ は上下に指示された範囲で, 直後に記された値の積をとることを意味する.

第 2 章　行列

2.1　行列についての基本的事項

行列の記法　m と n を自然数とする. $m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i = 1, \cdots, m\ ;\ j = 1, \cdots, n)$ を次の様に長方形に並べて [ ] または ( ) で囲つたものを m 行 n 列の 行列, $m \times n$ 型 の行列, $m \times n$ 行列, (m,n) 行列などといふ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここに並んだ a_{ij} を (i,j) 成分 といふ. 行列 A の横の並び

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

を A の 行 といひ, 上から第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行と呼ぶ. A の成分の縦の並び

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

を A の 列 といひ, 左から第 1 列, 第 2 列, $\cdots$, 第 n 列と呼ぶ.

上の行列 A を簡潔に記号で

$$A = [\,a_{ij}\,],\ A = [\,a_{ij}\,]_{m \times n},\ A = \underset{m\times n}{[\,a_{ij}\,]},\ A = \underset{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}{[\,a_{ij}\,]}$$

などと記す. ここに, 最後の記法については, 底に書かれた $\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}$ のうちの 上段の i が行の番号を表し, 下段の j が列の番号を表すものと約束する.

行列の相等　2 つの行列 A と B について, 型が一致してゐて, 各成分がどれも一致するとき, そのときに限り A と B は 等しい といひ, $A = B$ と記す.

行列の集合　成分がすべて $\mathbb{R}$ に含まれる $m \times n$ 型行列の全体を $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{R})$ と記す. すべての成分が実数である行列を 実行列 と呼ぶ. もちろん, 成分が $\mathbb{C}$ に含まれる $m \times n$ 型行列の全体は $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{C})$ と記される. 成分が複素数である行列を 複素行列 と呼ぶ. また, 行の数と列の数が等しい行列を 正方行列 と呼び, 行と列の数が n である様な実数を成分とする正方行列の全体は $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n,n,\mathbb{R})$ などと表すこととする. すべての成分が実数である様な正方行列を 実正方行列 と呼ぶ. すべての成分が複素数である様な正方行列を 複素正方行列 と呼ぶ.

零行列 全ての成分が 0 である行列を零行列といひ, O で表す. 零行列は, 文中や式の中でその型が明らかなことが多いが, 特にその型を明示したいときは, $m \times n$ 型の零行列を $O_{m,n}$ などと書く. 特に $n \times n$ 型の零行列を n 次零行列と呼んで O_n と書くことにする.

例 2.1.1 2×3 型の零行列と 3×3 型の零行列を書けば

$$O = O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

正方行列 $n \times n$ 型行列を n 次 (正方) 行列といふ. n 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の成分のうち, 左上から右下への対角線上に並ぶ成分 a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} を, A の対角成分と呼ぶ. 正方行列であつて対角成分以外の成分が全て 0 である行列を対角行列といふ. 対角行列 $A = [a_{ij}]$ では, その対角成分が上から順に a_{11}, a_{22}, $\cdots$, a_{nn} のみを記して $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$ と記すことがある.

例 2.1.2 次の行列はどれも 3 次の対角行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(2, 3, 4), \ O_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(0, 0, 0).$$

単位行列 対角成分が全て 1 で, それ以外の成分が全て 0 である様な正方行列を単位行列といひ,（E ではなく）I で表す. 特に次数を明示したいとき, n 次単位行列を I_n と書く.

例 2.1.3 3 次の単位行列を具体的に書くと次の様になる.

$$I = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scalar 行列 対角成分が全て等しい対角行列を, scalar（スカラー）行列といふ. 特に単位行列は scalar 行列であるし, 零行列も, それが正方行列であれば, やはり scalar 行列である.

例 2.1.4 次の行列は 3 次の scalar 行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

転置行列 行列 A の行と列を入れ替へた行列を, 行列 A の転置行列といひ, ${}^tA$ と書く. A が $m\times n$ 行列ならば, ${}^tA$ は $n\times m$ 行列である. 成分で書くと

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad ならば \quad {}^tA=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

である. $A=\left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqq i\leqq m\\1\leqq j\leqq n}}$, ${}^tA=\left[b_{ij}\right]_{\substack{1\leqq i\leqq n\\1\leqq j\leqq m}}$ と書くと $b_{ij}=a_{ji}$ であり, ${}^tA=\left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqq j\leqq n\\1\leqq i\leqq m}}$ となる.

問 2.1.5 任意の行列 A について ${}^t({}^tA)=A$ が成り立つことを示せ.

例 2.1.6 転置行列の例.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad ならば \quad {}^tA=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

行 vectors, 列 vectors $1\times n$ 行列を<u>n 次 行 vector</u>, $m\times 1$ 行列を<u>m 次 列 vector</u> といふ. 行 vectors と列 vectors を総して<u>数 vectors</u>といふ. 成分が全て 0 である数 vector を<u>零 vector</u>といひ, $\mathbf{0}$ で表す. また 1×1 行列は, 数と同一視することが多い.

例 2.1.7 $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ は 3 次の列 vector, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は 4 次の行 vector である.

例題 2.1.8 行列

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して次の問に答へよ.
(1) 行列 A の型を記せ.
(2) 行列 A の $(2,1)$ 成分, $(3,4)$ 成分を記せ.
(3) 行列 A の第 2 行, 第 3 列を記せ.
(4) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ を記せ.

解 (1) 3×5 型. (2) $(2,1)$ 成分は 3 で $(3,4)$ 成分は 7.

(3) 第 2 行は $[3\ \ 0\ \ 12\ \ 0\ \ 4]$. 第 3 列は $\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(4) 転置行列は

$${}^tA=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

である. □

定義 2.1.9 つぎで定義される記号 δ_{ij} を $\underline{\overset{\text{クロネッカー}}{\text{Kronecker}}}$[6] $\underline{の \overset{\text{デルタ}}{\delta}}$ と呼ぶ:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases}$$

例 2.1.10 Kronecker の δ を使ふと単位行列 $I = I_n$ を

$$I = I_n = \underset{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n}}{[\,\delta_{ij}\,]}$$

と表せる.

例 2.1.11 次の様な使ひ方もある:

$$\underset{\substack{1 \leqq i \leqq 3 \\ 1 \leqq j \leqq 3}}{[\,\delta_{i+1,j}\,]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定義 2.1.12 (1) 正方行列 A は ${}^tA = A$ を満たすとき, <u>対称行列</u>と呼ばれる.
(2) 正方行列 A は ${}^tA = -A$ を満たすとき, <u>交代行列</u>と呼ばれる.
但し $A = [a_{ij}]$ に対して, $-A = [-a_{ij}]$ と定める.

例 2.1.13 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ は対称行列, $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ は交代行列である.

[6] Leopold Kronecker, (1823-1891) Poland 生

演 習 問 題 **2.1**

2.1.14 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -5 \\ 9 & -8 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答へよ.

(1) A の型を記せ.
(2) A の $(2,4)$ 成分は何か.
(3) A の第 2 行を記せ.
(4) A の第 3 列を記せ.
(5) 転置行列 ${}^tA$ を記せ.

2.1.15 (i,j) 成分が次で与へられる 3 次行列 $A = [a_{ij}]$ を書き下せ.

(1) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$.　(2) $a_{ij} = (-1)^i \delta_{ij}$.
(3) $a_{ij} = \delta_{i,j+1}$.　(4) $a_{ij} = \delta_{i,4-j}$.

2.1.16 次の行列の (i,j) 成分 a_{ij} を Kronecker の δ を用ゐて表せ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.　(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2.1.17 次の等式を満たす様に a, b, c, d を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2a+1 & c+2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2c \\ 1-b & 7-d \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} d & a-1 \\ b+1 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} 2 & a \\ 2b & c \end{bmatrix}$.

2.1.18 次の行列が対称行列になる様に a, b, c を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2c+1 & 3 \\ a & -2 & c \\ b & a-2 & 0 \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} 2 & b-2 & 1 \\ a & 3 & c \\ b-2 & a+1 & 5 \end{bmatrix}$.

2.1.19 交代行列の対角成分は全て 0 であることを示せ.

2.1.20 次の行列が交代行列になる様に a, b, c, d を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 2c+1 & 3 \\ a & b-2 & c \\ c & d-2 & 0 \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} 0 & a+1 & -1 \\ b & 3-b & d \\ 1 & c-1 & c \end{bmatrix}$.

2.1.21 対称行列であり, かつ交代行列である様な行列は零行列に限ることを示せ.

2.2　行列に関する演算

行列の和と差　2 つの行列の型が一致するときのみ, それらの間の演算 和 および 差 が以下の様に定義される.

$$A = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[\,a_{ij}\,]},\quad B = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[\,b_{ij}\,]}\quad \text{について}\quad A+B = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[\,a_{ij}+b_{ij}\,]},\quad A-B = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[\,a_{ij}-b_{ij}\,]}$$

例 2.2.1　例を記す:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

行列の saclar 倍　行列や後で述べる vectors に対比して, 数のことを $\overset{\text{スカラー}}{\text{scalars}}$ と言ふ. A が行列で c が数 (scalar) のとき, A の c 倍 cA を A の全ての成分を c 倍することで定義する. つまり $c[a_{ij}] = [c\,a_{ij}]$ である. $(-1)A$ は $A + (-1)A = O$ を満たす. $(-1)A$ は $-A$ とも書かれる. A と B が同じ型ならば $A - B = A + (-B)$ である.

例 2.2.2　以下に scalar 倍の例を示す:

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix},\qquad a\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & a \\ 4a & 3a \end{bmatrix}.$$

行列の積　上の記法を使つて行列の積について説明する. 2 つの行列 A と B について, A の列の数と B の行の個数が等しいとき, またそのときに限り, それらの 積 と呼ばれる演算 AB が以下の式で定義される. 即ち

$$A = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[\,a_{ij}\,]},\quad B = \underset{\substack{1\leqq j\leqq n\\ 1\leqq k\leqq r}}{[\,b_{jk}\,]}$$

と書くと, これらの積は次の様になる:

$$\boxed{(2.2.3)\qquad AB = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[\,a_{ij}\,]}\ \underset{\substack{1\leqq j\leqq n\\ 1\leqq k\leqq r}}{[\,b_{jk}\,]} = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq k\leqq r}}{\left[\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\ \right]}.}$$

とくに, $m\times n$ 型の行列 A と $n\times r$ 型の行列 B との積 AB は $m\times r$ 型になる. 正方行列 A については $AA = A^2$, $AAA = A^3$ 等と記す.

注意 2.2.4　行列の積を (2.2.3) の様に定める理由は, 線形写像の表現行列と 2 つの線形写像の合成（特に 7.3.8）について学んだときに明らかになるが, 読者の便宜のために以下の 2.2.6 に表の積とも考へられることを述べておく.

例 2.2.5　行列の積の計算例をいくつか示す.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -10 & -4 \\ -9 & 9 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2.$$

例 2.2.6　行列の積は 2 つの表の積だと考へても自然なものであることを例で示す[7]. 2 箇所を周る 2 種類の旅行計画（甲と乙）を策定中で, 2 箇所での宿泊先（Hotel A と Hotel B）で部屋の種類別に宿泊する人数は表 1 の通りである. また, 各宿泊先の部屋の種類ごとの 1 人あたりの代金は表 2 の通りであるとする.

表 1　(単位 人)

	single	twin	triple
計画 甲	10	22	18
計画 乙	9	26	15

表 2　(単位 円/人)

	Hotel A	Hotel B
single	10000	12000
twin	8000	10000
triple	6500	8500

この 2 つの表から, 2 つの宿泊先に支払ふべき代金の合計を計算した結果が次である.

表 3　(単位 円)

	Hotel A	Hotel B
計画 甲	393000	493000
計画 乙	395500	495500

いま, 表 1, 表 2, 表 3 のそれぞれを行列にしたものを A, B, C とする. 即ち

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 18 \\ 9 & 26 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10000 & 12000 \\ 8000 & 10000 \\ 6500 & 8500 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 393000 & 493000 \\ 395500 & 495500 \end{bmatrix}$$

とする. このとき

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 22 & 18 \\ 9 & 26 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10000 & 12000 \\ 8000 & 10000 \\ 6500 & 8500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 393000 & 493000 \\ 395500 & 495500 \end{bmatrix} = C$$

となつてゐる.

問 2.2.7　I_2, I_3 は 2.1.3 で述べた単位行列とする. $A = [a_{ij}]_{\substack{1\leqq i\leqq 2 \\ 1\leqq j\leqq 3}}$ について $I_2 A$ と AI_3 を計算せよ.

問 2.2.8　定数 c と行列 A, B について, 以下の等式が成り立つことを示せ.
(1)　A と B が同一の型であれば ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
(2)　${}^t(cA) = c\,{}^tA$.
(3)　A と B の積 AB が存在すれば, 積 ${}^tB\,{}^tA$ が存在して ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

問 2.2.9　(1) 任意の正方行列 B に対し $B + {}^tB$ は対称行列であることを示せ.
(2) 任意の正方行列 B に対し $B - {}^tB$ は交代行列であることを示せ.

例題 2.2.10　行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$ を対称行列と交代行列の和で書き表せ.

解　2.2.9 を利用すればよく,

$$A = \tfrac{1}{2}(A + {}^tA) + \tfrac{1}{2}(A - {}^tA) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & -4 & -5 \\ 1 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \\ 1 & -9 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.　□

7) [M1], 1.2.5 を参考にした.

行列の演算に関する性質　行列の演算も数の演算と同じ様な性質を持つ.

注意 2.2.11　但し, 特に次の 3 つの違ひについては注意されたい.
(1)　2 つの行列（A, B とする）の和, 差, 積の演算はいつでもできるわけではなく, これらの演算ができるためには A と B の型に条件がある.
(2)　2 つの行列（A, B とする）の積 AB と BA は, たとへこれらの双方の演算ができたとしても, 一致するとは限らない. 一例として

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) 零行列でない 2 つの行列の積が零行列になることがある. 例へば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{bmatrix},\quad D = \begin{bmatrix} -b & b \\ a & -a \end{bmatrix}$$

について

$$AB = 0, \quad CD = 0.$$

この様な A, B, C, D を <u>零因子</u> と呼ぶ.

> **定義 2.2.12**　同じ型の正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たすならば, A と B は <u>可換</u> であるといはれる. 可換でない場合は <u>非可換</u> といはれる.

以下の通り, これ以外の結合律, 分配律などの “数” の演算に成り立つ性質は, 次の様に行列演算についても成り立つ.

> **命題 2.2.13**　以下の性質が成り立つ.
> (1)　和の性質　$A + B = B + A$　（<u>和の交換律</u>）,
> $A + O = O + A = A$　（和に関する <u>単位元</u> の存在）,
> $(A + B) + C = A + (B + C)$　（<u>和の結合律</u>）.
> (2)　積の性質　$AI = IA = A$　（積に関する <u>単位元</u> の存在）,
> $AO = O$, $OA = O$,
> $(AB)C = A(BC)$　（<u>積の結合律</u>）　(2.2.26 参照).
> (3)　Scalar 倍　$0A = O$, $1A = A$,
> $(ab)A = a(bA)$, $(aA)B = a(AB) = A(aB)$.
> (4)　<u>分配律</u>　$a(A + B) = aA + aB$, $(a + b)A = aA + bA$;
> $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$　(2.2.24 参照).
> ここで A, B, C は行列であり, a, b は scalars である. 各等式は両辺の演算が意味を持つときに限つて成り立つ.

証明　証明に手間が掛かるものは演習問題（2.2.24 〜 2.2.26）にしてある. それ以外は簡単に確かめられる. □

問 **2.2.14**　上記 2.2.13 において, 積の結合律と分配律の第 3, 第 4 式を除いた全ての成立を確かめよ.

注意 2.2.15 和および積の結合律を用ゐると, n 個の行列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して, 次が成り立つことがわかる.
(1) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ はすべての A_i の型が等しければ定まり, 和はその順序にも和を取る順序にも依らない. もちろん $\underbrace{A + A + \cdots + A}_{n} = nA$ である.
(2) $A_1 A_2 \cdots A_n$ は隣り合ふ行列の積がどれも可能ならば定まり, どこから計算しても結果は同じである. 特に A が正方行列ならば A の<u>冪乗</u>（n 乗）が定まる. それを

$$\underbrace{AA\cdots A}_{n} = A^n$$

で表す.

演 習 問 題 **2.2**

2.2.16 次の行列の計算を実行せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$. (5) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3$.

(6) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right\}$.

2.2.17 次の行列の中で積 (2 つの行列の) が定義される全ての組合せを求め, それらの積を計算せよ. 但し, 同じものを掛けることも含めるものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.2.18 次の各問の行列 A に対して A^n (n は自然数) を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. (3) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$. (4) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.2.19 次の行列の組は可換か否か, 調べよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.2.20 次の等式が成り立つ様に a, b, c, d を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -2 \\ c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ -1 & d \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} a & 2 & -2 \\ 0 & b-2 & 3 \\ c+2 & 2d & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -6 & -18 & 0 \\ 15 & 33 & -6 \\ 15 & -6 & 15 \end{bmatrix}$.

2.2.21 $A^m = O$ のとき, $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{m-1})$ を求めよ.

2.2.22 $A^m = O$ となる自然数 m が存在するとき, A は冪零(べきれい)行列と呼ばれる (2.2.16 (4) の行列が一例). A と B が共に冪零行列で可換であるならば AB も冪零行列であることを示せ.

2.2.23 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の成分が $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ を満たすとき, A は上(うえ)三角行列と呼ばれる. 上三角行列の和, 差, 積は上三角行列であることを示せ.

2.2.24 行列 A は $m \times n$ 型, B と C は $n \times r$ 型のとき,

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{(分配律)}$$

が成り立つことを証明する以下の文章を完成させよ. (2.2.13 (4) の証明)

証明 まづ

$$A = [a_{\Box j}]_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}, \quad B = [b_{\Box k}]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq r}}, \quad C = [c_{\Box\Box}]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}$$

とおく. これらについて,

$$\begin{aligned} A(B+C) &= A\,[b_{\Box\Box} + c_{\Box\Box}]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j}(b_{\Box\Box} + c_{\Box\Box})\right]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\Box} \left(a_{\Box j}b_{\Box\Box} + a_{\Box j}c_{\Box\Box}\right)\right]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j}b_{\Box\Box} + \sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j}c_{\Box\Box}\right]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j}b_{\Box\Box}\right]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}} + \left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j}c_{\Box\Box}\right]_{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}} \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

となり, 証明された. □

2.2.25 等式

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} x_{jk} = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} x_{jk}$$

が成り立つことを示せ.

2.2.26 行列 A, B, C はそれぞれ $m \times n$ 型, $n \times r$ 型, $r \times \ell$ 型とする. このとき

$$A(BC) = (AB)C$$

が成り立つことを証明する以下の文章を完成させよ. (2.2.13 (2) の証明)

証明 まづ,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}, \quad B = [b_{\square k}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq k\leqq r}}, \quad C = [c_{\square t}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq t\leqq \ell}}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \left([a_{ij}]_{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}} [b_{\square k}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq r}}\right)[c_{\square t}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \ell}} = \left[\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij}b_{\square\square}\right]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}[c_{\square t}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \ell}} \\
&= \left[\sum_{\square=1}^{\square}\left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij}b_{\square\square}\right)c_{\square\square}\right]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}} = \left[\sum_{\square=1}^{\square}\left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij}b_{\square\square}c_{\square\square}\right)\right]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
A(BC) &= [a_{ij}]_{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}\left([b_{\square k}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq r}}[c_{\square t}]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \ell}}\right) = [a_{ij}]_{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}\left[\sum_{\square=1}^{\square} b_{\square\square}c_{\square\square}\right]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}} \\
&= \left[\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij}\left(\sum_{\square=1}^{\square} b_{\square\square}c_{\square\square}\right)\right]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}} = \left[\sum_{\square=1}^{\square}\left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij}b_{\square\square}c_{\square\square}\right)\right]_{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}
\end{aligned}$$

ここで $x_{\square\square} = a_{ij}b_{\square\square}c_{\square\square}$ とおけば 2.2.25 の等式から

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{r} x_{\square\square}\right) = \sum_{k=1}^{\square}\left(\sum_{j=1}^{\square} x_{\square\square}\right)$$

が成り立つことがわかり,

$$(AB)C = A(BC)$$

が証明された. □

2.3 行列の分割

行列の行と列を以下に述べる様な仕方で分割することで, 行列の計算がし易くなつたり, 種々の性質の証明が述べ易くなる. 行列 A が与へられたとき, それを

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{array}\right]$$

の様に分割することを A の (長方形) 分割と呼ぶ. ここで, 分割された行列 A_{ij} の 1 つ 1 つを細胞と呼ぶ.

例 2.3.1 以下は 3×3 型行列 A の分割の例である.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hdashline 5 & 3 & -9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad 但し$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = [-9].$$

行列を分割して表示する利点の 1 つは, 行列の形によつては, 積がわかりやすくなることにある. A が $m\times n$ 行列, B が $n\times r$ 行列で, A の列の分け方と B の行の分け方が次に示す様に一致してゐるとする.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{n_1} & \overbrace{\quad}^{n_2} & \cdots & \overbrace{\quad}^{n_t} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{array}\right] \end{array}, \qquad B = \begin{array}{r} n_1\{ \\ n_2\{ \\ \vdots \\ n_t\{ \end{array} \left[\begin{array}{c:c:c:c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{array}\right].$$

このとき A と B の各細胞を数であるかの様に考へて形式的に行列の積を取ることで, 行列の積が正しく計算できる. つまり

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \\ (i = 1, \cdots, s\ ;\ j = 1, \cdots, u) \end{array}$$

例題 2.3.2　次の行列 A, B の積 AB を, 与へられた長方形分割を用ゐて求めよ.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{rr} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{array}\right].$$

解　次の様に計算すればよい:

$$AB = \begin{bmatrix} [1\ \ 2]\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + [4][1\ \ -2] + [5\ \ 1]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[1\ \ -2] + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [-1\ \ 8] + [4\ \ -8] + [-3\ \ 2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{rr} 0 & 2 \\ \hline 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{array}\right].$$

かうして求めた積 AB と長方形分割しないで求めたものとは等しくなる. その理由をこの計算から理解されたい. □

例題 2.3.3　A_1, B_1 が m 次正方行列, A_2, B_2 が n 次正方行列ならば

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}.$$

解　所与の分割のままに計算すれば

$$(\text{左辺}) = \begin{bmatrix} A_1B_1 + OO & A_1O + OB_2 \\ OB_2 + A_2O & OO + A_2B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix} = (\text{右辺}).$$

□

行列の分割は, 例へば次の 3 つの場合には非常に有効である.

(1) 多くの細胞に零行列や単位行列が存在する場合の積の計算.

(2) 多くの細胞に零行列や単位行列が存在する場合の行列式 (後述) の計算.

(3) 行列を行 vectors または列 vectors に分割して見易く表示する場合.

このうち (1) の有効さは 2.3.3 で見た通りである．2.3.3 と同様なことが 3 以上の自然数 t についての行と列を t 個に分けたものについて, 対角の t 個の細胞以外が全て零行列の場合にも成立する．(2) は後の 3.3.8 で述べる．(3) は, 後に述べる連立 1 次方程式や, 1 次変換の行列表現を考へるときに役立つ.

数 vectors（行 vectors, 列 vectors）は, 共に行列の特別なものであるが, 特に, これらが数 vectors であることを強調するために

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \cdots,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$$

などの bold（ボールド）体の斜体を用ゐることが多い.

例 2.3.4 列 vectors への分割

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|r} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] = [\,\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4\,], \quad 但し$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

例 2.3.5 行 vectors への分割. 例 2.3.4 の行列 A を行 vectors に分割すると

$$A = \left[\begin{array}{cccr} 1 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= [1\ \ 3\ \ 4\ \ \ 4], \\ \boldsymbol{b}_2 &= [2\ \ 1\ \ 0\ -1], \\ \boldsymbol{b}_3 &= [1\ \ 0\ \ 5\ \ \ 0]. \end{aligned}$$

.

行列の積の数 vectors を用ゐた表現 A が $m \times n$ 行列, B が $n \times r$ 行列で, A を行 vectors に分割し, B を列 vectors に分割する.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad B = [\,\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n\,].$$

このとき, 積 AB は

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

と書ける.

演 習 問 題 **2.3**

2.3.6 次の行列の積を与へられた長方形分割を用ゐて求めよ.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

2.3.7 $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を行列の列 vectors への分割とするとき, $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を計算せよ.

2.3.8 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]$ (列 vectors への分割), $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ のとき, 積 AB の列 vectors への分割を求めよ.

2.3.9 A_1, B_1 は m 次正方行列, A_2, B_2 は n 次正方行列とする. A_1 と B_1, A_2 と B_2 が可換であるならば $A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix}$ も可換であることを示せ.

2.3.10 A が $m \times n$ 行列で k が自然数のとき $\begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix}^k$ を求めよ.

2.3.11 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ とおく. 次の問に答へよ.

(1) A^6, B^4 を求めよ.

(2) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{12}$ を求めよ.

2.3.12 c を任意の実数とし,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{bmatrix}$$

とおく. A^n を求めよ.

第 3 章　行列式

3.1　置換と対称群

ここでは, 次節以降で行列式と呼ばれるものを説明するにあたり, 対称群と呼ばれるものを学ぶ.

自然数 n を固定する. n 個の要素からなる集合をひとつ用意する. わかり易くするため $\{1,2,\cdots,n\}$ とする. このとき $\{1,2,\cdots,n\}$ から $\{1,2,\cdots,n\}$ への 1 対 1 対応の全体を考へて, それを

$$S_n$$

と記す. いま $\sigma \in S_n$ が $1, 2, \cdots, n$ を, それぞれ $k_1, k_2, \cdots, k_n$ に対応させるとき,

$$\sigma(1) = k_1, \quad \sigma(2) = k_2, \quad \cdots, \quad \sigma(n) = k_n$$

と記す. これをまとめて

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

と表す. この表記の仕方で, 上の要素に対応する要素がその下に書かれてゐれば, 左右の位置は入れ替へても良いものとする. また, 上下が同じ要素の箇所は省略して良いものとする. つまり, 書かれてゐない要素はそれ自身に写るものと理解する.

例 3.1.2　上記のことを例示する :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

さらに, S_n の要素の間に次の様に写像の合成による演算がある. $\sigma, \tau \in S_n$ のときこれらの写像の合成 $\sigma \circ \tau$ を普通は $\sigma\tau$ と書いて σ と τ の積と呼ぶ.

例 3.1.3　$\sigma \in S_5$ として, $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 3$, $\sigma(5) = 1$ のとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と書かれる. また $\tau(1) = 5$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$, $\tau(4) = 2$, $\tau(5) = 4$ のとき

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

である. このとき $\sigma\tau(1) = \sigma\bigl(\tau(1)\bigr) = \sigma(5) = 1$ である.
同様に $\sigma\tau(2) = 4$, $\sigma\tau(3) = 5$, $\sigma\tau(4) = 2$, $\sigma\tau(5) = 3$ であるから,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

注意 3.1.4　この積といふ演算については交換法則が成り立たない（確認せよ）.

定義 3.1.5 上の集合 S_n を演算も考慮に入れた上で n 次 対称群 と呼ぶ. また, その要素を n 次の 置換 と呼ぶ [8].

S_n の要素のうち, 1, 2, $\cdots$, n のそれぞれを全てそれ自身に写す置換は, 恒等置換 または 単位置換 と呼ばれ, 通常 ε と表示される:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

任意の $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$ が成り立つ. また

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

とおき, これを σ の 逆置換 と呼ぶ. ここで, 次の等式が成り立つことに注意せよ:

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon.$$

例 3.1.6 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ならば,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

要素の個数 S_n の要素の個数は $n!$ である. なぜなら (3.1.1) の記法で, 下の行に $\{1, 2, \cdots, n\}$ を並べる並べ方を数へればよいからである.

巡回置換 ここで, さらに使ひ易ひ記号を導入する. 次に定義域 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の m 個の要素からなる部分集合 $\{k_1, \cdots, k_m\}$ について, $\rho(k_1) = k_2$, $\rho(k_2) = k_3$, $\cdots$, $\rho(k_{m-1}) = k_m$, $\rho(k_m) = k_1$ の様に隣に順繰りに写す写像 ρ は m 次の 巡回置換 であると言はれて, 略記号で次の様に書かれる:

$$\rho = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_m \\ k_2 & k_3 & k_4 & \cdots & k_1 \end{pmatrix} = (k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_m). \tag{3.1.7}$$

例 3.1.8 巡回置換の例を挙げる:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (4\ \ 3\ \ 5\ \ 7).$$

互換 2 次の巡回置換は 互換 と呼ばれる.

例 3.1.9 互換の例を挙げる:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 4).$$

---

[8] 対称群 S_n は「代数学 1」等で学ぶ 群(ぐん) と呼ばれるものの重要な例である.

いくつかの n 次の置換 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_\ell$ について, この内のどの 2 つに対しても, 眞(しん)に動く数字（自身に写る数字以外の数字）に共通なものがないとき, これらは互ひに素な置換であるといふ.

補題 3.1.10 どんな置換も, 互ひに素な巡回置換の積で表せる.

これは例で説明した方がわかり易い.

例 3.1.11 置換
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
で写る数字を順次観察すると $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 1,\quad 2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 2$ と写つてゐて, これで全ての数字を尽してゐるから
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7)(2\ \ 4\ \ 6) = (2\ \ 4\ \ 6)(1\ \ 3\ \ 5\ \ 7).$$
かう見てみると (3.1.7) の記法は返つて元の記号よりわかり易くなつたことに気付くであらう.

補題 3.1.12 いかなる巡回置換も互換のみの積で表せる.

例へば $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6) = (1\ \ 6)(1\ \ 5)(1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$. 一般に, 次の式が成り立つ:
$$(k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ \cdots\ \ k_m) = (k_1\ \ k_m)(k_1\ \ k_{m-1})\cdots(k_1\ \ k_3)(k_1\ \ k_2).$$

3.1.10 と 3.1.12 より次がわかる.

命題 3.1.13 いかなる置換も互換のみの積として表せる.

定義 3.1.14 （置換の符号）置換 σ が m 個の互換の積として表されるとき,
$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$
と定め, これを σ の符号と呼ぶ.

ひとつの置換を互換の積で表す方法は何通りもある. 実際
$$\begin{aligned}(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) &= (1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2) \\ &= (1\ \ 3)(1\ \ 4)(3\ \ 4)(2\ \ 3)(1\ \ 3)\end{aligned}$$
などと幾通りにも表される. しかし, 置換の符号は, 互換の積による表示方法に依らずに決まる (3.1.27 で証明する). 恒等置換（単位置換）ε については
$$\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$$
とする. これは互換 0 個 (偶数個) の積で表されるからでもあるし, $\varepsilon = (1\ \ 2)(1\ \ 2)$ と 2 個の積で表されるから思つてもよい.

定義 3.1.15 （偶置換, 奇置換）$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ である置換 σ を偶置換, $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ である置換 σ を奇置換と呼ぶ.

例題 3.1.16 次の置換 σ を互換のみの積で表示し, 符号を求めよ.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

解 最初に巡回置換の積に分解する.

$$1 \to 7 \to 9 \to 5 \to 1, \quad 2 \to 6 \to 4 \to 2, \quad 3 \to 8 \to 3$$

であるから $\sigma = (3\ \ 8)(2\ \ 6\ \ 4)(1\ \ 7\ \ 9\ \ 5)$. 次に各巡回置換を互換で書けば

$$\sigma = (3\ \ 8)(2\ \ 4)(2\ \ 6)(1\ \ 5)(1\ \ 9)(1\ \ 7)$$

となる. よつて

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1$$

である. □

例 3.1.17 $S_3 = \{\, \varepsilon,\ (1\ \ 2),\ (1\ \ 3),\ (2\ \ 3),\ (1\ \ 2\ \ 3),\ (1\ \ 3\ \ 2)\,\}$ である. この内で,

偶置換は $\{\, \varepsilon,\ (1\ \ 2\ \ 3),\ (1\ \ 3\ \ 2)\,\}$, 奇置換は $\{\, (1\ \ 2),\ (1\ \ 3),\ (2\ \ 3)\,\}$

である.

演 習 問 題 3.1

3.1.18 次の置換の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) $(1\ \ 3)(2\ \ 3)(2\ \ 4)$. (4) $(1\ \ 4)(3\ \ 2)(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)(2\ \ 3)$.

3.1.19 次の置換を互ひに素な巡回置換の積に分解せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3.1.20 次の置換を互換の積で表せ. また各々の置換の符号を求めよ.

(1) $(1\ \ 3\ \ 6\ \ 4)$. (2) $(1\ \ 2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)$. (3) $(2\ \ 4\ \ 6)$.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 9 & 8 & 6 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

3.1.21 4 次の対称群 S_4 の元のすべてを互ひに素な巡回置換の積の形で書き下せ. また, 各元を 互ひに素な巡回置換の積で表し, 偶置換と奇置換に分けよ.

3.1.22 $\sigma, \tau \in S_n$ のとき $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立つことを示せ.

以下の 3.1.23 から 3.1.27 は一続きの問題である.

3.1.23 n 個の文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用意する. これらの文字からなる (係数がすべて実数である様な) 多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\sigma \in S_n$ について, 新たな多項式 σf を

$$(\sigma f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

で定める. このとき, 以下の f と σ のそれぞれについて σf を求めよ.

(1) $f = x_1x_2 + 2x_2 + 3x_3,\ \sigma = (1\ 2)$.

(2) $f = x_1x_2 + 2x_2 + 3x_3,\ \sigma = (1\ 2\ 3)$.

(3) $f = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),\ \sigma = (2\ 3)$.

(4) $f = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),\ \sigma = (1\ 2\ 3)$.

3.1.24 いま,

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

とおく [9]. このとき, 任意の互換 σ について $\sigma\Delta = -\Delta$ となることを証明せよ.

3.1.25 任意の $\tau, \sigma \in S_n$ と任意の多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について $(\tau\sigma)f = \tau(\sigma f)$ が成り立つことを示せ.

3.1.26 任意の置換 σ について,

$$\sigma\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^m \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

が成り立つことを示せ. ここで m は σ を互換のみの積で表したときの互換の個数である.

3.1.27 どんな置換 σ についても, それを互換のみの積として, どの様に表しても使用する互換の個数の偶奇は σ のみで定まり, 表し方に依らないことを証明せよ.
（ここでの方法以外にも非常に多くの証明が知られてゐるので, 調べてみると良い. ）

3.1.28 S_n の偶置換の個数と奇置換の個数はどちらも $n!/2$ となることを証明せよ.

3.1.29 置換 σ について

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_{m-1}\sigma_m$$

が互換への分解（つまり σ_j はすべて互換）のとき

$$\sigma^{-1} = \sigma_m\sigma_{m-1} \cdots \sigma_2\sigma_1$$

であることを示せ.

3.1.30 置換 σ について, $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ を次の 2 通りの方法で示せ.

(1) 3.1.29 を使つて.

(2) $\sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$ と 3.1.22 を使つて.

[9] 例へば $n = 4$ なら
$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)&(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\\ \cdot&(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\\ &\cdot(x_3 - x_4).\end{aligned}$$

3.1.31　1 から n までの自然数が与へられてゐる. これを並べた順列　$k_1, k_2, \cdots,$ k_n　において, $i<j$ かつ $k_i > k_j$ となる（大小関係が逆転してゐる）組 (k_i, k_j) を転倒した組といふ. 転倒した組の個数をこの順列の転倒数といふ. 例へば $n=7$ で

$$5,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 4,\ 3$$

の転倒した組は

$$(5,1),\ (5,2),\ (5,4),\ (5,3),\quad (6,4),\ (6,3),\quad (7,4),\ (7,3),\quad (4,3)$$

の 9 組なので, 転倒数は 9 である. 1 から 8 までの自然数の順列

$$8,\ 3,\ 7,\ 4,\ 5,\ 1,\ 6,\ 2$$

の転倒した組をすべて挙げ, 転倒数を求めよ.

3.1.32　n 次の置換 σ に対して, それの第 1 列を順に並べた表示

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

の下段を $(k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_n)$ を通常の順列とみて, σ の 順列 と呼ぶ. この順列の 転倒数 を置換 σ の 転倒数 と呼び $r(\sigma)$ と記す. また $(a\ a{+}1)$ の形の互換を 隣接互換 と呼ぶ. 置換 σ と隣接互換との積 $\sigma\,(a\ a{+}1)$ の転倒数 $r\big(\sigma\,(a\ a{+}1)\big)$ は $r(\sigma)+1$ か $r(\sigma)-1$ に等しいことを示せ.

3.1.33　置換 σ を隣接互換（つまり $(a\ a{+}1)$ の形の互換）だけの積で表すときに使ふ隣接互換の最小数は, σ の転倒数に一致することを証明せよ.
(Hint : $k_a > k_{a+1}$ なる a があれば, 積 $\sigma\,(a\ a{+}1)$ の転倒数が σ のそれと比較してどうなるかを考へよ.)

3.1.34　置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

に対し, 転倒数を用ゐて順列 $(k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_n)$ の 符号 を

$$\boldsymbol{\epsilon}(k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_n) = (-1)^{r(\sigma)}$$

と定める. このとき

$$\boldsymbol{\epsilon}(k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_n) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

となることを示せ.

3.2　行列式の定義と性質 (1)

線形代数の理論の中でも行列式は特別な存在感がある．ここでは行列式の定義と基本的な性質を学ぶ.

定義 3.2.1　n 次正方行列 $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1\leqq i\leqq n\\ 1\leqq j\leqq n}}$ について,

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{3.2.2}$$

と定め, これを A の <u>行列式</u> と呼ぶ.

A の行列式は以下の様な記号で表される :

$$|A|,\quad \det(A),\quad |a_{ij}|,\quad \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 3.2.3　$S_2 = \{\varepsilon,\ (1\ \ 2)\}$ であり, $\operatorname{sgn}(\varepsilon) = 1$, $\operatorname{sgn}((1\ \ 2)) = -1$ であるから

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\varepsilon)\, a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}((1\ \ 2))\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

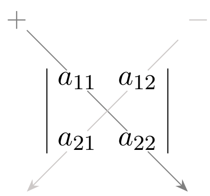
例 3.2.4　$S_3 = \{\varepsilon,\ (1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$ で $(1\ 2\ 3) = (3\ 1)(2\ 1)$, $(1\ 3\ 2) = (2\ 1)(3\ 1)$ だから,

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon) = \operatorname{sgn}((1\ 2\ 3)) = \operatorname{sgn}((1\ 3\ 2)) = 1,$$
$$\operatorname{sgn}((1\ 2)) = \operatorname{sgn}((1\ 3)) = \operatorname{sgn}((2\ 3)) = -1,$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

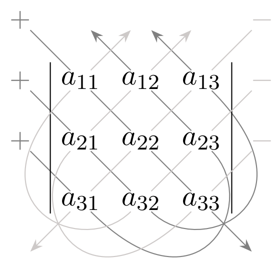
問 3.2.5　4 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について, 行列式を成分の多項式として書き下せ.

Sarrus の規則　2 次および 3 次の正方行列の行列式は, 3.2.3 や 3.2.4 の様に, 左上から右下への成分の積には符号 $+$ を付け, 右上から左下への成分の積には符号 $-$ を付けて和を取つたものである．この記憶の仕方を Sarrus（サラス）の規則といふ.

2 次



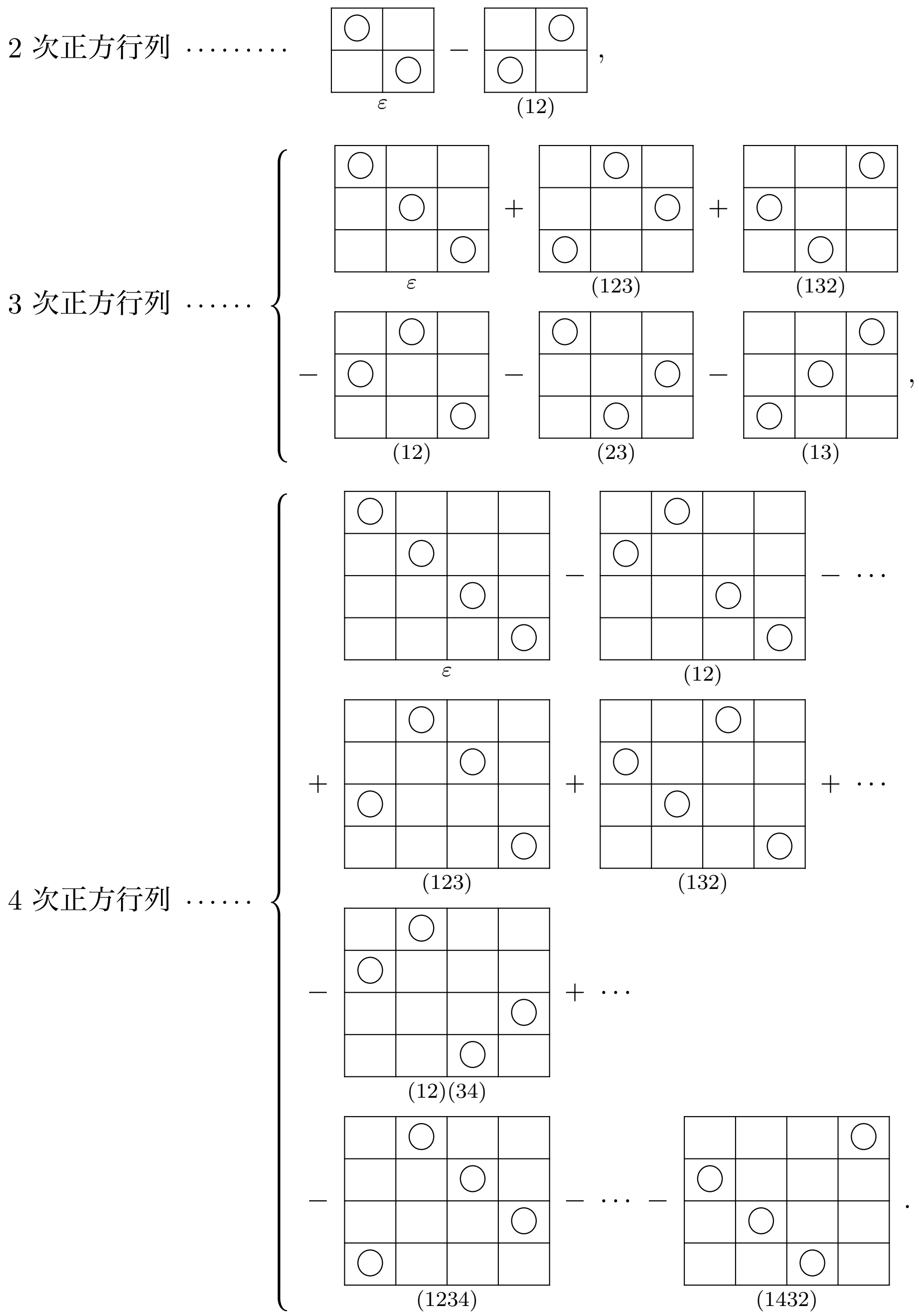
3 次



4 次以上

その様な規則は存在しない！

これらの式を模式的に表せば以下の様になる．ただし, それぞれの模様は元の行列を意味してゐて, ◯ のついた箇所に対応する成分を掛け合わせたものを意味する．



問 3.2.6 正方行列 A のいづれかの行, あるいはいづれかの列の成分がすべて 0 であれば, $|A| = 0$ である．このことを示せ．

4 次以上の行列にも通用する計算方法を以下に説明する.

定理 3.2.7 次の等式が成り立つ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

証明 $A = [a_{ij}]$, $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$ とおく. $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma(1) \neq 1$ ならば $\sigma(k) = 1$ となる $k \neq 1$ が存在する. このとき, 仮定から $a_{k\sigma(k)} = a_{k1} = 0$ で

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

である. つまり $\sigma(1) \neq 1$ なる σ に対応する項はすべて 0 である. ゆゑに

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{11}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

ここで, 最後の和は $\sigma(1) = 1$ なるすべての置換, つまり $\{2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ のすべての置換を走る. その和は定義から, 所望の等式の右辺に他ならない. □

例 3.2.8 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 15.$

例 3.2.9 上三角行列の行列式を計算してみる.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & \ddots & & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

例 3.2.10 3.2.9 より, 特に, 単位行列 I について $|I| = 1$.

定理 3.2.11 (1) 1 つの行を c 倍すると行列式は c 倍になる：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c\,a_{i1} & \cdots & c\,a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 第 i 行が 2 つの行 vectors の和である行列の行列式は, 他の行は同一で第 i 行が各々の vectors である様な 2 つの行列のそれぞれの行列式の和に等しい：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

証明 (1) 定義により

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (c\,a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

となる.

(2) 定義により

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\qquad + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺}) \end{aligned}$$

となる. □

例 3.2.12

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (\because 3.2.11(2)\ ) \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (\because 3.2.11(1)\ ). \end{aligned}$$

定理 3.2.13 (1) 2 つの行を入れ替へると行列式は -1 倍になる．

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行}. \\ \\ \\ \end{array}$$

(2) ある 2 つの行が等しい行列の行列式は 0 である．

証明 (1) n 次の置換 σ に対し $\tau = \sigma\,(i\ j)$ とおくと，

$$\tau(j) = \sigma(i),\ \tau(i) = \sigma(j),\ \tau(k) = \sigma(k) \quad (k \neq i, j \text{ のとき})$$

となる．また σ が S_n 全体を動くと，τ も S_n 全体を動く．さらに

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma\,(i\ j)) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$$

である．よつて

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma} (-\mathrm{sgn}(\tau))\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{n\tau(n)} \\ &= -\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} = (\text{右辺}). \end{aligned}$$

(2) 正方行列 A の第 i 行と第 j が等しいとする．A の第 i 行と第 j 行を入れ替へたものは再び A であるから，

$$\det(A) = -\det(A).$$

よつて $2\det(A) = 0$．即ち $\det(A) = 0$． □

例 3.2.14 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ ② \times \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} = 0 \quad (\because 3.2.13\ (2)).$

例 3.2.15 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} ③ \\ \\ ① \end{array} = -6 \quad (\because 3.2.9).$

注意 3.2.16 上の 3.2.14 における ② $\times \frac{1}{2}$ は直前の段階の第 2 行を $\frac{1}{2}$ 倍したことを示す．記された位置（第 2 行の真横）にも注意されたい．また 3.2.15 における ③ と ① は直前の段階の第 1 行と第 3 行を交換したことを示す．こちらについても，記された位置に注意されたい．

定理 3.2.17　行列の 1 つの行に他の行の何倍かを加へても, 行列式の値は変はらない:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\rightarrow \\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}+c\,a_{j1} & a_{i2}+c\,a_{j2} & \cdots & a_{in}+c\,a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow\text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow\text{第 } j \text{ 行}. \\ \\ \\
\end{array}
$$

証明　3.2.11 より

$$
(\text{左辺}) =
\begin{array}{r}
\\ \\ i\rightarrow \\ \\ j\rightarrow \\ \\ \\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1}+c\,a_{j1} & \cdots & a_{in}+c\,a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+c
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow\ i \\ \\ \leftarrow\ j \\ \\ \\
\end{array}
$$

となるが, この最後の行列式では, 第 i 行と第 j 行が等しいので, 3.2.13(2) により, その値は 0 である. よつて

$$
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{i1} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= (\text{右辺})
$$

となり, 主張が示された. □

例 3.2.18　ここまで学んだ性質を使つて計算してみる.

$$
\begin{vmatrix}
-2 & -5 & 7 \\
1 & 3 & 4 \\
-3 & 2 & -1
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
1 & 3 & 4 \\
-2 & -5 & 7 \\
-3 & 2 & -1
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
② \\ ① \\ \\
\end{array}
= -
\begin{vmatrix}
1 & 3 & 4 \\
0 & 1 & 15 \\
0 & 11 & 11
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ ②+①\times 2 \\ ③+①\times 3
\end{array}
= -
\begin{vmatrix}
1 & 15 \\
11 & 11
\end{vmatrix}
$$

$$
= -11
\begin{vmatrix}
1 & 15 \\
1 & 1
\end{vmatrix}
= -11
\begin{vmatrix}
1 & 15 \\
0 & -14
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ ②+①\times(-1)
\end{array}
= -11\cdot(-14) = 154.
$$

上記の計算の各段階でどの性質を使つたのかを確認せよ.

注意 3.2.19　上の 3.2.18 における ②+①×(−1) は, 直前の段階の第 2 行に第 1 行の (−1) 倍を加へたことを示す. ここでも, 行つた操作がどこに記されてゐるかに注意されたい.

演 習 問 題 3.2

3.2.20 次の行列式を Sarrus の規則で計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$. (4) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}$.

3.2.21 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & -1 \\ 6 & -9 & 6 \end{vmatrix}$. (3) $\begin{vmatrix} 12 & 16 & 32 \\ -6 & 13 & 4 \\ 15 & 10 & -20 \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. (5) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$.

(6) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$. (7) $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}$.

(8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 2 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$. (9) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

(10) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (n 次) . (11) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.2.22 一般に n 次正方行列 $[\,a_{ij}\,]$ の行列式は, 3.1.34 の記号を使つて

$$|\,a_{ij}\,| = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \epsilon(k_1,k_2,\cdots,k_n)\,a_{1k_1}\,a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$$

と書けることを示せ. 但し, 和は $n!$ 個の順列 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ の全てに渡る.

（このことから, 教科書 p.37 の定義 1.30 と本書の定義 3.2.1 は一致する. ）

3.3 行列式の定義と性質 (2)

転置行列の行列式 前節とは行に関する変形で行列式がどう変はるかを調べた. 次の 3.3.1 を用ゐると, 全く同じ性質が列に関する変形に対しても成り立つことがわかる. これにより行列式の計算はさらに容易になる.

定理 3.3.1 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について
$$|A| = |{}^tA|.$$

証明 $A = [a_{ij}]$, ${}^tA = [b_{ij}]$ とおく. $b_{ij} = a_{ji}$ であるから,
$$\begin{aligned}|{}^tA| &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$
ここで $\sigma(j) = k$ のとき $j = \sigma^{-1}(k)$ であるから
$$a_{\sigma(j)j} = a_{k\,\sigma^{-1}(k)}.$$
よつて, 上の式の各項の積を a_{ij} の i の小さい順に並べ替へると
$$= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)}\, a_{2\,\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n\,\sigma^{-1}(n)}.$$
ここで $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ であり (問 3.1.29), また, $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ は S_n から S_n への全単射（1 対 1 対応）であるから, σ が S_n の要素の全てを走るとき, σ^{-1} も丁度 S_n の元を全て走る. 従つて $\sigma^{-1} = \tau$ の式に書き直すことができて
$$= \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\,\tau(1)}\, a_{2\,\tau(2)}\cdots a_{n\,\tau(n)}.$$
これは $|A|$ の定義式に他ならない. □

定理 3.3.2 次の等式が成り立つ：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

証明 行列を転置して, 列に関する性質を行の性質に移せばよい：

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\because\ 3.3.1\ ) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\because\ 3.2.7\ ) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\because\ 3.3.1\ ) \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

となり, 証明できた. □

以下に述べる 3 つの定理も, 3.3.2 の証明と同様に転置行列をとり, 行に関する性質に帰着させることにより証明される. (各自確かめよ → 3.3.18)

定理 3.3.3 (1) 1 つの列を c 倍すると行列式は c 倍になる：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c\,a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c\,a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 第 j 行が 2 つの列 vectors の和である行列の行列式は, 他の列が同一かつ第 j 列が各々の vector である様な 2 つの行列のそれぞれの行列式の和に等しい：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 3.3.4 (1) 2 つの列を入れ替へると行列式は -1 倍になる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) ある 2 つの列が等しい行列の行列式は 0 である.

定理 3.3.5 行列のある列に他の列の何倍かを加へても, その行列式の値は変はらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+c\,a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+c\,a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

本書では $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 等により直前の段階の第 1 列, 第 2 列, 第 3 列等を表すこととする.

例 3.3.6 行列式の計算例:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} ①+④\times(-3) \\ ②+④\times(-2) \\ ③+④\times(-1) \\ \ \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} ④ \\ \\ \\ ① \end{matrix}$$

$$= - \underset{(\because 3.2.7)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}} = \underset{\boxed{2}\times(-1)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 8 \end{vmatrix}} = 2 \underset{\boxed{3}\times\frac{1}{2}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2 \underset{\boxed{3}+\boxed{1}\times(-3)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 13 \end{vmatrix}}$$

$$= 2 \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} \quad (\because \text{定理 } 3.3.2) \quad = 2 \underset{\boxed{2}+\boxed{1}\times(-3)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = 2 \times 1 \times 8 = \underline{\ 16\ }.$$

例 3.3.7 行列式の計算例:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\boxed{3}+\boxed{1}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 4 \times \underset{\boxed{1}\times\frac{1}{3}\ \ \boxed{2}\times\frac{1}{2}\ \ \boxed{3}\times\frac{1}{4}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -24 \underset{\boxed{2}\ \boxed{1}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = -24 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -48 \times (-1) = \underline{\ 48\ }.$$

定理 3.3.8 A が r 次正方行列, D が s 次正方行列ならば,

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

が成り立つ.

証明 3.3.1 により, いずれか一方のみを示せばよい. $n = r + s$ として行列を

$$X = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = [\, a_{ij} \,]$$

とおく. 定義より

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)}\, a_{r+1,\sigma(r+1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \tag{3.3.9}$$

仮定から $a_{ij} = 0$ $(1 \leqq i \leqq r,\ r+1 \leqq j \leqq n)$ であるので, $\{\sigma(1),\ \sigma(2),\ \cdots,\ \sigma(r)\}$ の中に r より大きな数があれば $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \cdots, a_{r\sigma(r)}$ の内に 0 が含まれるから

$$a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{r\sigma(r)}\, a_{r+1,\sigma(r+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

となる. よつて上の (3.3.9) の σ に関する和については, $\{\sigma(1)\ \cdots,\ \sigma(r)\} = \{1,\ \cdots,\ r\}$ となつてゐるものだけを考へれば良い. このとき

$$\{\sigma(r+1)\ \ \cdots,\ \sigma(n)\} = \{r+1,\ \cdots,\ n\}$$

でもあるから, $\{1,\ \cdots,\ r\}$ と $\{r+1,\ \cdots,\ n\}$ のそれぞれの置換

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r) \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ \sigma(r+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

について $\sigma = \tau\rho = \rho\tau$ であり, 上で狭めた範囲を σ が動くとき, τ と ρ は丁度, $\{1,\ \cdots,\ r\}$ の置換全体と $\{r+1,\ \cdots,\ n\}$ の置換全体を動く. しかも $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\tau)\,\mathrm{sgn}(\rho)$ であるので,

$$\begin{aligned} |\,X\,| &= \sum_{\tau,\rho} \mathrm{sgn}(\tau\rho)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)}\, a_{r+1,\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= \Bigl(\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)}\Bigr) \Bigl(\sum_{\rho} \mathrm{sgn}(\rho)\, a_{r+1,\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)}\Bigr) = \det(A)\,\det(D) \end{aligned}$$

となり, 証明された. □

例 3.3.10

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -29 \cdot 17 = \underline{-493}\,.$$

定理 3.3.11 n 次正方行列 A, B に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

証明 $2n$ 次正方行列の行列式 $\det\begin{bmatrix} A & O \\ -I & B \end{bmatrix}$ を 2 通りに計算する. まず 3.3.8 により

$$\det\begin{bmatrix} A & O \\ -I & B \end{bmatrix} = \det(A)\det(B).$$

次に $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ とおく. $\det\begin{bmatrix} A & O \\ -I & B \end{bmatrix}$ において, 第 1 列に b_{1k}, 第 2 列に b_{2k}, $\cdots$, 第 n 列に b_{nk} を掛けて第 $n+k$ 列に加へる操作を $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して行ふと ($n = 2$ のときは 3.3.13)

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} A & O \\ -I & B \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} A & AB \\ -I & O \end{bmatrix} = (-1)^n \det\begin{bmatrix} -I & O \\ A & AB \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \det(-I)\det(AB) = (-1)^n(-1)^n \det(AB) = \det(AB)\end{aligned}$$

となり, 成り立つ. □

例 3.3.12 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}$ の両辺の行列式を取ると

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

を得る.

例 3.3.13 3.3.11 の証明中の操作を $n = 2$ の場合に具体的に書いてみると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{3}+\boxed{1}\times b_{11}, \qquad \boxed{3}+\boxed{2}\times b_{21}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{4}+\boxed{1}\times b_{12}, \qquad \boxed{4}+\boxed{2}\times b_{22}$$

行列の積と行列式に関する一般公式

3.3.11 を一般化した公式を証明しておく．この証明は 3.3.11 の別証明を含んでゐる．

定理 3.3.14 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$ をそれぞれ (m,n) 型, (n,m) 型の行列とし, $C=[c_{ik}]=AB$ とおく．このとき

(1) $m=n$ ならば $|C|=|A||B|$. （これが 3.3.11）

(2) $m<n$ ならば

$$(3.3.15)\quad |C|=\sum_{1\leqq j_1<j_2<\cdots<j_m\leqq n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m}\\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{j_11} & b_{j_12} & \cdots & b_{j_1m}\\ b_{j_21} & b_{j_22} & \cdots & b_{j_2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{j_m1} & b_{j_m2} & \cdots & b_{j_mm}\end{vmatrix}.$$

(3) $m>n$ ならば $|C|=0$.

解 以下の (2) の証明を辿れば (1) と (3) が自然に従ふから, (2) のみを証明する．見易くするために $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
|C|&=\left|\ \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\ \right|_{m\times m}=\left|\ \sum_{j=1}^n \boldsymbol{a}_j b_{j1}\ \ \sum_{j=1}^n \boldsymbol{a}_j b_{j2}\ \ \cdots\ \ \sum_{j=1}^n \boldsymbol{a}_j b_{jm}\ \right|\\
&=\left|\ \sum_{j_1=1}^n \boldsymbol{a}_{j_1} b_{j_11}\ \ \sum_{j_2=1}^n \boldsymbol{a}_{j_2} b_{j_22}\ \ \cdots\ \ \sum_{j_m=1}^n \boldsymbol{a}_{j_m} b_{j_mm}\right|\\
&=\sum_{j_1=1}^n\left|\ \boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \sum_{j_2=1}^n \boldsymbol{a}_{j_2} b_{j_22}\ \ \cdots\ \ \sum_{j_m=1}^n \boldsymbol{a}_{j_m} b_{j_mm}\right| b_{j_11}\quad (\because \text{第 1 列の線形性})\\
&=\sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2=1}^n\left|\boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \ \sum_{j_3=1}^n \boldsymbol{a}_{j_3} b_{j_33}\ \ \cdots\ \ \sum_{j_m=1}^n \boldsymbol{a}_{j_m} b_{j_mm}\right| b_{j_11}\,b_{j_22}\quad (\because \text{第 2 列の線形性})\\
&=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_m=1}^n\left|\,\boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_m}\,\right| b_{j_11}\,b_{j_22}\cdots b_{j_mm}\quad (\because \text{同様の事の繰り返し}).
\end{aligned}$$

ここで, 各項において j_1, $\cdots$, j_m の中に重複があれば, その項は 0 になるから, 重複がない項のみの和が得られる．いま, それらの和の項を集合 $\{j_1,\cdots,j_m\}$ （従つて要素の順序は無視）ごとに分別すれば

$$=\sum_{\{j_1,\cdots,j_m\}\subset\{1,\cdots,n\}}\left|\,\boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_m}\,\right| b_{j_11}\,b_{j_22}\cdots b_{j_mm}.$$

これを $j_1<j_2<\cdots<j_m$ なる順序に整理すれば

$$=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_m}\left|\,\boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_m}\right|\sum_{\binom{j_1\ j_2\ \cdots\ j_m}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_m}}\mathrm{sgn}\left(\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m\end{pmatrix}\right) b_{k_11}\,b_{k_22}\cdots b_{k_mm}.$$

これは与式の右辺に他ならない. □

注意 3.3.16 3.3.14 (2) は, Schur 多項式の展開, τ 函数の無限級数展開など, 様々な場面での応用がある.

演 習 問 題 3.3

3.3.17 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \\ 8 & 8 & 12 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -8 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix}$.　(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.　(5) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

(6) $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & 4 & 2 \\ -9 & 7 & -3 & 6 \end{vmatrix}$.　(7) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$.

(8) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 \\ 6 & 10 & 15 & 8 & 9 & 8 \\ 4 & 10 & 20 & 9 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.　(9) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3.3.18 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5 を証明せよ.

3.3.19 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix}$ を 2 通り計算することにより, 次を示せ.

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2.$$

3.3.20 A, B, C が n 次正方行列のとき, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix}$ を求めよ.

3.3.21 A, B が n 次正方行列のとき $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}=|A+B||A-B|$ を示せ.

3.3.22 m が奇数のとき $A^m=I$ ならば $|A|=1$ であることを示せ.

3.3.23 行列式は次の性質を持つ写像

$$|\ \ |:\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R},\quad A\longmapsto|A|$$

として, 一意的に定まる： 各行と各列に関しての交代的線形性 (多重線形性) を持ち, かつ正規化 ($|I|=1$) されてゐる. ここで交代的とは, 2 つの行 (あるいは 2 つの列) を入れ替へると値の符号が逆転することを意味する. このことを証明せよ.

3.3.24 (3.3.15) の右辺を $m=2$, $n=3$ の場合に $\sum$ 記号を使はないで書き下せ.

3.4 余因子行列と余因子展開

ここで, 当面の目標を述べておきたい. 先に行列の演算として scalar 倍, 加法, 減法, 乗法について述べて, それらの性質も述べた. 行列の除法については, 現時点まで何も述べてゐないが, 少しだけ今後の方針を述べておく. 数については, 例へば

$$7 \div 3 = 7 \times \frac{1}{3}$$

の様に除法は逆数を乗ずることで行はれる. ここで $\frac{1}{3}$ は $3 \times x = 1$ となる x に他ならない. 行列においても同様であつて, 与へられた正方行列 A に対して,

$$AX = I$$

となる行列 X が計算できさへすれば, この X を乗ずることで, A で割るといふ計算が可能になる. 以降では, この様な X を求める方法を述べていく. その際, 行列式が中心的な役割りを果す. それゆゑに, もう少し行列式の性質を導いておく必要がある.

さて, そこで, まづは行列式の余因子展開と呼ばれるものを説明する. これは, 次節で述べる逆行列の公式に直結するので重要である. その準備として次の定義をおく.

定義 3.4.1 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ と各 (i, j) について, 第 i 行の成分すべてと, 第 j 行のすべてを取り除いて, 隙間を詰めてできる $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} で表す. 即ち,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\ \square\ \text{の部分を除いて詰める}).$$

これを A の (i, j) <u>小行列</u>, その行列式 $|A_{ij}|$ は (i, j) <u>小行列式</u>と呼ぶ.

例 3.4.2 $B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ について

$$B_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

など.

余因子展開 行列 $A = [a_{ij}]$ の第 j 列は n 個の vectors の和に分解されて

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

と書けるから, 定理 3.3.3(2) を繰り返し使つて, A の行列式は

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.4.3}$$

と書ける. この右辺の i 番目の行列式を計算しやう. まづ, 第 i 行を順に 1 つ上の行と入れ替へる操作を繰り返して 1 番上に移動させる (入れ替へは $i-1$ 回). 次に第 j 列を順に 1 つ左の列と入れ替へる操作を繰り返して 1 番左の列に移動させる操作を行ふ (入れ替へは $j-1$ 回). つまり

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{第 } i \text{ 行を上に移動})$$

$$= (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j}\, a_{ij} |A_{ij}|\,.$$

これを (3.4.3) の右辺の n 個の行列式に行へば, 次の式が得られる.

命題 3.4.4 行列式 $|A|$ の第 j 列に関する余因子(よいんし)展開と呼ばれる次式が成り立つ:

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj}|A_{nj}|.$$

また, 第 j 列に代りに第 i 行で同様な操作を行ふことで次の公式が得られる.

命題 3.4.5 行列式 $|A|$ の第 i 行に関する余因子(よいんし)展開と呼ばれる次式が成り立つ:

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|.$$

例 3.4.6 第 2 列に関する余因子展開の例：

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

行列の成分に 0 が多い列や行があれば, その列や行に関する余因子展開が有効である.

例 3.4.7 第 2 行に関する余因子展開の例

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

例 3.4.8 （n 次正方行列の行列式の第 1 行に関する余因子展開）

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1}b \cdot b^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

演 習 問 題 3.4

3.4.9 次の行列の行列式を与へられた行または列に関して余因子展開した式を書け. 但し, 計算に入る前の展開式のみ記せ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ （第 3 行）.　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 3 & y & 2 \\ 2 & z & 1 \end{bmatrix}$ （第 2 列）.

3.4.10 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & h & i \end{vmatrix}$.　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ a & 4 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & c & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.　　(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3.5 逆行列

この節では, 行列の除法を学ぶ. そのために逆行列といふものを定義する. ここでは専ら正方行列のみを扱ふ.

定義 3.5.1 (逆行列) A は n 次正方行列とする. n 次正方行列 B が
$$AB = BA = I_n$$
を満たすとき, B は A の逆行列であるといはれる.

各 A に対し, 逆行列は高々 1 つだけ存在する. 実際 B と C が A の逆行列であれば
$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$
となり, B と C は一致する. A は逆行列を持つとき正則であるといはれ,
$$A^{-1}$$
でもつて A の逆行列を表す.

問 3.5.2 A が正則行列ならば, $|A| \neq 0$ であり, $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ であることを示せ.
(Hint : 3.3.11 と 3.2.10 と逆行列の定義から $|A||A^{-1}| = |AA^{-1}| = |I| = 1$.)

定義 3.5.3 正方行列 A が正則であるとき, 自然数 m について, 次の様に記す:
$$A^{-m} = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} \quad (A^{-1} \text{ の } m \text{ 個の積}).$$

問 3.5.4 正則行列 A と 整数 m, n について $A^m A^n = A^{m+n}$, $(A^m)^n = A^{mn}$ が成り立つことを示せ.

この小節で述べる内容を 2 次の正方行列で述べてみる. 2 次行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ は $|A| = ad - bc \neq 0$ のとき, かつ, その時に限つて逆行列を持ち,
その場合, A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{3.5.5}$$

で与へられる. この様な公式が一般の n 次正方行列についても知られてゐて, それを解説することが, この小節の目的である.

定義 3.5.6 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ と各 (i, j) について, 第 i 行の成分すべてと, 第 j 行のすべてを取り除いて, 隙間を詰めてできる $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} で表すのであつた (3.4.1 参照). これを用ゐて,
$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}| \quad \text{(左辺と右辺で, 添字 } i \text{ と } j \text{ の順序が逆転してゐることに注意せよ.)}$$
と定め, これを A の (i, j) 余因子(よいんし)と呼ぶ. さらに n 次正方行列
$$\widetilde{A} = [a^*_{ij}]_{\substack{1\leqq i\leqq n\\ 1\leqq j\leqq n}}$$
を A の余因子行列と呼ぶ.

定理 3.5.7 正方行列 A とその余因子行列 $\widetilde{A}$ の間に次の関係がある：

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = |A|I.$$

証明 $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ とし，3.5.6 の記法で $\widetilde{A} = [a^*_{jk}]_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ 1 \leqq k \leqq n}}$ と記す．まづ $i \neq k$ ならば $A\widetilde{A}$ の (i,k) 成分が 0 であることを示さう． $A\widetilde{A}$ の (i,k) 成分は

$$\begin{aligned} & a_{i1}\,a^*_{1k} + a_{i2}\,a^*_{2k} + \cdots + a_{in}\,a^*_{nk} \\ & \qquad = (-1)^{k+1}a_{i1}|A_{k1}| + (-1)^{k+2}a_{i2}|A_{k2}| + \cdots + (-1)^{k+n}a_{in}|A_{kn}| \end{aligned}$$

と書けるが，もし $i < k$ ならば，これは A の第 k 行に第 i が入り込んだ行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } k \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

を第 k 行で余因子展開したものに他ならない．しかし，それは 3.3.4(2) により 0 である．$i > k$ のときも同じ理由で $A\widetilde{A}$ の (i,k) 成分は 0 である．$i = k$ の場合と $\widetilde{A}A$ については問 3.5.8 とする． □

問 3.5.8 上の 3.5.7 の証明の残された部分を実行せよ． （Hint：$A\widetilde{A} = |A|I$ の (i,i) 成分が $|A|$ であることは 3.4.5 から直ちにわかる．$\widetilde{A}A = |A|I$ については 3.4.4 を用ゐればよい．）

定理 3.5.9 A が正則行列であるためには，$|A| \neq 0$ であることが必要十分である．また，A が正則行列のとき $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ である．

証明 必要性は 3.5.2 で示されてゐる．十分性．$d = |A|$, $B = \frac{1}{d}\widetilde{A}$ とおくと，3.5.7 より，$AB = A\frac{1}{d}\widetilde{A} = \frac{1}{d}A\widetilde{A} = \frac{1}{d}dI = I$． 同様の計算で $BA = I$ も成り立つことがわかるから B は A の逆行列である． □

問 3.5.10 上記 3.5.9 の主張が (3.5.5) を含むことを確認せよ．

次の定理は簡単な事を述べてゐると思はれるかも知れないが，全く自明ではない．読者は是非 $n = 3, 4$ などで，この主張を成分で書き下してみて欲しい．証明にはここまでに第 3 章で学んだ様々な道具（特に行列式の性質）を用ゐる．別の方法を 5.5.4 に述べてあるが，その方法は簡約化といふ方法のみで行はれ，行列式は不要である．

定理 3.5.11 A, B は n 次正方行列のとき，$AB = I \iff BA = I$ である．

証明 $AB = I$ とすると，定理 3.3.11 から $|A|\cdot|B| = |AB| = |I| = 1$． よつて $|A| \neq 0$． 従つて定理 3.5.9 により A は正則行列で逆行列 A^{-1} を持つ．与式の左から A^{-1} を掛けると $B = A^{-1}$ を得る．よつて 3.5.12 が成り立つ． それゆゑ，$BA = A^{-1}A = I$ も成り立つから 3.5.11 も示された． □

逆行列の定義 3.5.1 と照らし合はせれば, 上記 3.5.11 は次の様にも述べられる.

定理 3.5.12 A, B を n 次正方行列とする.
(1) $AB=I$ ならば, B は A の逆行列である.
(2) $BA=I$ ならば, B は A の逆行列である.

例題 3.5.13 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ の余因子行列と逆行列を求めよ.

解 $\widetilde{A}=[a_{ij}^*]$ とすると $a_{ij}^*=(-1)^{i+j}|A_{ji}|$ である. よつて

$$a_{11}^*=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=6,\ a_{12}^*=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-7,\ a_{13}^*=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,$$

$$a_{21}^*=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-9,\ a_{22}^*=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7,\ a_{23}^*=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=4,$$

$$a_{31}^*=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad a_{32}^*=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=7,\quad a_{33}^*=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

また, 計算は略すが $|A|=-21$ である. よつて, 余因子行列, 逆行列

$$\widetilde{A}=[\,a_{ij}^*\,]=\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{-21}\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

を得る. □

逆行列を計算する際, 一般的には 5.5 節の掃き出し法の方が容易である. しかし, 論理的な扱ひをする場合や行列に文字が含まれる場合などには定理 3.5.9 が有効である.

例題 3.5.14 $A\in\mathrm{Mat}(m,\mathbb{R})$, $B\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{R})$, $D\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ とし, A, D は正則行列であるとせよ. このとき $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ は正則行列であることを示し, 次の等式を示せ:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}.$$

解 仮定と 3.5.9 の必要性の主張から $|A|\neq 0$, $|D|\neq 0$ である. このとき 3.3.8 より $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix}=|A||D|\neq 0$ ゆゑ, 3.5.9 の十分性により $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}$ は正則である. そこで

$$\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

$P\in\mathrm{Mat}(m,\mathbb{R})$, $Q\in\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{R})$, $R\in\mathrm{Mat}(n,m,\mathbb{R})$, $S\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ とおく. このとき

$$\begin{bmatrix} I_m & O \\ O & I_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AP+BR & AQ+BS \\ AR & DS \end{bmatrix}$$

となることが長方形分割の計算でわかるから,

$$AP+BR=I_m,\quad AQ+BS=O_{m,n},\quad AR=O_{n,m},\quad DS=I_n.$$

これを右から順に解いていくことができる. その結果, 所望の表示を得る. □

演習問題 3.5

3.5.15 次の行列の余因子行列を求めよ．またそれを用ゐて逆行列を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. (2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$. (3) $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(4) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{bmatrix}$. (5) $\begin{bmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2x-1 & x-1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.5.16 3.5.15 (1), (2), (3) の行列 A, B, C について, A^{-2}, B^{-2}, C^{-2} を求めよ．

3.5.17 次のそれぞれを（3.5.12 や 3.5.11 を使はずに）定義に従つて確かめよ．

(1) A が正則ならば, A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) A が正則ならば, ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(よつて, この行列を ${}^tA^{-1}$ と書いてよい)

(3) A, B が正則ならば AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.5.18 A, B が可換ならば, 次の行列の組も可換であることを示せ．

(1) A^{-1}, B (2) A^{-1}, B^{-1} (3) ${}^tA$, ${}^tB$ (4) A^{-3}, B^{-2}

3.5.19 $AB = O$ となる B $(\neq O)$ が存在するならば, A は正則でないことを示せ．

3.5.20 A が冪零行列ならば $I + A$, $I - A$ は共に正則行列であることを示せ．また, その逆行列を求めよ．但し, 得られた逆行列が正しいものであることは定義に従つて確かめよ．3.5.12 や 3.5.11 を使つてはいけない．(Hint : 2.2.21)

3.5.21 $A^5 = O$ のとき, $I - 2A$ の逆行列を A を使つて書け．

3.5.22 A が m 次正則行列, D が n 次正則行列ならば, 任意の $m \times n$ 行列 B, $n \times m$ 行列 C に対し, 次の行列 Y, Z は正則であることを示せ．また Y^{-1}, Z^{-1} を求めよ．

$$Y = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} B & A \\ D & O \end{bmatrix}.$$

3.5.23 A が n 次の正方行列で, $\widetilde{A}$ が A の余因子行列ならば

$$\det(\widetilde{A}) = \det(A)^{n-1}$$

であることを示せ．

3.5.24 A が対称行列ならば余因子行列 $\widetilde{A}$ も対称行列であることを示せ．また A がさらに正則行列であれば A^{-1} も対称行列であることを示せ．

3.5.25 A が交代行列ならば A^{-1} は交代行列であるか．

3.6　特別な形の行列式

いくつかの特別な形の行列式の値の求め方を知つてゐると便利である.

例題 3.6.1　次の等式を証明せよ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_i - x_j).$$

左辺は Vandermonde(ファンデルモンド)[10] の行列式と呼ばれる.

解　n に関する帰納法で示す. $n = 2$ のときは正しい. $n-1$ 次行列のときに正しいと仮定する. このとき, 左辺の行列式に ⓝ $-$ (n−1)$\times x_1$, (n−1) $-$ (n−2)$\times x_1$, $\cdots$, ② $-$ ①$\times x_1$ といふ行の基本変形を行ふと

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1) \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

後半の等式は因子の個数が ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 個であるから正しい.　□

[10] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) France 生.

例題 3.6.2 下記の $n+1$ 次の正方行列の行列式についての等式が成り立つことを示せ.

$$F_n = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

解 n に関する帰納法で示す. $n=0$ のときは正しい. $n-1$ まで成り立つとして, n のときに成り立つことを示す. F_n について第 1 行に関する余因子展開を行ふと

$$\begin{aligned} F_n &= a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & & \vdots \\ a_3 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= a_0x^n + F_{n-1} \\ &= a_0x^n + (a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n) \qquad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

となつて n のときも正しい. □

例題 3.6.3 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0.$$

解 列の基本変形を行つて

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & b+c+d+a \\ 1 & c & d & c+d+a+b \\ 1 & d & a & d+a+b+c \end{vmatrix} \\ & \qquad \boxed{4}+\boxed{2}, \quad \boxed{4}+\boxed{3} \\ &= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because \ \boxed{1} = \boxed{4}\ ) \end{aligned}$$

となる. □

演習問題 3.6

3.6.4 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3^2 & 2^2 & 5^2 & 7^2 \\ 3^3 & 2^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix}$. (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 2^3 & 1 & 7 \\ 3^3 & 2^4 & 1 & 7^2 \\ 3^4 & 2^5 & 1 & 7^3 \end{vmatrix}$.

(3) $\begin{vmatrix} 2^3 & 1 & 2^2 & 2 \\ (-3)^3 & 1 & 3^2 & -3 \\ 7^3 & 1 & 7^2 & 7 \\ 5^3 & 1 & 5^2 & 5 \end{vmatrix}$. (4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \\ 2^2 & 2^3 & 2^5 & 2^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2^2 & -2^4 & 2^3 \end{vmatrix}$.

3.6.5 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c)$.

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$.

(3) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$.

(左辺は n 次行列の行列式)

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$.

第 4 章　3 次元 Euclid 空間における幾何学

この章で学ぶことは, 厳密には, 第 8 章の内積空間を理解した上で説明されるべきものなのであるが, 高校までに学んだ直観的な空間の理解の流れを汲んだ説明を試る.

4.1　3 次元 Euclid 空間

この節では, 高校で学んだ " 空間 ", およびそこにおける vectors についての復習と, さらに踏み込んだ内容を学ぶ. 以下, 高校で学んだ " 空間 " を

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^3$$

で表す. これは正式には 3 次元 Euclid(ユークリッド)[11] 空間 と呼ばれる空間である. $\mathbb{E}$ の各点 P には x 座標, y 座標, z 座標 が定まり, P の座標はそれらの 3 つの座標を用ゐて (a, b, c) の形に表され, これを P の 座標 と呼ぶのであつた. ここに a, b, c は実数である. 従つて $\mathbb{E}$ の点は 3 つの実数の組と 1 対 1 に対応するから, 集合としては $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ と表してもよいが, $\mathbb{E}$ には 直線, 線分, 平行 の概念の他に任意の 2 点 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ の間の 距離 が定められてをり, それは $\overline{\mathrm{PQ}}$ と記されて

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad (\text{2 点間の距離}) \tag{4.1.1}$$

で与へられる. さらに, 高校では, 以下に述べる様に, $\mathbb{E}$ における vectors といふものも学んだ.

定義 4.1.2　$\mathbb{E}$ 内の 2 点 A, B に対し, A を 始点 とし, B を 終点 とする 有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が定まる.　現代数学の立場では, $\mathbb{E}\times\mathbb{E}$ の元 (A,B) のことを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く, と理解すべきである.　2 つの有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ について, 線分 AB と CD が平行である (記法 $\mathrm{AB}\,/\!\!/\,\mathrm{CD}$) とき, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ も, 平行 であるといはれ, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!\!/\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と記される.

定義 4.1.3　$\mathbb{E}$ 内の有向線分を 平行移動で移り合ふ といふ 同値関係 で分類し, 2 本の有向線分は平行な有向線分は等しいものと考へる [12]：

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!\!/\,\overrightarrow{\mathrm{CD}} \text{ かつ } \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

ここで 4 点の座標を $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$, $\mathrm{C}(c_1, c_2)$, $\mathrm{D}(d_1, d_2)$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \iff b_1 - a_1 = d_1 - c_1,\ b_2 - a_2 = d_2 - c_2$$

である.

[11] Euclid（BC 300 年頃）Greek 生.

[12] 高校の教科書には, 任意の vector は平行移動しても変らない, と記されてゐる. このことは, 現代数学の立場では, 剰余類 $(\mathbb{E}\times\mathbb{E})/$"平行移動で移り合ふ" が有向線分の集合である, と解するのである.

空間 $\mathbb{E}$ 内の有向線分の演算（和, 差, scalar 倍）を復習する.

定義 4.1.4 2 つの有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ について, これらの和を

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と定める. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき, $-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と定め, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の差を

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

で定める. k を実数とする. 3 点 A, B を通る直線上に点 C を $k\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ となる様に取る. 但し $k>0$ のときは B が 2 点 A と C の間にある様にし, $k<0$ のときは A が 2 点 B と C の間にある様にする. もちろん $k=0$ のときは C は A に一致する. このとき $k\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と約束し, これを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の k 倍（scalar 倍）とよぶ. これにより通常の vectors の間の演算の性質が成り立つ.

補題 4.1.5 任意の有向線分は, 原点を始点とするある有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行である.

定義 4.1.6 （vectors）原点 O を始点とする任意の有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を単に $\mathbb{E}$ の vector と称し, 通常, 小太文字で $\boldsymbol{a}$ などと記す:

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

この状況を点 A の位置 vector は $\boldsymbol{a}$ であるといふ. さらに, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行移動で移り合ふ有向線分である場合も

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

と書く [13]. A の座標が (a_1,a_2,a_3) のとき, $\boldsymbol{a}$ の成分は (a_1,a_2,a_3) であるといひ,

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

と記す. ここで $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $k\in\mathbb{R}$ のとき

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),\quad k\,\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$$

であることも容易にわかる.

定義 4.1.7 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のとき

$$|\boldsymbol{a}|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$$

と書いて, これを $\boldsymbol{a}$（あるいは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$）の大きさまたは長さと呼ぶ.

注意 4.1.8 空間 $\mathbb{E}$ を厳密に定義するためには第 8 章で学ぶ内容が必要であるが, 先に断つた様に, この章では高校で学んだ空間を既知のものとして述べてゐることを, 心に留めておいて欲しい. 第 8 章以降では, 上で定義した vector の大きさを $\|\boldsymbol{a}\|$, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right\|$ で表す. こちらの方が大学では一般的である.

定義 4.1.9 （内積）$\mathbb{E}$ 内の 2 つの vectors $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき, $\angle\mathrm{AOB}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角といふ. このとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle\mathrm{AOB}$$

なる量を考へて, これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積といふ.（第 8 章では, これを $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ で表す. ）

[13] これらの記法は高校で学んだものであり, 混乱の心配はないであらう.

下記の問に挙げた内積の性質はすべて高校で学んだことである.

問 4.1.10 内積に関する次の性質を示せ. 但し, k は任意の実数, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は $\mathbb{E}^3$ 内の任意の vectors である.
(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.
(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0$.
(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.
(4) $(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

定義 4.1.11 2 つの vectors $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ について $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ であるとき, この 2 つの vectors は垂直である, または, 直交するといはれ, 次の記号で表す:
$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}.$$

4.2 3 次元 Euclid 空間内の vectors の外積

定義 4.2.1 空間 $\mathbb{E}$ 内の 2 本の vectors
$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$$
に対して
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\,a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1\,)$$
と定め, これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積と呼ぶ.

命題 4.2.2 外積は次の性質を持つ. 即ち $\mathbb{E}$ 内の任意の vectors $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ と任意の実数 k に対して
(1) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(k\boldsymbol{b})=k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.
(2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, $\quad(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.
(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.
(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$.
(5) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\det([\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}])$.
(6) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$.
(7) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とするとき $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$.
(8) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

問 4.2.3 4.2.2 (1) 〜 (8) を証明せよ.

問 4.2.4 次のことを確かめよ.
(1) $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{c}=(1,1,1)$ のとき $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.
(2) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ について $(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3=1$.

注意 4.2.5 4.2.2 (6), (7) から, 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に関して垂直で, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が作る平行四辺形の面積を長さとする vector を与えることがわかる.
ここで, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向きは次に述べる parity についての説明を見ていただきたい.

空間 $\mathbb{E}$ の座標の parity について

基底に順序を定めて, その順序に並べた行列を考へ, それの行列式の正負によつて空間の向きといふものを定める. しかし, ここでは, 直観的な説明に留めておく.

高校で学んだ空間 $\mathbb{E}$ を図示する際に, あらゆる教科書で, 右手の親指, 人差し指, 中指を互ひが垂直になる様にしたとき, 右手の親指が x 軸, 人差し指が y 軸, 中指が z に対応する様にしてある. この場合だと, 右手の親指を $\boldsymbol{a}$, 人差し指を $\boldsymbol{b}$ としたときの中指が vector 積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向きを表す.

しかし, これとは異る方法, たとへば西方向に x 軸, 北方向に y 軸をとつたとき, z 軸は天頂の方向にとつても, なんら問題は起きない.

この様なことに関することを向き付け, あるいは parity と呼ぶのであるが, これ以上の向き付けについての説明は, 講義中になされるであらう.

4.3　平行六面体の体積

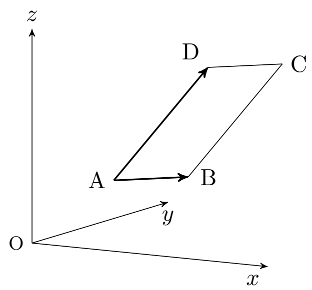
平行四辺形の面積　$\mathbb{E}$ 内の平行四辺形 ABCD に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$$

とおく. 平行四辺形 ABCD の（直観的な意味での）面積 S は

$$\begin{aligned} S &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| \\ &= \sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2} \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

で与へられる.



問 4.3.2　(4.3.1) が正しいことを示せ.

平行六面体の体積　$\mathbb{E}$ 内の平行六面体 EFGH–E′F′G′H′ を考へる. 即ち, $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{EE'}}$ とおくとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{EF'}}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{EG}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{EH'}}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{EG'}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$$

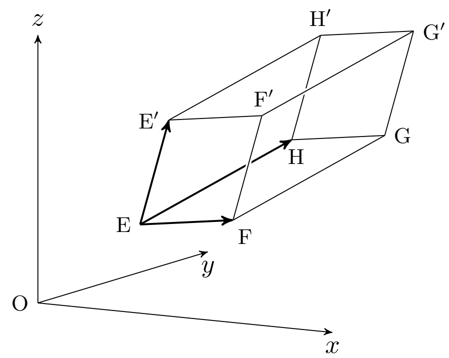
となつてゐるものとする. さらに

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\quad \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$$

とする. このとき, 直観的な意味でのこの平行六面体の体積 V は次式で与へられる：

$$V=\mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right). \tag{4.3.3}$$

ここで abs は絶対値をとることを意味する.



問 4.3.4　(4.3.3) が正しいことを示せ.

演 習 問 題 4.3

4.3.5　空間 $\mathbb{E}$ 内の 3 点 $\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$, $\mathrm{C}(c_1,c_2,c_3)$ および原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を頂点とする四面体の体積 V を与へる公式を作れ.

第 5 章　連立 1 次方程式

5.1　行列と連立 1 次方程式

次の問題を解くことから始める.

例題 5.1.1　次の等式を満たす x, y を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

解　左辺の積を行へば $\begin{bmatrix} 2x+3y \\ x-4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ となり, 上の方程式を解くことは連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ \;\; x-4y=9 \end{cases}$$

を解くことに他ならない. これを解いて $x=5$, $y=-1$. □

上の例題とは逆に連立 1 次方程式を行列の方程式で表さう. m 個の方程式からなる n 個の未知数についての連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

に対して

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

とおく. 5.1.1 と同様に, 連立 1 次方程式 $(*)$ を解くことは, 行列の方程式

$$(**) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を解くことと同値である. よつて, 行列の方程式 $(**)$ も <u>連立 1 次方程式</u> と呼ぶ.

定義 5.1.2 （係数行列, 拡大係数行列） 行列 A を連立 1 次方程式 $(*)$ や $(**)$ の 係数行列 といふ. 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について, 行列 A に列 vector $\boldsymbol{b}$ を付け加へた行列

$$\left[A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\right]=\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

を連立 1 次方程式 $(*)$ の 拡大係数行列 といふ.

ここで, $\left[A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\right]$ の縦の点線は単に便宜的なものであるが, この線を引いた方がわかり易い.

例題 5.1.3 次の連立 1 次方程式について問に答へよ.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3+4x_4=7 \\ x_1 \quad\quad -3x_3+x_4=5 \\ 2x_1-x_2+9x_3 \quad\quad =0. \end{cases}$$

(1) 係数行列, 拡大係数行列を記せ.
(2) 行列の方程式の形で記せ.

解 (1) 係数行列は $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, 拡大係数行列は $\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & -2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

(2) 行列の方程式で表せば

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる. □

数 vectors の 1 次結合. m 個の同じ型の数 vectors $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ が与へられたとき, vector

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{a}_m$$

を $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ の 1 次結合 と称する.

例 5.1.4 2 次の列 vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合で表すと

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

さて, 連立方程式 $(**)$ において, 係数行列 A を $A = [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]$ と列 vectors に分割すると

$$A\boldsymbol{x} = [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

となる. よつて $(**)$ は

$$(***) \qquad x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

となる $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を求めることと同等である. 即ち, 連立 1 次方程式 $(**)$ を解くことは, 与へられた vector $\boldsymbol{b}$ を vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表す仕方をすべて求めること に他ならない.

例題 5.1.5 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の 1 次結合で表せ.

解 与へられた vectors の間に 1 次関係があつたとして, それを

$$x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{とおくと} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

これを解くと $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$ となる. よつて $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{3}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \dfrac{-1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. □

演習問題 5.1

5.1.6 次の連立 1 次方程式を行列を用ゐて表せ. また連立 1 次方程式の係数行列, 拡大係数行列を記せ.

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ \;\; x_1 \;\; - x_2 = \;\; 2\,. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \;\; x_1 + 2x_2 \;\; - x_3 = \;\; 2 \\ -x_1 \qquad\quad + 3x_3 = \;\; 8 \\ \qquad\quad x_2 - 2x_3 = -4\,. \end{cases}$

5.1.7 次の行列の方程式と同等な連立 1 次方程式を記せ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5.1.8 次の列 vector $\boldsymbol{a}$ が列 vectors $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ の 1 次結合で表せるか否かを調べ, 表せるならば, その表示を具体的に記せ.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5.1.9 次の列 vector $\boldsymbol{a}$ が列 vectors $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ の 1 次結合できるために a, b の満たすべき条件を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. (2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

5.1.10 $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}$ は n 次の列 vectors とする. $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ の 1 次結合で, また, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ はそれぞれ $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合として表されるとする :

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{u}_1 + 4\boldsymbol{u}_2. \end{cases}$$

このとき $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ の 1 次結合として表せ.

5.1.11 n 次の列 vectors $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}$ について, $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ の 1 次結合で, また, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ のそれぞれは $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で表されるとき, $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で表されることを示せ. (問題 5.1.10 の一般化)

5.2 基本変形

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

を式の加減, 入れ替へ等を行ふことによつて解いてみる. ここで, ◯ のついた番号は, 一つ前の段階の式のいくつ目を使つたかを表してゐる.

$$\text{(I)} \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} 5y = 10 & \text{①} + \text{②} \times 3 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} y = 2 & \text{①} \times \frac{1}{5} \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \begin{cases} y = 2 \\ x - 2y = -1 & \text{②} \times (-1) \end{cases}$$

$$\text{(V)} \begin{cases} x - 2y = -1 & \text{②} \\ y = 2 & \text{①} \end{cases}$$

$$\text{(VI)} \begin{cases} x = 3 & \text{①} + \text{②} \times 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

上で行つた変形は次の 3 つである.

定義 5.2.1 上で行つた連立 1 次方程式の変形 :

(1) 1 つの方程式を何倍か ($\neq 0$ 倍) する ; (II) → (III), (III) → (IV)

(2) 2 つの式を入れ替へる ; (IV) → (V)

(3) 1 つの式に他の式の何倍かを加へる. (I) → (II), (V) → (VI)

これらをまとめて, 連立 1 次方程式の基本変形 といふ.

上の様に常に 2 つの方程式の組で進むより, 途中で未知数の 1 つが決まれば適当に代入した方が早いと思はれるかも知れない. しかし, 簡単な方程式の場合はそれでもよいが, 次の節で学ぶ様な方程式の数が多い場合だと, 求まつた値が全ての方程式を満たすことを確かめるのはかなり厄介である. 上の方法ならば逆に (IV) から (I) へ基本変形だけを用ゐて辿れるから (可逆的 といふ) , (I) 〜 (VI) の連立 1 次方程式は同等である. よつて $x = 1$, $y = 2$ が解であり, それ以外に解がないことは元の方程式に代入するまでもなく明らかなのである.

問 5.2.2 上の (I)→ (VI) の基本変形について, 基本変形を用ゐて (VI) → (I) と逆に辿れることを具体的に示せ.

掃き出し法 上の様に, 基本変形を行つて連立 1 次方程式を解く方法を 掃き出し法 といふ. 上にも述べた様に, 基本変形は可逆的であるから, 基本変形を行つて得られる連立 1 次方程式は全て同等で, それらの解の集合は全て等しい.

さて, 連立 1 次方程式の変形 (I) 〜 (VI) において拡大係数行列がどの様に変形されていくかを見てみる.

$$
\text{(I)} \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\text{(II)} \begin{cases} 5y = 10 & ① + ② \times 3 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\text{(III)} \begin{cases} y = 2 & ① \times \frac{1}{5} \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\text{(IV)} \begin{cases} y = 2 \\ x - 2y = -1 & ② \times (-1) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\text{(V)} \begin{cases} x - 2y = -1 & ② \\ y = 2 & ① \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]
$$

$$
\text{(VI)} \begin{cases} x \quad = 3 & ① + ② \times 2 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]
$$

この様に連立 1 次方程式の基本変形と次に述べる行列の（行）基本変形は対応してゐるら, 連立 1 次方程式を解くには, その拡大係数行列に行列の基本変形を行つて単純な形に変形し, その単純な行列を拡大係数行列とする連立 1 次方程式を解けばよい.

定義 5.2.3 (行列の（行）基本変形) 行列の次の 3 つの変形を（行）基本変形 といふ:
(1) 1 つの行を何倍か（$\neq 0$ 倍）する;
(2) 2 つの行を入れ替へる;
(3) 1 つの行**に**他の行の何倍かを加へる.

注意 5.2.4 （重要） 連立 1 次方程式を拡大係数行列の基本変形を用ゐて解く際は, 1 回には 1 つだけの変形を行ふことに注意されたい. しかし, 記述の際は長くなるので 誤解のない範囲 で, 一度に幾つかの基本変形を行つてしまつても構はない. しかし, それは飽くまでも上の 3 種の基本変形を 1 回 1 回繰り返して得られるものでなければならない.

以下で, 連立 1 次方程式を拡大係数行列の基本変形を用ゐて解いてみる.

例題 5.2.5 次の連立 1 次方程式を, 拡大係数行列の基本変形を用ゐて解け.

$$\begin{cases} 2x+3y-\ z=-3 \\ -x+2y+2z=1 \\ \ x+\ y-\ z=-2\,. \end{cases}$$

解 拡大係数行列とその基本変形を次の様に右脇に記しながら縦に書くとわかりやすい. ここで ①, ②, ③ はその 1 つ上の行列の第 1 行, 第 2 行, 第 3 行を表す.

$$\begin{array}{rrr:r l}
\hline
2 & 3 & -1 & -3 & \\
-1 & 2 & 2 & 1 & \\
1 & 1 & -1 & -2 & \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & ①+③\times(-2) \\
0 & 3 & 1 & -1 & ②+③ \\
1 & 1 & -1 & -2 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & -2 & ③ \\
0 & 3 & 1 & -1 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & ① \\
\hline
1 & 0 & -2 & -3 & ①+③\times(-1) \\
0 & 0 & -2 & -4 & ②+③\times(-3) \\
0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & -2 & -3 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & ②\times(-\frac{1}{2}) \\
0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & -2 & -3 & \\
0 & 1 & 1 & 1 & ③ \\
0 & 0 & 1 & 2 & ② \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & ①+③\times 2 \\
0 & 1 & 0 & -1 & ②+③\times(-1) \\
0 & 0 & 1 & 2 & \\
\hline
\end{array}$$

これを連立 1 次方程式に戻して

$$\begin{cases} x \qquad\quad = \ \ 1 \\ \quad\ y \quad = -1 \\ \qquad\ z = \ \ 2 \end{cases} \quad 即ち \quad \begin{cases} x = \ \ 1 \\ y = -1 \\ z = \ \ 2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

を得る. □

演 習 問 題 5.2

5.2.6 次の連立 1 次方程式を掃き出し法で解け.

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 = 2\,. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 8\,. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_3 = 8 \\ x_2 - 2x_3 = -4\,. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2\,. \end{cases}$

5.2.7 次の連立 1 次方程式を拡大係数行列の基本変形を用ゐて解け.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$

5.3 簡約行列

前節では解が 1 つだけである様な連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を扱つた. その場合の A は正方行列であり, 掃き出し法によつて単位行列に変形され, 拡大係数行列 $\left[A \,\vdots\, \boldsymbol{b} \right]$ は $\left[I \,\vdots\, \boldsymbol{b}' \right]$ の形に変形されたのであつた. では, 一般の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ においては, これの拡大係数行列 $\left[A \,\vdots\, \boldsymbol{b} \right]$ をどんな行列を目指して変形すればよいかについて述べる.

定義 5.3.1 与へられた行列の各行において, 最初 (最も左寄り) の 0 でない成分を 主成分 と呼ぶ. 行の成分がすべて 0 の場合は, その行には主成分は存在しない.

上に述べた, 変形を行ふ際に目指すべき行列は次の様なものである.

定義 5.3.2 次の性質 **R1** ∼ **R4** を満たす様な行列を, 簡約行列 と呼ぶ.

R1 行のうちに零 vector(s) があれば, それは零 vector でないどんな行よりも下にある.

R2 零 vector でない行の主成分は 1 である.

R3 第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる. 即ち各行の主成分は下の方ほど右にある.

R4 各行の主成分を含む列においては, 他の成分は全て 0 である. 即ち, 第 i 行の主成分が a_{ij_i} のとき, 第 j_i 列で (i, j_i) 成分以外は全て 0 である.

条件 **R3** は主成分が「なだらかな右下りの階段状」に並んでゐることを意味する. 零行列, 単位行列は簡約行列である.

例 5.3.3 簡約行列の例.

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0&1&-3&0&4 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1&0&1&2&0&-1 \\ 0&1&5&-3&0&1 \\ 0&0&0&0&1&3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&1&0&0&3&-1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&7&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0&1&3&4 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0&0&1&0&5&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}.$$

主成分の位置を灰色にした.

命題 5.3.4 どんな行列も（行）基本変形を繰り返し施して簡約行列に変形できる.

この命題は, 例で説明する方がわかり易い.
そこで, 以下では, 次の行列を簡約行列に変形してみる :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

まづ, 行の入れ替へによつて, 零 vector があればそれを最下行へ移動させる. 更に行 vectors のうちで主成分が最も左になるものの 1 つ（いまの場合は第 2 行か第 3 行）を第 1 行に移動させる.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ③ \\ \\ ① \end{array}$$

第 1 行を何倍かして（いまの場合は $\frac{1}{2}$ 倍）第 1 行の主成分を 1 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① \times \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

第 1 行の何倍かを他の行に加へて, 第 1 行の主成分を含む列（ここでは第 2 列）の他の成分を全て 0 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} ② + ① \times (-3)$$

第 2 行以下の vectors のうち主成分が最も左にあるもの（ここでは第 3 行）を第 2 行に移動し, 何倍かして主成分を 1 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ③ \\ ② \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} ② \times \frac{1}{2}$$

第 2 行の主成分を含む列（ここでは第 4 列）の他の成分を全て 0 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① + ② \times 3 \\ \\ \\ \end{array}$$

第 3 行以下の vectors のうち主成分が最も左にあるもの（ここでは第 3 行）を第 3 行に移動して, 何倍かして主成分を 1 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ ③ \times \frac{1}{2} \end{array}$$

第 3 行の何倍かを他の行に加へることで, 第 3 行の主成分を含む列（ここでは第 5 列）の他の成分を全て 0 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① + ③ \times (-\frac{5}{2}) \\ ② + ③ \times (-\frac{3}{2}) \\ \\ \end{array}$$

これは簡約行列である. 一般には, この段階で簡約行列になつてゐなければ, 以上と同様の操作を行ふ. 結局, 有限回の操作で簡約行列に到達する.

定義 5.3.5 （行列の簡約化）与へられた行列 A に基本変形を繰り返すことにより, それをひとつの簡約行列 B を得ることを行列 A の簡約化と呼び, 簡約行列 B を A の簡約化ともいふ.

上の変形を一般化して次の定理の前半を得る

定理 5.3.6 任意の行列は, 基本変形を繰り返すことにより簡約化できる. また, 与へられた行列の簡約化は唯一通りに定まる.

この 5.3.6 の後半は, 6.4.8 で示される.

定義 5.3.7 （行列の階数）行列 A の簡約化を B とする. このとき,

$$\operatorname{rank}(A) = \text{“}B \text{ の零 vector でない行の個数”}$$

と定め, これを A の階数といふ. 簡約な行列の零 vector でない各行の主成分は異なる列に属するから,

$$\operatorname{rank}(A) = \text{“}B \text{ の主成分を含む列の個数”}$$

でもある. さらにそれは主成分の個数に他ならないから

$$\operatorname{rank}(A) = \text{“}B \text{ の主成分の個数”}$$

となる.

従つて

定理 5.3.8 A が $m \times n$ 行列ならば

$$\operatorname{rank}(A) \leqq m, \quad \operatorname{rank}(A) \leqq n.$$

演 習 問 題　5.3

5.3.9　次の各行列が簡約か否か判定せよ．また, 簡約でないものは簡約化せよ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　(7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.3.10　2 次正方行列のうち, 簡約なものは次のもので尽きることを示せ．但し $*$ は任意の数を表す．（Hint : 階数で分類せよ．）

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.11　3 次の正方行列のうち, 簡約なものを全て求めよ．但し, 5.3.10 の様に, 任意の数でかまはない成分には $*$ を用ゐよ．

5.3.12　次の行列を簡約化せよ．また, 各々の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$　(7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

5.4 連立 1 次方程式を解く

行列の簡約化を用ゐて連立 1 次方程式を解かう. 未知数が n 個の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (A \text{ は } m \times n \text{ 行列})$$

を考へる. この係数行列は A であり, 拡大係数行列は $[\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]$ である. $[\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]$ の列の個数は "A の列の個数" $+1$ である. A の簡約化を B と書けば $[\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]$ の簡約化は, その手順からして, $[\,B \,\vdots\, \boldsymbol{b}'\,]$ の形になる. 一方, 行列の階数はその行列の簡約化の列の個数であるから,

$$\operatorname{rank}\left([\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]\right) = \operatorname{rank}(A) \quad \text{または} \quad \operatorname{rank}(A) + 1$$

である. 最初に $\operatorname{rank}\left([\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]\right) = \operatorname{rank}(A) + 1$ となる場合を考へる. このとき, 拡大係数行列の簡約化は下記の様になる.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & * & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

この行列の色づけされた行 $[\;0\;\;0\;\;0\;\;\cdots\;\;0 \,\vdots\, 1\;]$ に対応する方程式は

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = 1$$

である. この方程式の左辺は $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ にどの様な値を代入しても 0 であるから, この方程式を満たす様な $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は存在しない. よつて連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない.

次に $\operatorname{rank}\left([\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]\right) = \operatorname{rank}(A)$ であるとする. このときには, 拡大係数行列の各行の主成分を含まない列に対応する変数の値を任意に定めると, 主成分を含む列に対応する変数は, 一意的に決まる (5.4.4 参照). よつて次の定理を得る.

定理 5.4.1 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つためには

$$\operatorname{rank}\left([\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]\right) = \operatorname{rank}(A)$$

であることが必要十分である.

例題 5.4.2 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

解 拡大係数行列を簡約化する.

$$\begin{array}{rrrrr:r l}
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & \\
-1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & \\
2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 3 & \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & ③ + ① \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & ④ + ① \times (-2) \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & ④ + ② \times (-1) \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -3 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ④ \times \frac{1}{2} \\
\hline
1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & ① + ④ \times (-2) \\
0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & ② + ④ \times 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & ③ + ④ \times (-4) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

従つて, 係数行列の階数は 3, 拡大係数行列の階数 4 である. つまり, 与へられた連立 1 次方程式は解を持たない. □

注意 5.4.3 最後まで簡約化しないで, その 1 つ上の行列まで変形すれば, その第 4 行を見ることにより連立 1 次方程式が解を持たないことはわかる.

例題 5.4.4 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

解 拡大係数行列を簡約化する.

$$\begin{array}{ccccc:c l}
\hline
1 & -2 & 0 & -3 & 0 & -2 & \\
1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 2 & \\
2 & -4 & 1 & -4 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & -2 & 0 & -3 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & ② + ① \times (-1) \\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 7 & ③ + ① \times (-2) \\
\hline
1 & -2 & 0 & -3 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & ③ + ② \times (-1) \\
\hline
1 & -2 & 0 & -3 & 0 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & ② + ③ \times (-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{rrrl} x_1 - 2x_2 & -3x_4 & & = -2 \\ & x_3 + 2x_4 & & = 1 \\ & & x_5 & = 3 \end{array} \right. \quad \text{ゆゑに} \quad \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & -2 + 2x_2 + 3x_4 \\ x_3 = & 1 \qquad\quad - 2x_4 \\ x_5 = & 3 \end{array} \right.$$

を得る.

この式について次の 2 つの事はとても重要である.

> (1) 右辺にある未知数は, 独立に任意の値を取ることができる.
> (2) 左辺の未知数は, 右辺の未知数の値から上の式を通して完全に決定される.
> これは, 独立な x_2, x_4 は右辺のみに存在することと, それらに従属する x_1, x_3, x_5 が, 左辺にのみ, しかも一度だけしか登場しないからである.

これらのことは, 行列が簡約化されてゐるからこそ導かれる結果であることを十分理解して欲しい.

以上のことを踏まへると, この解は, $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおいて,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ 1 \qquad - 2c_2 \\ c_2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

と記すと見易い. □

さて, 与へられた連立 1 次方程式に解が存在し, かつ, それが唯一つしか存在しないのは, 上の 5.4.4 からわかる様に, 任意定数が現れないとき, 即ち係数行列の簡約化の全ての列に主成分が存在するときであり, そのときに限る. 言ひ替へると係数行列の階数と未知数の個数が一致するときである. 5.4.1 と併せて次の定理を得る.

定理 5.4.5 n 個の未知数に対する連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に解が唯一つ存在するためには, 次式が成り立つことが必要十分である :

$$\mathrm{rank}\,(A) = \mathrm{rank}\,\big(\left[\begin{array}{c:c} A & \boldsymbol{b} \end{array}\right]\big) = n.$$

斉次形の連立 1 次方程式 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である場合, 即ち

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

なる形の連立 1 次方程式を 斉次形(さいじ)（または 斉次形(せいじ), 同次形）の連立 1 次方程式といふ. 斉次形の連立 1 次方程式は必ず $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解に持つ. これを 自明な解 といふ.

定理 5.4.6 A は $m \times n$ 行列とする.
(1) 斉次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解が自明なものに限るためには

$$\mathrm{rank}\,(A) = n$$

であることが必要十分である.
(2) $m < n$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解を持つ.

証明 (1) は 5.4.5 の特別な場合である.
(2) 行列の階数は行の個数以下だから $m < n$ ならば $\mathrm{rank}\,(A) \leqq m < n$ となる. よって (1) より $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は自明でない解を持つ. □

斉次形の連立 1 次方程式を解く 斉次形の連立 1 次方程式を 1 つ解いておく. 際次形の方程式の場合には $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であるから, 拡大係数行列を考へる必要はなく, 係数行列の簡約化を考へればよい.

例題 5.4.7 次の連立 1 次方程式を解け :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解 係数行列を簡約化して, 5.4.4 と同様にして

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

を得る. □

（下の様に右辺の vector $\boldsymbol{0}$ に
相当する部分を省いてよい）

1	−2	0	3	
1	−1	1	2	
1	−2	0	3	
0	1	1	−1	② + ① × (−1)
1	0	2	1	① + ② × 2
0	1	1	−1	

以上の様に, 連立 1 次方程式は拡大係数行列を, 行に関する基本変形を繰り返して簡約行列に変形 (簡約化) することにより, 機械的に解くことができる. 念のためにもう 1 つ例題を入れておく.

例題 5.4.8 行列 A と vector $\boldsymbol{b}$ が次で与へられてゐる：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を, 拡大係数行列 $[\,A\,|\,\boldsymbol{b}\,]$ を簡約化し, 解を求めよ.

解 拡大係数行列を簡約化する.

1	1	1	-2	-1	8	
1	2	3	-4	-4	13	
3	0	-3	1	7	5	
0	-1	-2	-1	0	7	
1	1	1	-2	-1	8	
0	1	2	-2	-3	5	② − ①
0	-3	-6	7	10	-19	③ − ① × 3
0	-1	-2	-1	0	7	
1	1	1	-2	-1	8	
0	1	2	-2	-3	5	
0	0	0	1	1	-4	③ + ② × 3
0	0	0	-3	-3	12	④ + ②
1	0	-1	0	2	3	① − ②
0	1	2	-2	-3	5	
0	0	0	1	1	-4	
0	0	0	0	0	0	④ + ③ × 3
1	0	-1	0	2	3	
0	1	2	0	-1	-3	② + ③ × 2
0	0	0	1	1	-4	
0	0	0	0	0	0	

これで簡約化が完了した. これを方程式に書き直すと

$$\begin{cases} x_1 \qquad\; - x_3 \qquad\quad + 2x_5 = 3 \\ \quad x_2 + 2x_3 \qquad\quad - x_5 = -3 \\ \qquad\qquad\qquad + x_4 + x_5 = -4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_5 + 3 \\ x_2 = -2x_3 + x_5 - 3 \\ x_4 = -x_5 - 4 \end{cases}$$

この様に, 独立な変数 x_3, x_5 と従属する変数 x_1, x_2, x_4 が, 右辺と左辺に完全に分離され, 左辺に現れる変数は, 唯一度だけ現れてゐることが簡約化の重要な点である.

独立な変数を, $x_3 = c_1$, $x_5 = c_2$ と書き直して, 解は結局

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

と書ける. ここで, 成分の属する集合を $\mathbb{R}$ と解釈して解答を述べたが, これを例へば複素数体としても, 全く同じ結果となることに注意されたい.

演 習 問 題 5.4

5.4.9 次の連立 1 次方程式を 5.4.8 の方法に忠実に従つて解け．（一部は [M1] より）

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$. (4) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 2 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(5) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & -3 & 6 \\ -2 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 5 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

(6) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (7) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 15 \\ -2 & -8 & -3 & 2 & -21 \\ 3 & 12 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$.

(9) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -11 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 8 & -2 & -3 \\ -6 & -3 & -24 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 \\ 21 \\ -66 \end{bmatrix}$.

(10) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(11) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -7 & 9 & 4 \\ -9 & 6 & 33 & -48 & -17 \\ -1 & 1 & 4 & -7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 67 \\ 8 \end{bmatrix}$.

5.4.10 次の連立 1 次方程式が解を持つための a, b の条件を求めよ．（一部は [M1] より）

(1) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$.　(2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ a & 2a+1 & -2a & -a-1 \\ a-1 & a+1 & a^2-4a+1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

5.4.11 5.4.9 (1), (2) について基本変形を用ゐて, 解を表す式から元の連立方程式を復元できることを具体的に示せ.

5.4.12 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \cdots\cdots \quad (*)$$

の 1 つの解を $\boldsymbol{x}_0$ とする．斉次形の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots \quad (**)$$

の任意の解 $\boldsymbol{x}_1$ に対し, $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ は $(*)$ の解であることを示せ．また $(*)$ の解は全て $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ の形に書けることを示せ．　（[M1] より）

5.5 簡約化による逆行列の求め方

正方行列 A の逆行列を求めたい. 始めに, 正方行列が正則であるための必要十分条件を述べておく.

定理 5.5.1 A が n 次の正方行列のとき, 次の (1) 〜 (5) は同値である.
(1) $\mathrm{rank}\,(A) = n$.
(2) A の簡約化は I_n である.
(3) 任意の n 次の列 vector $\boldsymbol{b}$ に対し, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解を持つ.
(4) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る.
(5) A は正則行列である.

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2). A が n 次正方行列で $\mathrm{rank}\,(A) = n$ であるから, A の簡約化の全ての行と列は零 vector ではない. よつて A の簡約化は I_n である. (2) $\Longrightarrow$ (3). $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[\, A \mid \boldsymbol{b}\,]$ の簡約化は $[\, A \mid \boldsymbol{b}\,] \to [\, I_n \mid \boldsymbol{b}'\,]$ となるから $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, また解はただ 1 つである. (3) $\Longrightarrow$ (4). (3) の特別な場合 ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合) が (4) である. (4) $\Longrightarrow$ (1). 5.4.6 の主張に他ならない. 以上により (1) 〜 (4) が同値であることが示された.
(3) $\Longrightarrow$ (5) n 次の列 vectors $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと, 仮定により $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$ は解をもつ. その解を順に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_2, \cdots, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_n$ とし,

$$C = [\, \boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{c}_n \,]$$

とおくと, C は n 次正方行列で

$$AC = A[\boldsymbol{c}_1 \ \ \boldsymbol{c}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{c}_n] = [\, A\boldsymbol{c}_1 \ \ A\boldsymbol{c}_2 \ \ \cdots \ \ A\boldsymbol{c}_n \,] = [\, \boldsymbol{e}_1 \ \ \boldsymbol{e}_2 \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{e}_n \,] = I_n$$

となる. 定理 3.5.12 により, C は A の逆行列であり, A は正則行列である.
(5) $\Longrightarrow$ (4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば, この両辺に左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0}.$$

$A^{-1}A\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ (唯一の解). よつて (4) が成り立つ. 以上により (5) と (1) 〜 (4) の同値性も示され, 証明が完了した. □

正方行列が与へられたとき, それが正則であるかどうかを判定して, 正則な場合にその逆行列を計算する方法は, すでに §3.5 で学んでゐる. しかし, 5.5.1 の (3) $\Longrightarrow$ (5) により, これらのことを別の方法で行ふことができる. 以下でそれを説明するが, 結局我々は, 正方行列について, それが正則か否かの判定法, 及び, 正則な場合に逆行列を求める方法を 2 種類得たことになる.

逆行列の計算　逆行列を計算するには 5.5.1 の (3) $\Longrightarrow$ (5) の証明で示した様に, n 個の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$$

の解を順に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_n$ とすると

$$A^{-1} = [\,\boldsymbol{c}_1 \;\; \boldsymbol{c}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{c}_n\,]$$

である. このとき

$$[\,A \mid \boldsymbol{e}_i\,] \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

の簡約化をまとめて行へばよい. 即ち $[\,A \mid \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n\,]$ の簡約化をすれば $[\,I_n \mid \boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n\,]$ となるのである. つまり $n \times 2n$ 行列 $[\,A \mid I\,]$ を簡約化すると

$$[\,A \mid I\,] \to [\,I \mid A^{-1}\,]$$

となつて, 簡約化の右半分に A の逆行列 A^{-1} が現れるのである.

例題 5.5.2　次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

解　3×6 行列 $[\,A \mid I\,]$ を簡約化する.

$$\begin{array}{rrr:rrrl}
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & \quad ② + ① \times (-2) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \quad ③ + ① \times (-1) \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & \quad ① + ③ \times (-1) \\
0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 & \quad ② + ③ \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & \quad ② \times (-1) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & \quad ① + ② \times (-2) \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

よつて A は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. □

注意 5.5.3　正方行列 A に対して $[\,A \mid I\,]$ を簡約化したとき, 簡約化が $[\,I \mid *\,]$ の形にならなければ A は正則行列ではないので, 逆行列は存在しない.

注意 5.5.4 先の 5.5.1 の (3)⇒(5) の証明では 3.5.12 を利用して $AC=I$ から C が A の逆行列であると結論したが, これより遥かに軽い証明を述べる. 5.5.1 において, (3) を仮定すれば $[\,A \mid I\,]$ を簡約化して $[\,I \mid C\,]$ になる. ここで, $[\,C \mid I\,]$ に対して（C の位置に注意せよ）, その簡約化の手順を逆に行へば, 明らかに $[\,I \mid A\,]$ になる. ここで再び先の (3)⇒(5) の前半の推論から $CA=I$ がわかる. この証明には行列式が不要であることに注意されたい.

演 習 問 題 5.5

5.5.5 次の行列の逆行列を簡約化により求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. (6) $\begin{bmatrix} 1 & a & d & f \\ 0 & 1 & b & e \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5.5.6 $a \neq 0$ のとき, 次の行列の逆行列を簡約化により求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a+1 \\ 2 & 3 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

5.5.7 正則行列 A に対し, 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けることで, 解 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ を得る. 次の次の連立 1 次方程式を係数行列の逆行列を求めて解け.

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

5.5.8 次の連立方程式が自明でない解を持つ様な a の値を,
① 係数行列を簡約化する方法, および
② 係数行列の行列式を計算する方法（3.5.9 を参照せよ）
で求め, それらが一致することを確認せよ.

(1) $\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & a-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} a & 3 \\ -3 & a-7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(3) $\begin{bmatrix} a & -3 & 5 \\ 2a & a-3 & 12 \\ -a & a+6 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (4) $\begin{bmatrix} 2a-1 & a-3 & 4 \\ 3 & 3 & a-2 \\ 5a-1 & 3a-5 & 4a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(5) $\begin{bmatrix} a & 0 & 4 \\ 2a & a^2-5a & 8 \\ a & 2a^2-10a & a-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

☆ §5.5 を学んだことで逆行列について理解が深まつた筈であるから, ここで, §3.5 の演習問題をもう一度見直しておくとよい.

5.6 Cramer の公式

係数行列が正則行列である様な連立 1 次方程式は, 以下に述べる Cramer(クラメル)[14] の公式を用ゐて解くこともできる. Cramer の公式は理論的には重要であるが, 実際に連立 1 次方程式の解を求めるのには掃き出し法の方が早く計算できる.

定理 5.6.1 (Cramer の公式) A が n 次の正則行列であるとき, 連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解は次の様に与へられる. 即ち $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とおくと,

$$x_i = \frac{\det([\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{b}}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n])}{\det(A)}.$$

ここで右辺の分子は A の第 i 列を列 vector $\boldsymbol{b}$ で置き換へた行列の行列式である.

証明 A は正則だから定理 5.5.1 により, 解が唯一つ存在する. その解を $\boldsymbol{x}$ とし, A の列 vectors を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ とすると,

$$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

と書き表される. ここで 3.3.3(1), (2) を繰り返し使つて

$$\begin{aligned}
&|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{b}}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n| = |\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n| \\
&= x_1\,|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{a}_1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n| + \cdots + x_i\,|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{a}_i}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n| + \cdots + x_n\,|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{a}_n}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n| \\
&= x_i\,|\boldsymbol{a}_1\ \cdots\ \overset{i}{\boldsymbol{a}_i}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n| = x_i\,|A|
\end{aligned}$$

を得る. この両辺を $|A|\,(\neq 0)$ で割つて定理の等式を得る. □

例題 5.6.2 次の連立 1 次方程式を Cramer の公式を用ゐて解け.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

解 5.6.1 の通りに計算すると

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7}. \qquad \therefore\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdots\cdots \text{Ans.}$$

を得る. □

演 習 問 題 5.6

5.6.3 次の連立 1 次方程式を Cramer の公式を用ゐて解け.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

[14] Gabriel Cramer (1704-1752) France 生.

5.7 （補足）行基本変形を行列の積で表す方法

ある行を c 倍する　行列 A ($m \times n$ 型) の第 k 行を c 倍して得られる行列は, 単位行列 I_m の第 k 行を c 倍して得られる行列

$$P_k(c) = \left[\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & c & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

を A の左から掛けたものに等しい (読者はこれを実際に確かめよ).

ある 2 つの行を入れ替へる　行列 A ($m \times n$ 型) の第 k 行と ℓ 行を入れ替へて得られる行列は, 単位行列 I_m の第 k 行と第 ℓ 行を 入れ替へて得られる行列

$$P_{k\ell} = \left[\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & 0 & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

を A の左から掛けたものに等しい (読者はこれを実際に確かめよ).

ある行に別の行の定数倍を加へる　行列 A ($m \times n$ 型) の第 k 行の c 倍を ℓ 行に加へて得られる行列は, 単位行列 I_m の第 k 行の c 倍を第 ℓ 行に加へて得られる行列

$$P_{k\ell}(c) = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & \\
 & & \vdots & & \ddots & & & & \\
 & & 0 & & & 1 & & & \\
 & & c & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \end{array}$$

を A の左から掛けたものに等しい (読者はこれを実際に確かめよ). ただし, 上記は $k < \ell$ の場合を例示したものである.

定義 5.7.1 前 page の $P_k(c)$, $P_{k\ell}$, $P_{k\ell}(c)$ を 基本行列 と称する.

A として $[\,A \,\vdots\, I\,]$ を考へれば, これに 基本変形 (1), (2), (3) のいづれかを施した結果は, 対応する $P_k(c)$, $P_{k\ell}$, $P_{k\ell}(c)$ を左から掛けたものになるから,

$$[\,Q_1 A \,\vdots\, Q_1\,]$$

を得る. さらに Q_2 に対応する行基本変形をしたならば

$$[\,Q_2 Q_1 A \,\vdots\, Q_2 Q_1\,]$$

が得られる.

同様に $Q_2, \cdots, Q_n$ に対応する行基本変形をこの順で施せば

$$[\,Q_n \cdots Q_1 A \,\vdots\, Q_n \cdots Q_1\,]$$

が得られる.

例 5.7.2　5.5.2 で計算した行列 $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$ について A^{-1} を基本行列の積で表せ.

解　3×6 行列 $[\,A \mid I\,]$ を簡約化する.

1	2	1	1	0	0	
2	3	1	0	1	0	
1	2	2	0	0	1	
1	2	1	1	0	0	
0	−1	−1	−2	1	0	②＋①×(−2)
0	0	1	−1	0	1	③＋①×(−1)
1	2	0	2	0	−1	①＋③×(−1)
0	−1	0	−3	1	1	②＋③
0	0	1	−1	0	1	
1	2	0	2	0	−1	
0	1	0	3	−1	−1	②×(−1)
0	0	1	−1	0	1	
1	0	0	−4	2	1	①＋②×(−2)
0	1	0	3	−1	−1	
0	0	1	−1	0	1	

A	I
$P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)\,A$	$P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)$
$P_{32}(1)\,P_{31}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)\,A$	$P_{32}(1)\,P_{31}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)$
$P_2(-1)\,P_{32}(1)\,P_{31}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)\,A$	$P_2(-1)\,P_{32}(1)\,P_{31}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)$
$P_{21}(-2)\,P_2(-1)\,P_{32}(1)\,P_{31}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)\,A$	$P_{21}(-2)\,P_2(-1)\,P_{32}(1)\,P_{31}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)$

よつて A は正則行列で, 逆行列は

$$\begin{aligned}A^{-1}&=P_{21}(-2)\,P_2(-1)\,P_{32}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{13}(-1)\,P_{12}(-2)\\&=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&2&1\\3&-1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる. □

第 6 章　Vector 空間

6.1　体

これまででは, vector や行列の成分はすべて実数, または複素数である場合に限定してきた. しかし, 本来の線形代数学はより広い守備範囲を持つてゐて, 成分を一般に体と呼ばれるものとして, ほぼ同様な理論が展開できる. ここでは, 体について学ぶ.

定義 6.1.1　集合 $\mathbf{K}$ において

F0　加法と呼ばれる演算 $\mathbf{K}\times\mathbf{K}\longrightarrow\mathbf{K}$, $(a,b)\mapsto a+b$, および, 乗法と呼ばれる演算 $\mathbf{K}\times\mathbf{K}\longrightarrow\mathbf{K}$, $(a,b)\mapsto ab$ が定められてゐて,

次の性質 **F1**〜**F9** が全て満たされるとき, 集合 $\mathbf{K}$ は体であるいはれる :

（但し, 下記において $a, b, c\in\mathbf{K}$ は任意の元を表す）

F1　（加法に関する結合律）　$(a+b)+c=a+(b+c)$.

F2　（加法に関する交換律）　$a+b=b+a$.

F3　加法に関する単位元と呼ばれる $0\in\mathbf{K}$ が存在して, $a+0=0+a=a$.

F4　各 a に対して加法に関する逆元と呼ばれる $-a$ が存在して, $a+(-a)=0$.

F5　（乗法に関する結合律）　$(ab)c=a(bc)$.

F6　（乗法に関する交換律）　$ab=ba$.

F7　乗法に関する単位元と呼ばれる (0 と異なる[15]) $1\in\mathbf{K}$ が存在して, $a1=1a=a$.

F8　各 $a\neq 0$ に対し, 乗法に関する逆元と呼ばれる a^{-1} が存在し $aa^{-1}=a^{-1}a=1$.

F9　（分配律）　$(a+b)c=ac+bc$.

例 6.1.2　体の例を挙げる.

(1) 有理数体 $\mathbb{Q}$,　実数体 $\mathbb{R}$,　複素数体 $\mathbb{C}$.

(2) Gauss 数体　$\mathbb{Q}(\boldsymbol{i})=\{x+y\boldsymbol{i}\,|\,x, y\in\mathbb{Q}\}$.

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{x+y\sqrt{2}\,|\,x, y\in\mathbb{Q}\}$.

(4) p を素数として, p 元体　$\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ （「代数学 1」).

(5) p を素数, n を自然数とするとき p^n 元体　$\mathbb{F}_{p^n}$ （「代数学 5」で学ぶ).

(6) 不定元 x の $\mathbb{Q}$ 係数の有理式の全体　$\mathbb{Q}(x)$ （$\mathbb{Q}$ 上の 1 変数有理函数体と呼ばれる).

定義 6.1.3　一般に体 $\mathbf{K}$ を成分に持つ行列は $\mathbf{K}$ が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の場合と同様に定義できる. 成分がすべて $\mathbf{K}$ に含まれる $m\times n$ 型行列の全体を $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ と記す. また, $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})=\mathrm{Mat}(n,n,\mathbf{K})$（$n$ 次正方行列の全体）などと表す.

注意 6.1.4　(1) 成分が体 $\mathbf{K}$ に属する行列の $\mathbf{K}$ の元による scalar 倍や, 成分が体 $\mathbf{K}$ に属する 2 つの行列の演算 (和, 差, 積) は再び, 成分が体 $\mathbf{K}$ に属する行列となる.

(2) $A\in\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ のとき, $|A|\in\mathbf{K}$ であり, A が正則なら $A^{-1}\in\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ である.

(3) 第 5 章以前で述べた, 行列に関するほとんどの事柄は, そのまま一般の体 $\mathbf{K}$ に成分を持つ行列についても成り立つ. 読者はこれらのことを適宜確認されたい.

---

[15] $0=1$ を許す流儀もあり, その様な体 $\{0\}$ ($1=0$) を 1 元体と称する.

6.2 Vector 空間と部分空間

まづ vector 空間の定義から始める．

定義 6.2.1 体 $\mathbf{K}$ と集合 V に対し，
V0 和と呼ばれる写像 $V \times V \to V,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ および
scalar 倍と呼ばれる写像 $\mathbf{K} \times V \to V,\ (a, \boldsymbol{x}) \mapsto a\boldsymbol{x}$ が与へられて，
これらの演算について以下の **V1**〜**V8** のすべてが成り立つとき V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間（あるいは $\mathbf{K}$ 上の線形空間，$\mathbf{K}$ 線形空間，$\mathbf{K}$ vector 空間など）といふ．Vector 空間の元を vector と呼ぶ．
以下 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ は任意の元を表す．
V1 (結合律) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
V2 (交換律) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
V3 零 vector と呼ばれる元 $\mathbf{0}$ が存在して $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.
V4 各 $\boldsymbol{x}$ に対して，逆 vector と呼ばれる $-\boldsymbol{x}$ が存在して，$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
V5 $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x}$.
V6 $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$.
V7 $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$.
V8 $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

問 6.2.2 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V において $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ が成り立つことを示せ．

注意 6.2.3 V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ．
(1) 零 vector $\mathbf{0}$ は唯 1 つだけ存在する．なぜなら，別に $\mathbf{0}'$ が存在すれば，**V3** により $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$, $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ がともに成り立つ．これと **V2** により $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ である．
(2) $\boldsymbol{x}$ に対し，**V4** にいふ $-\boldsymbol{x}$ は唯 1 つだけ存在する．実際，もう 1 つあつたとして，それを $\boldsymbol{x}'$ とすると $-\boldsymbol{x} = \mathbf{0} + (-\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}'$ となるからである．

例 6.2.4 （Vector 空間の例）ここでは，vector 空間の例を挙げる．Vector 空間は至るところに現れる．読者には，以下の例について，**V0** から **V8** が成り立つことを確かめて欲しい．
(1) $\mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$ は $\mathbf{K}$ 上の 数 vector 空間と呼ばれる $\mathbf{K}$ 上の vector 空間.
(2) 通常の包含関係 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ の下で，$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ 上の vector 空間である．
(3) $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{至る所で微分可能} \}$ は $\mathbb{R}$ 上の vector 空間である．
(4) すべての係数が体 $\mathbf{K}$ に属する様な n 次以下の x の多項式全体を $\mathbf{K}[x]_n$ と記す．これは普通の和と scalar 倍に関して $\mathbf{K}$ 上の vector 空間である．
(5) 体 $\mathbb{Q}(\boldsymbol{i}) = \{ a + b\boldsymbol{i} \mid a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q} \}$ は $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間である．
(6) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q} \}$ は $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間である．
(7) 5 元体 $\mathbb{F}_5$ 上の多項式 $x^3 + 2x + 1$ は既約である．これの根 α の $\mathbb{F}_5$ 上の有理式の全体 $\mathbb{F}_5(\alpha)$ は $\mathbb{F}_5$ 上の vector 空間である．

定義 6.2.5 体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の部分集合 W が
S1 $\mathbf{0} \in W$,
S2 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in W$,
S3 $c \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{u} \in W$ ならば $c\boldsymbol{u} \in W$
の 3 つを全て満たすとき, W は V の部分空間であるといはれる.

問 6.2.6 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V とその部分空間 W について, 次の問に答へよ.
(1) W 自身も $\mathbf{K}$ 上の vector 空間であることを示せ. (つまり, V の部分集合 W が, V における和と scalar 倍に関して, それ自身で vector 空間になることが W が V の部分空間であることに他ならないのである.)
(2) W_1 を W の部分空間の 1 つとする. W_1 も V の部分空間であることを示せ.

例題 6.2.7 $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ のとき, 次の W は $\mathbf{K}^m$ の部分空間であることを示せ:
$$W = \{\, A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n \,\}.$$

解 $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ と書けば
$$W = \{\, x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \,|\, x_1,\ \cdots,\ x_n \in \mathbf{K} \,\}.$$
ここで $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{a}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_n \in W$ ゆゑ, **S1** が成り立つ. また $c \in \mathbf{K}$ および
$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \in W, \quad \boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{a}_n \in W$$
について
$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= (x_1+y_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_n+y_n)\boldsymbol{a}_n \in W, \\ c\boldsymbol{u} &= (cx_1)\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (cx_n)\boldsymbol{a}_n \in W \end{aligned}$$
ゆゑ **S2**, **S3** も成り立つ. よつて W は $\mathbf{K}^m$ の部分空間である. □

例題 6.2.8 $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ のとき, 次の W は $\mathbf{K}^n$ の部分空間であることを示せ:
$$W = \{\, \boldsymbol{x} \,|\, A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}.$$

解 6.2.5 の 3 つの条件を確認すればよい.
(**S1** について) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} \in W$ である.
(**S2** について) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とすると $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0},\ A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. よつて
$$A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
となり, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$ である.
(**S3** について) $\boldsymbol{x} \in W$, $c \in \mathbf{K}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であるから
$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$
となり, $c\boldsymbol{x} \in W$ である. □

例題 6.2.9 次の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるか否か調べよ.

(1) $W=\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} 3x_1+2x_2-\ x_3=0 \\ x_1-4x_2+5x_3=0 \end{array} \right\}$. (2) $W=\left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{r} 3x_1+2x_2-\ x_3 \leqq 2 \\ x_1-4x_2+5x_3 \geqq 1 \end{array} \right\}$.

解 (1) $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ とおけば $W=\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ と書けるから, 6.2.8 により, 部分空間である. あるいは, 直接に 6.2.5 の 3 条件を確認してもよい.

(2) 零 vector $\mathbf{0}$ の成分について, $1\cdot 0-4\cdot 0+5\cdot 0=0<1$ なので, 第 2 の不等式が満たされず, $\mathbf{0} \notin W$. つまり **S1** は成り立たない.

あるいは, $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ について $\left\{ \begin{array}{r} 3\cdot 0+2\cdot 0-1\cdot 1 \leqq 2 \\ 0-4\cdot 0+5\cdot 1 \geqq 1 \end{array} \right.$ ゆゑ, $\boldsymbol{v} \in W$ であるが,

$(-3)\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$について $\left\{ \begin{array}{r} 3\cdot 0+2\cdot 0-1\cdot(-3)>2 \\ 0-4\cdot 0+5\cdot(-1)<1 \end{array} \right.$ ゆゑ, $(-3)\boldsymbol{v} \notin W$. つまり **S3** は不成立.

よつて, いづれにせよ部分空間ではない. ちなみに, **S2** も成立しないから, それを示してもよい. □

例題 6.2.10 次の W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間になるか否かを調べよ.

(1) $W=\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1)=0,\ f(2)=0\}$.

(2) $W=\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) \geqq 2\}$.

(3) $W=\{f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(1)+3f(x)=o(x)\}$.

解 (1) 6.2.5 の条件 **S1**, **S2**, **S3** の成否を調べる.

S1 について. 多項式 $o(x)=0+0x+0x^2+0x^3$ は $o(1)=0$, $o(2)=0$ を満たす. ゆゑに $o(x) \in W$ である.

S2 について. $f_1(x),\ f_2(x) \in W$ とする. 即ち $f_1(1)=f_1(2)=0,\ f_2(1)=f_2(2)=0$. このとき $(f_1+f_2)(1)=f_1(1)+f_2(1)=0+0=0$, $(f_1+f_2)(2)=f_1(2)+f_2(2)=0+0=0$ だから, $(f_1+f_2)(x) \in W$ である.

S3 について. $c \in \mathbb{R}$ を定数とし, $f(x) \in W$ とする. 即ち $f(1)=f(2)=0$. このとき $(cf)(1)=c\cdot f(1)=c0=0$. よつて $(cf)(x) \in W$ である.

以上, W は **S1**, **S2**, **S3** を満たすことがわかつた. よつて $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

(2) Vector 空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の零 vector は多項式 $o(x)=0+0x+0x^2+0x^3$ であるが, $o(0)=0<2$ なので $o(x) \notin W$. つまり W は **S1** を満たさない. あるいは, $f(x)=x+2$ は $f(0)=2 \geqq 2$ ゆゑ W に属すが, $\frac{1}{2}f(0)=1<2$ ゆゑ $\frac{1}{2}f(x) \notin W$. よつて **S3** を満さない, など. いづれにせよ, 部分空間でない.

(3) W は部分空間である. (説明は (1) と同様なので省略する.) □

> **定義 6.2.11** V が体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間で, W_i $(1 \leqq i \leqq r)$ が V の部分空間のとき, 集合 $\{\boldsymbol{w}_1+\cdots+\boldsymbol{w}_r \mid \boldsymbol{w}_i \in W_i\ (1 \leqq i \leqq r)\}$ は部分空間である (確認せよ). これを $W_1, \cdots, W_r$ の <u>和</u> と呼び $W_1+\cdots+W_r$ または $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} W_i$ で表す.

問 6.2.12 上の 6.2.11 で述べた $W_1+\cdots+W_r$ が V の部分空間であることを示せ.

演 習 問 題 **6.2**

6.2.13 任意に固定された自然数 m, n と, 体 $\mathbf{K}$ について, $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ は通常の和と scalar 倍に関して vector 空間であることを確かめよ.

6.2.14 次の W は $\mathbb{R}$ 上の vector 空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間になるか否かを調べよ.
ならない場合はその理由をできる限り具体的な例を挙げるなどして述べよ.

(1) $W=\left\{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2\right\}$. (2) $W=\left\{c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}$.

(3) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 4x_1-x_2-3x_3=0 \\ x_1+3x_2-5x_3=0 \end{array}\right\}$. (4) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 4x_1-x_2-3x_3\leqq 0 \\ x_1+3x_2-5x_3\leqq 1 \end{array}\right\}$.

(5) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 2x_1-x_2=2x_3 \\ x_1+2x_2=5x_3 \end{array}\right\}$. (6) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} {x_1}^2-{x_2}^2+{x_3}^2=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{array}\right\}$.

(7) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1+2x_2-5x_3=0\right\}$. (8) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ はすべて整数}\right\}$.

(9) $W=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1,\ x_2,\ x_3 \text{ はすべて有理数}\right\}$.

6.2.15 次の W は $\mathbb{R}$ 上の vector 空間 $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間になるか否かを調べよ.
ならない場合は具体的な反例によって示せ.

(1) $W=\{3f(x)-f'(x) \mid f(x)\in\mathbb{R}[x]_3\}$.

(2) $W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(0)=0,\ f(2)=0\}$.

(3) $W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(1)\leqq 2\}$.

(4) $W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid (x-1)f'(x)+f(x)=o(x)\}$.

(5) $W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid (x-1)^2f''(x)-xf'(1)+f(x)=o(x)\}$.

(6) $W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(x) \text{ の係数はすべて整数}\}$.

(7) $W=\{f(x)\in\mathbb{R}[x]_3 \mid f(x) \text{ の係数はすべて有理数}\}$.

6.2.16 6.2.5 の条件 **S1** を次の条件で置き換へてもよいことを示せ:
S1′ W は空集合ではない.

6.2.17 V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. W_1 と W_2 が V の部分空間であるとき, $W_1\cap W_2$ も V の部分空間であることを示せ.

6.2.18 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 で, $W_1\cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない例を挙げよ.

6.2.19 V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. W_1 と W_2 が V の部分空間であるとき, $W_1\cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1\supset W_2$ または $W_1\subset W_2$ であることを示せ.

6.2.20 W_i $(1\leqq i\leqq r)$ が $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の部分空間のとき, 集合 $W_1+\cdots+W_r$ (V_1 とする) は $c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m$ の形の vectors (但し, $m\in\mathbb{N}$, $c_1,\cdots,c_m\in\mathbf{K}$, $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_m\in W_1\cup\cdots\cup W_r$) (つまり, 集合 $W_1\cup\cdots\cup W_r$ に属する vectors の 1 次結合 (6.3.1 を見よ) の全体) (V_2 とする) に他ならないこと ($V_1=V_2$) を示せ.

6.3　1 次独立と 1 次従属

ここでは, 非常に重要な概念である 1 次独立と 1 次従属について学ぶ.

まづ, 集合を一般化した概念について説明しておく. Vector 空間 V の vectors からなる組とは, V の 1 個以上の vectors（それは有限個であつも無限個であつてもよい）からなる重複を許した集りであるとする. 組についても, 集合に準じた表し方をすることがある. 例へば, 組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, , \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\}$（$\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$）は 5 つの vectors の集りであるが, $\boldsymbol{v}_1$ は 3 個重複してをり, $\boldsymbol{v}_2$ は 2 個重複してゐる.

また, 集合は重複のない組であるとみなすものとする. 記法について混乱は生じないであらうから, 組であるのか集合であるのかについては今後いちいち断らない.

定義 6.3.1　体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \quad (c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{K})$$

なる式を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の, 或いはこの組の（$\mathbf{K}$ 上の）1 次結合と称する.

問 6.3.2　6.3.1 の式が V の vector を表すことを (6.2.1 を使つて) 確認せよ.

定義 6.3.3　V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. V に属する vectors からなる組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について以下の様に定義をする.

(1)　これらの vectors に関する

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \quad (c_1, \cdots, c_n \in \mathbf{K})$$

なる形の関係式を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の, 或いは vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ の 1 次関係と呼ぶ. とくに, 1 次関係

$$0\boldsymbol{u}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$$

を自明な 1 次関係といふ.

(2)　組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} \subset V$ が自明な 1 次関係しか持たないとき, この組は $\mathbf{K}$ 上 1 次独立であるといはれる. $\mathbf{K}$ が判然としてゐれば単に 1 次独立といふ.

(3)　1 次独立でない組は 1 次従属であるといはれる.

（それゆゑ 1 次独立 と 1 次従属 は対立した概念である.）

注意 6.3.4　(1) 零 vector のみからなる組 $\{\mathbf{0}\}$ は 1 次従属である.
(2) 2 つ以上の同じ vectors が含まれてゐる組は 1 次従属である. 例へば, 組 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2\}$（$\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$）においては

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_1 + 1\boldsymbol{v}_2 - 1\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

なる自明でない 1 次関係が存在するので, この組は 1 次従属である.

問 6.3.5　V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が $\mathbf{K}$ 上 1 次独立であるとする. このとき, この中から任意にいくつか取り出した vectors の組も $\mathbf{K}$ 上 1 次独立である. これを示せ.

例題 6.3.6 次の $\mathbb{R}^3$ の vectors の組は 1 次独立であるか否か判定せよ. 1 次従属である場合は, 自明でない 1 次関係を 1 つ記せ.

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

解 $x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 + x_3\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$, 即ち

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる x_1, x_2, x_3 を求めてみる. 係数行列を簡約化すると右の様になる. この計算結果から

$$\begin{cases} x_1 \quad + \ x_3 = 0, \\ \quad x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

よつて, 例へば $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ として, 非自明な 1 次関係式

$$-\boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{0}$$

を得る. よつて $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は 1 次従属である. □

0	1	−2	
1	1	−1	
1	2	−3	
1	1	−1	②
0	1	−2	①
1	2	−3	
1	1	−1	
0	1	−2	
0	1	−2	③ − ①
1	0	1	① − ②
0	1	−2	
0	0	0	③ − ②

問 6.3.7 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属であるためには, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ のうち少くとも 1 つの vector が他の $n-1$ 個の vectors の 1 次結合で書けることが必要十分であることを示せ.

問 6.3.8 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で書ける. このことを証明せよ.

1 次結合の記法 体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の vectors $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ と行列 $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ について,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{6.3.9}$$
$$= (a_{11}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m, \cdots, a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m)$$

と記すことにする. 例へば

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = (2\boldsymbol{u}_1 - 3\boldsymbol{u}_2 + 4\boldsymbol{u}_3, -\boldsymbol{u}_1 + 5\boldsymbol{u}_2 + 7\boldsymbol{u}_3).$$

問 6.3.10 体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V と $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \in V$, $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, \ell, \mathbf{K})$ に対し,

$$\big((\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A\big)B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)(AB)$$

であることを示せ.

補題 6.3.11 V の vectors の 2 組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
(2) $n > m$ である
ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

証明 ある自明でない $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が等式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たすことを示す. 条件 (1) により $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ が存在して,

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$

となる. このとき条件 (2) と 5.4.6 (2) により, 方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

は非自明な解を持つ. その 1 つを

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \left(\neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

とおけば, これが求めるものである. 実際

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A\boldsymbol{c} \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる. □

系 6.3.12 V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立
ならば $n \leqq m$ である.

証明 もしも $n > m$ であれば, 6.3.11 により, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次従属となり (2) が否定されてしまふので, $n \leqq m$ でなければならない. □

問 6.3.13 Vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立で, $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ のとき,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})$$

ならば $A = O$ である. これを示せ.

問 6.3.14 Vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立で, $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ のとき,

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)B$$

ならば $A = B$ である. これを示せ.

問 6.3.15 Vector $\boldsymbol{v}$ が 1 次独立な vectors の組 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で表されるとき, その表し方は一意的である.
(Hint: v が 2 通りに表されたとし, その表示の係数からなる列 vectors を 6.3.14 の行列 A, B とせよ.)

演 習 問 題 6.3

6.3.16 次のそれぞれの $\mathbb{R}^4$ 内の vectors の組について, それらが 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ. 一次従属の場合は非自明な 1 次関係を 1 つ挙げよ.

$$(1)\quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$$(2)\quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6.3.17 Vector 空間 V において 1 次関係

$$\boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{u}_1 - 2\boldsymbol{u}_2,\quad \boldsymbol{v}_2 = -6\boldsymbol{u}_1 + 3\boldsymbol{u}_2,\quad \boldsymbol{v}_3 = -6\boldsymbol{u}_1 + 7\boldsymbol{u}_2$$

があるとき, 6.3.11 により $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属である. $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の間に必ず成り立つ非自明な 1 次関係を 1 つ挙げよ.

6.3.18 V を vector 空間とする. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ について, このうちの $n-1$ 個からなるどの組も 1 次独立であつたとしても, これら n 個の vectors が 1 次独立とは限らない. 一般の n について $V = \mathbb{R}^n$ 内の vectors を例に挙げて示せ.

6.3.19 6.3.8 を一般化した次の主張を証明せよ.
Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は 1 次独立であるとする. これらに V の vectors $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ を合はせた vectors の組

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r\}$$

が 1 次従属ならば, $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ の自明でない 1 次結合として表され, しかも, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合としても表される様な vector が存在する.

(Hint : $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \cdots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r\}$ に属する vectors の間に自明でない 1 次関係が存在する. それの $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ の係数がすべて 0 だとすると矛盾することを示せ.)

6.4 最大 1 次独立数

V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする.

定義 6.4.1 Vector 空間 V の vectors からなる組 X が与へられたとせよ. もし, X に属する r 個の vectors があり, それらは 1 次独立で, かつ, X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるならば, r を, 組 X の最大 1 次独立数と呼ぶことにする.

命題 6.4.2 Vector 空間 V に属する 2 つの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ に対し, 各 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けるならば

$$\text{組 } \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \text{ の最大 1 次独立数} \leqq \text{組 } \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\} \text{ の最大 1 次独立数.}$$

証明 右辺の値を r とし, それを与へる組を採る. 番号を付け替へ, それを $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ とせよ. 6.3.8 により, これら以外の $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ はこれらの 1 次結合で書かれる. このとき, 結局 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ の 1 次結合で書かれる. よつて 6.3.11 から $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ の $r+1$ 個以上の vectors は 1 次従属である. □

問 6.4.3 組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の最大 1 次独立数が r であるためには, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の中に r 個の 1 次独立な vectors があり, 他の $m-r$ 個の vectors はこの r 個の vectors の 1 次結合で書けることが必要十分である. これを示せ.

（Hint : 必要性の証明には 6.3.8 を使ふ. 十分性の証明 : まづ 組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の最大 1 次独立数が r 以上であることはすぐわかる. r 以下であることを示すのに 6.4.2 を使へ. ）

与へられたいくつかの vectors の間の 1 次関係を全て求めるのにも, 簡約化が用ゐられる. 次の例で, その方法を示さう.

例題 6.4.4 $\mathbb{R}^4$ 内の 5 つの vectors

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -10 \\ -19 \end{bmatrix}$$

の組の最大 1 次独立数 r と r 本の 1 次独立な vectors を求め. また, その組に属さないものについては, その組に属する vectors の 1 次結合で表せ.

解 $A = [\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\,]$ とおき, A の簡約化を $B = [\,\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4\ \boldsymbol{b}_5\,]$ とすると, 簡約化の意味から

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

である. 即ち,

$$\begin{aligned} & x_1\,\boldsymbol{a}_1 + x_2\,\boldsymbol{a}_2 + x_3\,\boldsymbol{a}_3 + x_4\,\boldsymbol{a}_4 + x_5\,\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{0} \\ \Longleftrightarrow\ & x_1\,\boldsymbol{b}_1 + x_2\,\boldsymbol{b}_2 + x_3\,\boldsymbol{b}_3 + x_4\,\boldsymbol{b}_4 + x_5\,\boldsymbol{b}_5 = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

これは, $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\}$ の間の 1 次関係と $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_4,\ \boldsymbol{b}_5\}$ の間の 1 次関係が全く同じであることを意味する. しかるに, B の成分を眺めれば, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立で,

$$\boldsymbol{b}_3 = 3\boldsymbol{b}_1 - 4\boldsymbol{b}_2,\quad \boldsymbol{b}_5 = -2\boldsymbol{b}_1 + 5\boldsymbol{b}_2 - 3\boldsymbol{b}_4$$

なので, 1 次独立な最大の組として $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が取れて, $r = 3$ である. 上の 1 次関係から,

$$\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{a}_5 = -2\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_4$$

が得られる. これが求める表示である. □

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	
-2	-3	6	-5	4	
3	2	1	1	1	
-1	-3	9	-1	-10	
5	0	15	3	-19	
-1	-3	9	-1	-10	③
3	2	1	1	1	
-2	-3	6	-5	4	①
5	0	15	3	-19	
1	3	-9	1	10	① $\times(-1)$
3	2	1	1	1	
-2	-3	6	-5	4	
5	0	15	3	-19	
1	3	-9	1	10	
0	-7	28	-2	-29	② $+$ ① $\times(-3)$
0	3	-12	-3	24	③ $+$ ① $\times 2$
0	-15	60	-2	-69	④ $+$ ① $\times(-5)$
1	3	-9	1	10	
0	-7	28	-2	-29	
0	1	-4	-1	8	③ $\times \frac{1}{3}$
0	-15	60	-2	-69	
1	3	-9	1	10	
0	1	-4	-1	8	③
0	-7	28	-2	-29	②
0	-15	60	-2	-69	
1	0	3	4	-14	① $+$ ② $\times(-3)$
0	1	-4	-1	8	
0	0	0	-9	27	③ $+$ ② $\times 7$
0	0	0	-17	51	④ $+$ ② $\times 15$
1	0	3	4	-14	
0	1	-4	-1	8	
0	0	0	1	-3	④ $\times(-\frac{1}{9})$
0	0	0	-17	51	
1	0	3	4	-14	
0	1	-4	-1	8	
0	0	0	1	-3	
0	0	0	0	0	④ $+$ ③ $\times 17$
1	0	3	0	-2	① $+$ ③ $\times(-4)$
0	1	-4	0	5	② $+$ ③
0	0	0	1	-3	
0	0	0	0	0	
$\boldsymbol{b}_1$	$\boldsymbol{b}_2$	$\boldsymbol{b}_3$	$\boldsymbol{b}_4$	$\boldsymbol{b}_5$	

行列の <u>階数</u> (rank) の定義 $\mathrm{rank}\,(A) =$ “ A の簡約化の主成分の個数 ” を思ひ出さう. これについて, 次が成り立つ.

命題 6.4.5 次の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}\,(A) &= A \text{ の列 vectors の最大 1 次独立数} \\ &= A \text{ の行 vectors の最大 1 次独立数.}\end{aligned}$$

証明 最初の等号は 6.4.4 の考へ方を使へばわかる. 第 2 の等号を示さう. A の簡約化を B とし, A の行 vectors の最大 1 次独立数を r, B の行 vectors の最大 1 次独立数を s とせよ. A から B への行の基本変形を辿れば B の各行 vectors は A の行 vectors の 1 次結合で書けるから, 6.4.2 により $r \geqq s$ である. 一方 B から A へも行の基本変形で戻れるのであるから $r \leqq s$ であり, 結局 $r = s$ でなくてはならない. s は B の主成分の個数に等しく, それは $\mathrm{rank}\,(A)$ に他ならない. □

命題 6.4.6 A を n 次正方行列とする. 次は同値

(1) A は正則行列.

(2) A の n 個の列 vectors は 1 次独立.

(3) A の n 個の行 vectors は 1 次独立.

証明 5.5.1 より A が正則であるためには $\mathrm{rank}\,(A) = n$ であることが必要十分である. これは 6.4.5 により, A の列 vectors について, その最大 1 次独立数が n, 即ち, A の列 vectors が 1 次独立であることと同値であるから (1) ⇔ (2) が示された. 行 vectors についても全く同様に示され (1) ⇔ (3) もいへる (下記の 6.4.7). □

問 **6.4.7** 6.4.6 の (1) $\Longleftrightarrow$ (3) を証明せよ.

命題 6.4.8 (簡約化の一意性) 与へられた行列の簡約化は一意的に存在する.

証明 与へられた行列 $A = [\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n] \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ の簡約化 (の 1 つ) を $B = [\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2 \cdots \boldsymbol{b}_n]$ とせよ. A の列と B の列からなる vectors について, 左から順に考察する列を 1 本づつ増やしつつ, その都度 1 次関係を見ながら B が一意的に定まることを見ていく. A の第 1 列については, それが零 vector であれば, B の第 1 列も零 vector である. さもなくば, B の第 1 成分は 1 でそれ以外はすべて 0 となる. いづれにしても第 1 列は一意的に定まる. いま B の第 $j-1$ 列までが一意的に定まつたとして, A の第 j 列を見る. A の第 1 列から第 $j-1$ 列までの vectors からなる組の最大 1 次独立数を k とする. 6.4.4 で行つた考察から, A の第 1 列から第 $j-1$ 列までの vectors からなる組の最大 1 次独立数も k である. 第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ を, その $j-1$ 本の vectors の組に含めたとき, それら j 本の vectors の組の最大 1 次独立数が $k+1$ であれば, $\boldsymbol{b}_j$ は主成分を持たなければならず, 第 $k+1$ 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 である. 一方, もし $\boldsymbol{a}_j$ がそれより左にある列 vectors のうち, 対応する B の主成分を持つ列からなる組の 1 次結合で書かれるならば, その表し方は 6.3.15 により一意的であり $\boldsymbol{b}_j$ は一意的に定まる. 以上から B の成分は一意的に定まることがわかつた. □

命題 6.4.9 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ を 1 次独立な vectors, A を $m \times n$ 型行列とし,

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$

とおく. また A の列 vectors を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ とする. このとき次が成り立つ:

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(2) $m = n$ のとき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるためには, A が正則行列であることが必要十分である.

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たすとせよ. $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ とおくと

$$\mathbf{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\,A\boldsymbol{c}$$

であるが, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立だから 6.3.13 により $A\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. よつて

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}.$$

逆は明らかである. (2) は (1) と 6.4.6 からわかる. □

例題 6.4.10 次の $\mathbb{R}[x]_3$ の vectors の組について, その最大 1 次独立数 r と r 本の 1 次独立な vectors を 1 組求め, さらに, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

$f_1(x) = -2 + 3x - x^2 + 5x^3$, $\quad f_2(x) = -3 + 2x - 3x^2$, $\quad f_3(x) = 6 + x + 9x^2 + 15x^3$,
$f_4(x) = -5 + x - x^2 + 3x^3$, $\quad f_5(x) = 4 + x - 10x^2 - 19x^3$.

解 $f_1, \cdots, f_5$ は $\mathbb{R}[x]_3$ の 1 次独立な vectors の組 $\{1, x, x^2, x^3\}$ によつて

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, x, x^2, x^3)\begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}$$

と書ける. この右辺に掛かつてゐる行列を $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5]$ とする. $\{1, x, x^2, x^3\}$ は 1 次独立であるから, 6.4.9 により $f_1, \cdots, f_5$ の 1 次関係は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係と一致する. 従つて $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係を調べればよいが, これらは 6.4.4 の vectors を順に並べたものと同じである. よつて

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \text{ が 1 次独立な最大の組の 1 つで,} \\ &\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2, \\ &\boldsymbol{a}_5 = -2\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_4 \end{aligned}$$

である. それゆゑ $r = 3$ で答は

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} f_1, f_2, f_4 \text{ が 1 次独立な最大の組の 1 つで,} \\ f_3 = 3f_1 - 4f_2, \\ f_5 = -2f_1 + 5f_2 - 3f_4 \end{cases}$$

である. □

演 習 問 題　6.4

6.4.11　次に挙げる $\mathbb{R}^4$ における vectors の各組に対して次の問に答へよ.
(i) 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
(ii) r 個の 1 次独立な vectors を前の方から順に求めよ.
(iii) 他の vectors を (ii) の vectors の 1 次結合で書き表せ.

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}.$

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \\ -19 \\ 12 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_5 = \begin{bmatrix} -12 \\ -2 \\ 29 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_6 = \begin{bmatrix} -9 \\ 10 \\ 25 \\ -6 \end{bmatrix}.$

6.4.12　次に挙げる V 内の vectors の各組に対して次の問に答へよ.
(i) 1 次独立な最大個数 r を求めよ.
(ii) r 個の 1 次独立な vectors を前の方から順に求めよ.
(iii) 他の vectors を (ii) の vectors の 1 次結合で書き表せ.

(1) $V = \mathbb{R}[x]_4,\quad f_1(x) = 1 + x - x^2 + 2x^3 + x^4,\quad f_2(x) = 1 + x^2 + x^3,$
$f_3(x) = 3 + 5x - 7x^2 + 8x^3 + 5x^4,\quad f_4(x) = 1 - 2x + 5x^2 - x^3 - 2x^4,$
$f_5(x) = x + 2x^2 + x^3 + x^4.$

(2) $V = \mathbb{R}[x]_3,\quad f_1(x) = 3 + x - x^2 + x^3,\quad f_2(x) = 6 + 2x - 2x^2 + 2x^3,$
$f_3(x) = 7 + 2x + 3x^2 - 3x^3,\quad f_4(x) = 8 + 3x - 8x^2 + 8x^3,$
$f_5(x) = 4 + x + 4x^2 - 4x^3.$

(3) $V = \mathbb{R}[x]_3,\quad f_1(x) = -2 + 3x - x^2 + 5x^3,\quad f_2(x) = -3 + 2x - 3x^2,$
$f_3(x) = 6 + x + 9x^2 + 15x^3,\quad f_4(x) = -5 + x - x^2 + 3x^3,$
$f_5(x) = 4 + x - 10x^2 - 19x^3.$

6.4.13　$A \in \mathrm{Mat}(\ell, m, \mathbf{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ のとき 次の関係式の成立を示せ.
(1)　$\mathrm{rank}\ AB \leqq \mathrm{rank}\ A$.
(2)　$\mathrm{rank}\ AB \leqq \mathrm{rank}\ B$.
(3)　$P \in \mathrm{Mat}(\ell, \mathbf{K})$, $Q \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ を正則行列とするとき,
$\mathrm{rank}\ PA = \mathrm{rank}\ A,\quad \mathrm{rank}\ BQ = \mathrm{rank}\ B.$

6.5　基と次元

V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \in V$ の $\mathbf{K}$ 上の 1 次結合の全体 W は V の部分空間になる. W をこれら vectors で（$\mathbf{K}$ 上）生成される vector 空間と呼び,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle_{\mathbf{K}} \quad \text{または, 簡単に} \quad \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle \quad \text{或いは,} \quad \mathbf{K}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mathbf{K}\boldsymbol{u}_r$$

で表す.

問 6.5.1　上記の W が実際に V の部分空間になることを示せ.

V は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間で, B は次の 2 つの性質 **B1**, **B2** を持つ, V の有限個の vectors からなる組とする:
B1. B に属する vectors は $\mathbf{K}$ 上 1 次独立（1 次独立性）,
B2. V は B に属する vector(s) で $\mathbf{K}$ 上で生成される（生成性）.
この様な B が存在するとき, V は有限次元であるといふ.

問 6.5.2　上の様な組 B は一般には（存在すれば）いくつも存在するが, その要素の個数は相等しいことを示せ.　（Hint：6.3.12 を使ふ. 6.5.10 で再証明する.）

定義 6.5.3　上の **B1**, **B2** をともに満たす B を V の基（または基底）と呼ぶ. 基 B の要素の個数が n のとき, V の（$\mathbf{K}$ の）次元は n, 或いは V は（$\mathbf{K}$ 上）n 次元であるといひ, 次の様に記す:

$$\dim_{\mathbf{K}} V = n \quad (\text{または, 混乱が生じない限り } \mathbf{K} \text{ を省いて } \dim V = n).$$

零 vector のみからなる vector 空間は 0 次元であり, それを零空間と称する.

例 6.5.4　$\mathrm{Mat}(n,1,\mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$ は $\mathbf{K}$ 上の n 次元 vector 空間（下記の 6.5.8).

例 6.5.5　$V = \mathbb{R}\cos x + \mathbb{R}\sin x$ は $\mathbb{R}$ 上の 2 次元 vector 空間である. $W = \mathbb{R}\cos x$ は V の 1 次元の部分空間である.

例 6.5.6　体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上 2 次元の vector 空間である. $\{1,\ \sqrt{2}\}$ は 1 つの基である.

例 6.5.7　5 元体 $\mathbb{F}_5$ 上の多項式 $x^3 + 2x + 1$ は既約である. これの根 α の $\mathbb{F}_5$ 上の有理式の全体 $\mathbb{F}_5(\alpha)$ は $\mathbb{F}_5$ 上の 3 次元 vector 空間であり, $1, \alpha, \alpha^2$ は 1 組の基である.

定義 6.5.8　各 j について, 第 j 成分が 1 でその他の成分が 0 である $\mathbf{K}^n = \mathrm{Mat}(n,1,\mathbf{K})$（6.2.4 参照）の元を $\boldsymbol{e}_j$ と記して, これらを基本 vectors と呼ぶ:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

また $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbf{K}^n$ の基をなすが, これを $\mathbf{K}^n$ の標準基と呼ぶ.

例 6.5.9 体 $\mathbf{K}$ 上の n 次以下の x の多項式全体 $\mathbf{K}[x]_n$ は普通の和と scalar 倍に関して $\mathbf{K}$ 上の $n+1$ 次元の vector 空間である. 実際, $\{1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n\}$ は 1 組の基である.

一般には vector 空間の基の選び方はいくつもあるが, 次の定理は, 基を構成する vector(s) の個数は一意的に定まることを示す.

定理 6.5.10 V を vector 空間とする. V の基を構成する vector(s) の個数は基の選び方に依存しない.

証明 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が共に V の基であるとせよ. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書ける. しかも, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である. よつて 6.3.12 により $n \leqq m$. ここで $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の立場を入れ替へて, 同様の議論をすれば, $n \geqq m$ を得る. よつて $n=m$ でなくてはならない. 即ち, 基を構成する vector(s) の個数は, 基の選び方に依らない. □

定理 6.5.11 V を vector 空間とする. V が有限次元であるためには, V の最大 1 次独立数が有限であることが必要十分である. V が有限時限のとき, 次が成り立つ:

$$\dim(V) = \text{“}V \text{ の最大 1 次独立数”}.$$

さらに, 上の等式の右辺を与へる vectors は V の基をなす.

証明 (十分性) V の最大 1 次独立数を n とし, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を 1 次独立な vectors の組とせよ. 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ について, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次従属であるから, 6.3.8 により, $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で表される. 従つて $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が基であり, $\dim(V)=n$ である.
(必要性) $\dim(V)=n$ とする. V には n 個の vectors からなる基が存在する. $n+1$ 個以上の vectors のどんな組も, この基に属する vectors の 1 次結合で書けるから, 6.3.11 により, その組は 1 次従属である. 従つて V の最大 1 次独立数は n である.
後半部分は上の証明に含まれてゐる. □

命題 6.5.12 Vector 空間 V に属する vectors の組 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について, これの最大 1 次独立数を与へる組は, 部分空間 $\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ の基をなす.

証明 簡単のため $B=\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と記す. 部分空間 $W=\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ の任意の vector は組 B の 1 次結合で書かれるから, 6.4.2 より, B の最大 1 次独立数が W の最大 1 次独立数を与へる. その最大 1 次独立数を与へる B の vector(s) からなる組は, 明らかに, W に関しての **B1**, **B2** を満たすから, W の基である. □

例題 6.5.13 行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}$ について,

部分空間 $W = \left\{ A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \right\} (\subset \mathbb{R}^4)$ の次元と 1 組の基を求めよ.

解 $A = [\, \boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5 \,]$ は 6.4.4 の行列であり,

その簡約化 $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ から, $\{ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \}$ の最大 1 次独立数は 3 で, その様な組は $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ によつて与へられる. ゆゑに

$$\begin{aligned} W &= \{ A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \} \\ &= \{ A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 + x_5\boldsymbol{a}_5 \,|\, x_1,\ \cdots, x_5 \in \mathbb{R} \} \\ &= \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5 \rangle \end{aligned}$$

の基は 6.5.12 により, $\{ \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \}$ によつて与へられ, $\dim W = 3$ である. □

例題 6.5.14 行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}$ について,

解空間 $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ の次元と 1 組の基を求めよ.

解 A は 6.4.4 の行列であり, その簡約は, そこで求めた通り $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であるから,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3c_1 + 2c_2 \\ 4c_1 - 5c_2 \\ c_1 \\ 3c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

を得る. ここで

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと, これらは 3 行目と 5 行目（簡約化 B で主成分を持たない列に対応）を見ることで 1 次独立とわかる. $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ は W を生成するから, これらは W の基であり, $\dim W = 2$. □

解空間の次元 6.5.14 から次のことが容易にわかる．

定理 6.5.15 $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ とする．斉次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}$$

の次元は次式で与へられる：

$$\dim W = n - \mathrm{rank}\,(A).$$

問 6.5.16 6.5.15 を証明せよ．
（Hint：A の簡約化 B の主成分の個数が $\mathrm{rank}\,(A)$ であるから, $n - \mathrm{rank}\,(A)$ は B における主成分のない列の個数である．）

問 6.5.17 $\dim V = n$ とする．V の n 個の vectors $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ について, 次の 3 条件は同値であることを示せ．
(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基である．
(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．
(3) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する．

問 6.5.18 体 $\mathbf{K}$ 上の有限次元 vector 空間 V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 について, $W_1 \supset W_2$ かつ $\dim W_1 = \dim W_2$ であれば, $W_1 = W_2$ である．これを証明せよ．
（これは, 有限集合 A と B について, $A \supset B$ かつ $\#A = \#B$ ならば $A = B$ であることの類似である．）
（Hint：$\dim W_1 = \dim W_2 = n$ とし, W_2 の基を $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ とせよ．これは, 6.5.17 (2) が成り立つてゐる状況であることに注意せよ．）

例題 6.5.19 $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0 \}$ の基と次元を求めよ．

解 $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W$ として, 条件 $f(1) = 0$ を書き替へれば

$$a + b + c + d = 0. \quad \therefore \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0.$$

これを 5.4.8 の方法で解けば

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる．よつて W の基としては,

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に対応する $-1 + x$, $-1 + x^2$, $-1 + x^3$ の組がとれて, $\dim W = 3$ である． □

演 習 問 題 6.5

6.5.20　次の集合 W は vector 空間である. それぞれ, W の 1 組の基を求め, $\dim W$ を記せ. 但し,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 6 & -9 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 11 & 2 & -12 & -9 \\ 4 & 0 & -8 & -3 & -2 & 10 \\ 2 & -5 & -19 & 1 & 29 & 25 \\ -3 & 2 & 12 & 6 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$$

(1) $W = \left\{ A\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \right\}$ $(\subset \mathbb{R}^3)$.

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ $(\subset \mathbb{R}^5)$.

(3) $W = \left\{ B\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \right\}$ $(\subset \mathbb{R}^4)$.

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ $(\subset \mathbb{R}^5)$.

(5) $W = \left\{ C\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \right\}$ $(\subset \mathbb{R}^4)$.

(6) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \,\middle|\, C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ $(\subset \mathbb{R}^6)$.

(7) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = f(2) = 0 \}$.

(8) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_2 \mid f(1) = 0,\ f'(-1) = 0 \}$.

(9) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(-1) = 0,\ f'(1) - f(2) = 0 \}$.

(10) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid 3f(x) - (x+1)f'(x) = o(x) \}$.

6.5.21　次の各問において, $\mathbb{R}$ 上の vector 空間 V 内の与へられた vectors が 1 次独立であることを示し, これらを含む V の基を 1 組与へよ.

(1) $V = \mathbb{R}^4$,　$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$.

（Hint: $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ および V の標準基 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$（6.5.8 にて定義）を, この順に並べてできる行列 $A \in \mathrm{Mat}(4, 6, \mathbb{R})$ を簡約化する.）

(2) $V = \mathbb{R}[x]_2$,　$f_1(x) = 2 - x + 2x^2$,　$f_2(x) = 1 + x + x^2$.

（Hint: $f_1(x)$, $f_2(x)$ および V の基 1, x, x^2 をこの順に並べたものを, この基 1, x, x^2 の 1 次結合として (6.3.9) の様に表す行列を $A \in \mathrm{Mat}(3, 5, \mathbb{R})$ とし, A を簡約化する.）

6.6 基の延長と次元定理

前節の 6.5.21 の考へ方を命題として述べると次の様になる.

> **命題 6.6.1** （基の延長） 体 $\mathbf{K}$ 上の有限次元 vector 空間 V の 1 次独立な vectors の組 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が与へられてゐるとせよ. このとき, 適当に V の vectors $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を選んで $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が V の基となる様にできる.

証明 V の 1 組の基をとり $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ とおく. このとき, $A \in \mathrm{Mat}(n, r+n, \mathbf{K})$ を

$$(\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n)A$$

で定め, 6.4.10 の様に A の簡約化を利用して, $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の左から優先的に 1 次独立な vectors（n 個になる）を選べば, それは V の 1 組の基である (理由を説明できるか). その中に $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が含まれるから, それが所望の 1 組の基である. □

一般に, 有限集合 U とその部分集合 A, B について

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

が成り立つが, これの類似として, 次元定理と呼ばれる以下の定理がある.

> **定理 6.6.2** （次元定理 1）V を体 $\mathbf{K}$ 上の有限次元 vector 空間とする. W_1, W_2 は V の部分空間とする. このとき次の等式が成り立つ:
>
> $$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

証明 $\dim W_1 = m$, $\dim W_2 = n$, $\dim(W_1 \cap W_2) = r$ とおく. $W_1 \cap W_2$ の 1 組の基を

$$\{\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r\} \tag{6.6.3}$$

としておく. 6.6.1 により, これらの vectors を含む W_1 の基, および W_2 の基が存在する. それらを 1 組づつ選んで, それぞれ,

$$W_1 \text{ の基}: \{\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m\}, \tag{6.6.4}$$

$$W_2 \text{ の基}: \{\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{v}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\} \tag{6.6.5}$$

とおく. また $h = \dim(W_1 + W_2)$ とする. 証明したいのは $h = m + n - r$ である. まづ, 明らかに (6.6.4) と (6.6.5) を合はせた組

$$\{\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_r,\ \boldsymbol{u}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_m,\ \boldsymbol{v}_{r+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_n\} \tag{6.6.6}$$

が $W_1 + W_2$ を生成するから, 6.5.12 により, この組の最大 1 次独立数を与へる組が, $W_1 + W_2$ の基をなす. 従つて, $m + n - r \geqq h$ である. 一方, 組 (6.6.6) は 1 次独立である. 実際, さうでないとすると, 6.3.19 により $\{\boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ のある非自明な 1 次結合で表される vector（この場合は必然的に $\mathbf{0}$ ではない）

$$\boldsymbol{v} = c_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n\,(\in W_2) \quad (c_{r+1}, \cdots, c_n \text{ のいづれかは } 0 \text{ でない})$$

が (6.6.4) の 1 次結合で書かれることになり, $\boldsymbol{v} \in W_1$, つまり $\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ である. 従つて $\boldsymbol{v}$ は (6.6.3) の 1 次結合で書かれる. これは (6.6.5) が 1 次独立であることに矛盾する. 以上から, 組 (6.6.6) は 1 次独立であり, 6.5.11 により $m + n - r \leqq h$ である. 以上から所望の等式 $h = m + n - r$ が得られた. □

例題 6.6.7 Vector 空間 $\mathbb{R}^5$ 内の vectors

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\-4\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}-2\\-5\\-5\\-5\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{u}_4=\begin{bmatrix}-1\\12\\7\\4\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}3\\4\\4\\2\\7\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}4\\-8\\-3\\-2\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}6\\-7\\-1\\-2\\11\end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_4=\begin{bmatrix}6\\-12\\-3\\-6\\18\end{bmatrix}$$

に対し, $U=\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4\rangle$, $V=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\rangle$ とおく. $U\cap V$ の基を求め, さらにそれらを含んだ U, V, および $U+V$ の基をそれぞれ求めよ.

解 これらの vectors をこの順に並べてできる行列を A として, A を簡約化する. 始めに $U\cap V$ の基を求める. まず, 簡約化の結果より, 1 次関係

$$(a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2+a_3\boldsymbol{u}_3+a_4\boldsymbol{u}_4)-(b_1\boldsymbol{v}_1+b_2\boldsymbol{v}_2+b_3\boldsymbol{v}_3+b_4\boldsymbol{v}_4)=\boldsymbol{0}\tag{6.6.8}$$

は $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ についての関係式

$$\begin{cases} a_1=3a_3-b_3-4b_4,\\ a_2=-2a_3+b_3+4b_4,\\ a_4=-b_2-b_3-b_4,\\ b_1=b_2+2b_3+3b_4,\ (a_3,\,b_2,\,b_3,\,b_4\in\mathbb{R}\ \text{は任意}) \end{cases}$$

と同値である. そこで (6.6.8) を書き替へて,

$$\begin{aligned}&(3a_3-b_3-4b_4)\boldsymbol{u}_1+(-2a_3+b_3+4b_4)\boldsymbol{u}_2\\ &\qquad+a_3\boldsymbol{u}_3-(b_2+b_3+b_4)\boldsymbol{u}_4\\ &=(b_2+2b_3+3b_4)\boldsymbol{v}_1-b_2\boldsymbol{v}_2-b_3\boldsymbol{v}_3-b_4\boldsymbol{v}_4\\ &\qquad\text{(両辺それぞれが } U\cap V \text{ を張る)}\\ &=-b_2(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1)-b_3(\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1)-b_4(\boldsymbol{v}_4-3\boldsymbol{v}_1)\\ &\qquad\text{(右辺を } -b_1,\ -b_2,\ -b_3 \text{ について整理)}.\end{aligned}$$

ここで, 先の簡約化の左横に, 簡約化の現段階の

$$\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{w}_3=\boldsymbol{v}_4-3\boldsymbol{v}_1$$

対応する vectors を加へ, 簡約化を完了させれば,

$$\begin{aligned}U\cap V&=\langle\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_4-3\boldsymbol{v}_1\rangle\\ &=\langle\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1\rangle\end{aligned}$$

であつて最後の 2 つの vectors がこの空間の基であることが 6.4.4 の推論でわかる. つまり

$$U\cap V \text{ の基}:\{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1\}.$$

さらに残りの部分を 6.4.4 の様に読み取れば,

$$U \text{ の基}:\{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u}_1\},$$

$$V \text{ の基}:\{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\},$$

$$U+V \text{ の基}:\{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3-2\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1\}$$

が得られ, すべての目的が達せられた. □

$\boldsymbol{w}_1$	$\boldsymbol{w}_2$	$\boldsymbol{w}_3$	$\boldsymbol{u}_1$	$\boldsymbol{u}_2$	$\boldsymbol{u}_3$	$\boldsymbol{u}_4$	$\boldsymbol{v}_1$	$\boldsymbol{v}_2$	$\boldsymbol{v}_3$	$\boldsymbol{v}_4$	
			0	−1	−2	−1	3	4	6	6	
			−1	−4	−5	12	4	−8	−7	−12	
			1	−1	−5	7	4	−3	−1	−3	
			1	−1	−5	4	2	−2	−2	−6	
			−1	−1	1	3	7	4	11	18	
			1	4	5	−12	−4	8	7	12	$(-1)\times$②
			0	−1	−2	−1	3	4	6	6	①
			1	−1	−5	7	4	−3	−1	−3	
			1	−1	−5	4	2	−2	−2	−6	
			−1	−1	1	3	7	4	11	18	
			1	4	5	−12	−4	8	7	12	
			0	1	2	1	−3	−4	−6	−6	$(-1)\times$②
			0	−5	−10	19	8	−11	−8	−15	③ − ①
			0	−5	−10	16	6	−10	−9	−18	④ − ①
			0	3	6	−9	3	12	18	30	⑤ + ①
			1	0	−3	−16	8	24	31	36	① − 4 × ②
			0	1	2	1	−3	−4	−6	−6	
			0	0	0	24	−7	−31	−38	−45	③ + 5 × ②
			0	0	0	21	−9	−30	−39	−48	④ + 5 × ②
			0	0	0	−12	12	24	36	48	⑤ − 3 × ②
			1	0	−3	−16	8	24	31	36	
			0	1	2	1	−3	−4	−6	−6	
			0	0	0	24	−7	−31	−38	−45	
			0	0	0	21	−9	−30	−39	−48	
			0	0	0	1	−1	−2	−3	−4	⑤ $\times(-\frac{1}{12})$
			1	0	−3	−16	8	24	31	36	
			0	1	2	1	−3	−4	−6	−6	
			0	0	0	0	17	17	34	51	③ − 24 × ⑤
			0	0	0	0	12	12	24	36	④ − 21 × ⑤
			0	0	0	1	−1	−2	−3	−4	
			1	0	−3	−16	8	24	31	36	
			0	1	2	1	−3	−4	−6	−6	
			0	0	0	1	−1	−2	−3	−4	⑤
			0	0	0	0	1	1	2	3	③ $\times\frac{1}{17}$
			0	0	0	0	1	1	2	3	④ $\times\frac{1}{12}$
			1	0	−3	0	−8	−8	−17	−28	① + 16 × ③
			0	1	2	0	−2	−2	−3	−2	② − ③
			0	0	0	1	−1	−2	−3	−4	
			0	0	0	0	1	1	2	3	
			0	0	0	0	0	0	0	0	⑤ − ④
0	−1	−4	1	0	−3	0	0	0	−1	−4	① + 8 × ④
0	1	4	0	1	2	0	0	0	1	4	② + 2 × ④
−1	−1	−1	0	0	0	1	0	−1	−1	−1	③ + ④
0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
0	−1	−4	1	0		0	0				
0	1	4	0	1		0	0				
1	1	1	0	0		−1	0				−③
0	0	0	0	0		0	1				
0	0	0	0	0		0	0				
0	0	0	1	1		0	0				① + ②
0	1	4	0	1		0	0				
1	0	−3	0	−1		−1	0				③ − ②
0	0	0	0	0		0	1				
0	0	0	0	0		0	0				
1	0	−3	0	−1		−1	0				③
0	1	4	0	1		0	0				
0	0	0	1	1		0	0				①
0	0	0	0	0		0	1				
0	0	0	0	0		0	0				

演 習 問 題 6.6

6.6.9 Vector 空間 $\mathbb{R}^5$ 内の, 以下の間において定められた部分空間 U, V について, $U \cap V$ の基, および, それらを含んだ U, V, $U+V$ の基をそれぞれ求めよ.

(1) $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$. 但し,

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -6 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ 12 \\ -3 \\ -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 5 \\ 7 \\ -8 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \\ 8 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -9 \\ -3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

(2) $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4 \rangle$, $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$. 但し,

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -9 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -17 \\ 9 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} -22 \\ 12 \\ -4 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} 19 \\ -13 \\ 4 \\ -7 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

6.7 反転置簡約行列

この小節は, 理論的には不要である. しかし, 問や演習問題の解答を一意化して, この講義録の利用者が, 解答の確認を容易にするために設けた.

行列 M の転置行列 ${}^tM$ の行と列を逆の順番に並べ替へたものを反転置行列と呼ぶことにし, ${}^rM$ と記すことにする. 例へば

$${}^r\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

また, ${}^rB$ が簡約行列である行列 B を反転置簡約行列と呼ぶことにする. いま, 体 $\mathbf{K}$ 上の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を 5.4.8 の解答の方法に忠実に従つて解けば, 解は

$$\left\{ c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{a} \,\middle|\, c_1, \cdots, c_r \in \mathbf{K} \right\}$$

の様な形で得られる. ここに $\boldsymbol{u}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_r$, $\boldsymbol{a}$ は成分を $\mathbf{K}$ に有するある定まつた数 vectors である. このとき, 行列 $[\boldsymbol{u}_1 \cdots \boldsymbol{u}_r]$ は反転置簡約行列である.

さて, この講義 note を使ふ際に次のことを約束したい. 即ち,

約束 6.7.1 一般にある vector 空間の基や連立方程式の解などの様にいくつかの数 vectors の組について叙述する場合（問や演習問題の解答など）は, 原則としてそれらの vectors を順に並べた行列が反転置簡約行列になるものを選ぶこととしたい. ただし, 答の数 vector(s) の成分に整数でない有理数が含まれる場合は, それの分母を払つた最簡な整数を成分とするものを提示する.

例 6.7.2 この約束に従へば, 例へば

$$\left\{ a\begin{bmatrix} 18 \\ -31 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 10 \\ -13 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{は} \quad \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

と記される.

6.8 いくつかの vectors で生成された空間を解空間として表す方法

体 $\mathbf{K}$ 上の線形空間 V と vectors $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が与へられたとし, 部分空間 $W = \mathbf{K}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mathbf{K}\boldsymbol{u}_r$ を考へる. ときに W を解空間として表したいときがある. 特に $V = \mathbf{K}^n$ のときに処理できれば, 一般の場合はこれまで述べてきた仕方で処理できる. 即ち, 行列 $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ （ここで m は適当な自然数）を見付けて

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

と書き表したい. 一般的に述べるよりも, 例題で説明する方がよいであらう.

例題 6.8.1 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間 $\mathbb{R}^4$ における vectors

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

で生成された空間 $W = \mathbb{R}\boldsymbol{u}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{u}_2$ を解空間とし表せ. 即ち $W = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ となる行列 $A \in \mathrm{Mat}(m, 4, \mathbf{K})$ （ここで $m = \dim W$）を与へよ.

解 まづ, 行列 ${}^t[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]$ を反転簡約化する：

7	−3	−8	4	
−1	−1	−6	3	
8	−2	−2	1	① − ②
−1	−1	−6	3	
8	−2	−2	1	
−25	5	0	0	② − ① × 3
−25	5	0	0	②
8	−2	−2	1	①
−5	1	0	0	① × $\frac{1}{5}$
8	−2	−2	1	
−5	1	0	0	
−2	0	−2	1	② + ① × 2

これで反転簡約化が完了した. この最後の行列の 2 つの行 vectors を解とする方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を与へる行列 A として, 直ちに

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

が得られる. 実際, 例へば 5.4.7 で述べた方法で方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解いてみれば, 上記の簡約化の最後の行列の 2 つの行 vectors で生成される空間が解の空間になつてゐることがわかるであらう. 以上をまとめれば,

$$W = \mathbb{R}\boldsymbol{u}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{u}_2 = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{r} x_1 + 5x_2 \phantom{{}+x_3} + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

となる. □

6.9　基の選び方

次の章の前半の内容を深く関はることとして, vector 空間の基を別の（より使ひ易い）基に取り換へたい場合がある. ここで, そのことについて少しだけ, 説明しておきたい.

今までは, 与へられた有限個の vectors に順序を決めて, できるだけ前の方から選んで基を構成してきた. しかし, その有限個の vectors の生成する部分空間に属する vectors（一般には無限個ある）の中から, 使ひ易い vectors を選んで基を構成するべきである. その事を例題で示す.

例 6.9.1　行列 $A=\begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}$ について,

部分空間 $W=\left\{ A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4 \,\middle|\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^5 \right\}(\subset\mathbb{R}^4)$ の 1 組の基は, 6.5.13 の解答で説明した通り, $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5\,]$ とおくと, $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_4\}$ で与へられる. これを並べた行列の転置行列の簡約化を行ふと $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{191}{27} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{175}{27} \end{bmatrix}$ となるから $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_4\}$ の代りに

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{191}{27} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{8}{9} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{175}{27} \end{bmatrix}$ を基としてもよいことがわかる.

例題 6.9.2　$\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間

$$W=\left\{ f(x)-f(0)-f'(0)(2x-1)-f''(0)(x^2-1) \,\middle|\, f(x)\in\mathbb{R}[x]_2 \right\}$$

の基と次元を求めよ.

解　今まで通りに $\mathbb{R}[x]_2$ の基を $\{1,\ x,\ x^2\}$ として計算して得られる基は

$$(1-x,\ 2-x^2)=(1,\ x,\ x^2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

である. 別の基の一例として, <u>0 でない最低次の項の次数ができるだけ高く, 項数ができるだけ少い多項式</u>からなる基を求めてみる. それには, 上記の係数行列の転置行列を簡約化すればよい :

$$\begin{array}{rrrl} \hline 1 & -1 & 0 & \\ 2 & 0 & -1 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & \\ 0 & 2 & -1 & ②-①\times 2 \\ \hline \end{array}$$

ゆゑに, 得られる基は

$$\{1-x,\ 2x-x^2\}$$

となる. □

これ以上, この様なことにあまり拘るべき理由もないし, 次節以降で, 基の取り換へを一般的に扱ふので, このくらゐで止めておく.

第 7 章　線形写像と線形変換

7.1　線形写像

Vector 空間から vector 空間への写像で, それぞれの vector 空間としての演算を保つ写像について学ぶ.

定義 7.1.1　U, V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする.
(1)　写像 $T : U \to V$ が, 次の条件 **L1** と **L2** を共に満たすとき, T は $\mathbf{K}$ 上の線形写像であるといはれる.
L1　任意の $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U$ に対して $T(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = T(\boldsymbol{u}_1) + T(\boldsymbol{u}_2)$,
L2　任意の $\boldsymbol{u} \in U$, $c \in \mathbf{K}$ に対して $T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$.
(2) U のすべての元を V の零 vector $\mathbf{0}_V$ に写す写像は零写像と呼ばれ, $\mathbf{K}$ 上の線形写像である. これは O と記される.

問 7.1.2　条件 **L1** と **L2** は 1 つにまとめて
L　任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ と任意の $a, b \in \mathbf{K}$ に対して　$T(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = aT(\boldsymbol{u}) + bT(\boldsymbol{v})$
と置き換へてもよい. このことを示せ.

例題 7.1.3　線形写像は零 vector を零 vector に写すことを示せ.

証明　7.1.1 の **L2** で $c = 0$ とすれば　$T(\mathbf{0}_U) = T(0\mathbf{0}_U) = 0\,T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ となる.　□

問 7.1.4　$A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ のとき, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 T_A を

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

により定義すれば, T_A は $\mathbb{R}$ 上の線型写像である [16]. これらを確かめよ.

例題 7.1.5　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 T は, 適当な $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ によつて

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

と書けることを示せ.

解　$\mathbb{R}^n$ の標準基 $\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ をとる. このとき $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + \mathbb{R}\boldsymbol{e}_n$ である. いま $\boldsymbol{a}_i = T(\boldsymbol{e}_i)$ とし, $A = [\,\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n\,]$ とおくと, T は線形写像であるから, 任意の $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n$ について, **L1**, **L2** を繰り返へし用ゐれば

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{c}) &= T(c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n) = c_1T(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{e}_n) \\ &= c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = A\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = A\boldsymbol{c} \end{aligned}$$

となる.　□

[16] 特に $a \in \mathbb{R}$ を定数とするとき, 写像 $\mathbb{R} \ni x \longmapsto ax \in \mathbb{R}$ は線形写像である.

例 7.1.6 7.1.4 以外の線形写像の例を挙げる：

(1) 多項式環 $\mathbb{R}[x]$ からそれ自身へ, $f(x)$ にその導函数 $f'(x)$ を対応させる写像は $\mathbb{R}$ 上の線形写像. 実際 $(cf(x))' = cf'(x)$, $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ である.

(2) Gauss 数体 $\mathbb{Q}(i)$ を $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間とみて, i 倍写像 $\mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i)$, $a+bi \mapsto -b+ai$ は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像.

(3) 数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間とみて, それからそれ自身への $1+\sqrt{2}$ 倍は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像である.

(4) 実数体 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間とみたとき, それから自身への $\pi = 3.141592\cdots$ 倍は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像である.

(5) 複素数体 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上の vector 空間とみたとき, 複素共役を取る写像はこれからそれ自身への $\mathbb{R}$ 上の線形写像である.

(6) $A \in \mathrm{Mat}(n,k,\mathbb{R})$ とせよ. $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbb{R})$ から $\mathrm{Mat}(m,k,\mathbb{R})$ への写像 $M \mapsto MA$ は $\mathbb{R}$ 上の線形写像である.

(7) 25 元体 $\mathbb{F}_{25}$ からそれ自身への 5 乗写像 $a \mapsto a^5$ は 5 元体 $\mathbb{F}_5$ 上の線形写像である.

例題 7.1.7 (1) 写像 $T(f(x)) = f''(x)(1-x) - f'(1-x) + f(2)$ は $\mathbb{R}[x]_2$ から $\mathbb{R}[x]_1$ への $\mathbb{R}$ 上の線形写像であることを示せ.

(2) 写像 $T(f(x)) = f''(x)(1-x) + x : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_1$ は $\mathbb{R}$ 上の線形写像でないことを示せ.

解 (1) $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ のとき $T(f(x) \in \mathbb{R}[x]_1$ であることは容易にわかる.

L1 について. $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ のとき,

$$\begin{aligned}
T\bigl(f(x)+g(x)\bigr) &= (f+g)''(x)\,(1-x) - (f+g)'(1-x) + (f+g)(2)\\
&= (f''(x)+g''(x))(1-x) - (f'+g')(1-x) + f(2) + g(2)\\
&= (f''(x)+g''(x))(1-x) - f'(1-x) - g'(1-x) + f(2) + g(2)\\
&= \bigl(f''(x)(1-x) - f'(1-x) + f(2)\bigr) + \bigl(g''(x)(1-x) - g'(1-x) + g(2)\bigr)\\
&= T(f(x)) + T(g(x)).
\end{aligned}$$

L2 について. $c \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ のとき,

$$\begin{aligned}
T(cf(x)) &= (cf(x))''(1-x) - (cf)'(1-x) + (cf)(2)\\
&= cf(x)''(1-x) - cf'(1-x) + cf(2)\\
&= c(f(x)''(1-x) - f'(1-x) + f(2)) = cT(f(x)).
\end{aligned}$$

(2) $T(o(x)) = x \neq o(x)$ なので, 7.1.3 から, T は線形写像ではない. □

定義 7.1.8 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする. このとき

$$\mathrm{Ker}\,(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \mid T(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}_V\}, \quad \mathrm{Im}\,(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \mid \boldsymbol{u} \in U\}$$

とおき, $\mathrm{Ker}\,(T)$ を T の <u>核</u>, $\mathrm{Im}\,(T)$ を T の <u>像</u> と呼ぶ. この他,

$$\mathrm{Ker}\,(T) = T^{-1}(\mathbf{0}_V), \qquad \mathrm{Im}\,(T) = T(U)$$

などと記すことがある.

問 7.1.9 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．次の 2 つを証明せよ．
(1) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間である．
(2) T の像 $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間である．
(Hint : いづれも 6.2.5 の **S1**, **S2**, **S3** の成立を示せ．)

定義 7.1.10 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．このとき

$$\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)), \quad \mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$$

と書いて，それぞれ T の退化次数，階数といふ．

問 7.1.11 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．次が成り立つことを示せ： $\mathrm{rank}(T) = 0 \iff T = O$.

例題 7.1.12 行列

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}$$

に対し $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定められる線形写像 $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ について，次の問に答へよ．
(1) T の退化次数と $\mathrm{Ker}(T)$ の一組の基を求めよ．
(2) T の階数と $\mathrm{Im}(T)$ の一組の基を求めよ．

解 A は 6.4.4 の行列であり，その簡約化は

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる．
(1) この B から，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解として

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3c_1 + 2c_2 \\ 4c_1 - 5c_2 \\ c_1 \\ 3c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

を得る．ここで，右辺の 2 つの vectors を順に $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ とおくと，これらは 3 行目と 5 行目（A の簡約化で，主成分を持たない列に対応する成分）を見ることで 1 次独立とわかる．$\mathrm{Ker}(T)$ は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間に他ならないから，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ が $\mathrm{Ker}(T)$ の基であつて $\mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2$ である．
(2) $\mathrm{Im}(T) = \{ A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \}$ であるから，$\mathrm{Im}(T)$ は A の列 vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ によつて生成される空間に他ならない．ここで，6.4.4 で述べた通り，簡約化 B の列 vectors のなす組 $\{\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_5\}$ の最大 1 次独立数を与へる vectors $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4\}$ に対応する vectors $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ は $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5\}$ の最大 1 次独立数を与へる．ゆゑに，6.5.12 によつて $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ は $\mathrm{Im}(T)$ の一組の基であつて，$\mathrm{rank}(T) = 3$ である． □

注意 7.1.13 先の 7.1.4 の写像においては $\mathrm{null}(T_A)$ は $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元であり, $\mathrm{rank}\,(T_A)$ は $\{\, A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$ の次元である. A の簡約化を B とすれば, これらはそれぞれ, 主成分の存在する B の列の個数 (つまり $\mathrm{rank}\,(A)$), および, 主成分の存在しない B の列の個数であるから, その和は B の列の個数 n に他ならない (例へば 6.5.20 を思ひ出せ). ゆゑに,

$$\mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}\,(T_A) = n.$$

この等式は次の様な一般的な形で成り立ち, これも次元定理と呼ばれる.

定理 7.1.14 (次元定理 2) Vector 空間 U から同 V への線形写像 T について

$$\mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}\,(T) = \dim U$$

が成り立つ.

証明 $\mathrm{null}(T) = r$ とし, $\mathrm{Ker}(T)$ の基

$$\{\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_r\}$$

をとり, $\mathrm{rank}\,(T) = s$ とおき, $\mathrm{Im}(T)$ の基

$$\{\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_s\}$$

をとる. さらに $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+s} \in U$ を

$$T(\boldsymbol{u}_{r+1}) = \boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ T(\boldsymbol{u}_{r+s}) = \boldsymbol{v}_s$$

となる様に選ぶ. この $r+s$ 個の vectors

(7.1.15) $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+s}$

が U の基となることが示されればよい.

B1 (1 次独立性) について.

いま (7.1.15) の vectors に 1 次関係

(7.1.16) $$\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j + \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j} = \mathbf{0}_U$$

があつたとせよ. これを T で写せば

$$\sum_{j=1}^{r} a_j\, T(\boldsymbol{u}_j) + \sum_{j=1}^{s} b_j\, T(\boldsymbol{u}_{r+j}) = \mathbf{0}_V.$$

ここで $T(\boldsymbol{u}_1) = \cdots = T(\boldsymbol{u}_r) = \mathbf{0}_V$ ゆゑ,

$$\mathbf{0}_V + \sum_{j=1}^{s} b_j\, \boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_V$$

となる. $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s$ は 1 次独立なので

$$b_1 = \cdots = b_s = 0.$$

これと (7.1.16) から

(7.1.17) $$\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j = \mathbf{0}_U.$$

ここで $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ は 1 次独立なので,

$$a_1 = \cdots = a_r = 0.$$

つまり (7.1.15) の vectors は 1 次独立.

B2 (生成性) について.

任意に $\boldsymbol{u} \in U$ をとる. $T(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Im}(T)$ であるから,

$$T(\boldsymbol{u}) = b_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_s \boldsymbol{v}_s$$

と表せる. このとき

$$\begin{aligned} T\Bigl(\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j}\Bigr) &= T(\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{s} b_j T(\boldsymbol{u}_{r+j}) \\ &= T(\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{v}_j = \mathbf{0}_V. \end{aligned}$$

ゆゑに

$$\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j} \in \mathrm{Ker}\,(T).$$

よつて

$$\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j} = \sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j$$

と表せる. 結局

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j + \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j}$$

となり, U が (7.1.15) の vectors で生成されることがわかつた.

以上により (7.1.15) の vectors は U の基である. □

系 7.1.18 T を vector 空間 U から V の線形写像とし, W を U の部分空間とせよ. また, $T(W)=\{T(\boldsymbol{w})\mid \boldsymbol{w}\in W\}$ と記す. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\dim(W\cap \operatorname{Ker} T)+\dim T(W)=\dim W.$$

証明 7.1.14 における T, U をそれぞれ, 制限写像 $T|_W$, W におき替へればよい. □

定義 7.1.19 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から V への 2 つの線形写像 T_1, T_2 と定数 k に対し 和 T_1+T_2 と scalar 倍 kT_1 を各 $\boldsymbol{u}\in U$ について

$$(T_1+T_2)(\boldsymbol{u})=T_1(\boldsymbol{u})+T_2(\boldsymbol{u}),\quad (kT_1)(\boldsymbol{u})=k\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)$$

なるものとして定義する. 従つて, もちろん $(T_1-T_2)(\boldsymbol{u})=T_1(\boldsymbol{u})-T_2(\boldsymbol{u})$ である.

問 7.1.20 上の 7.1.19 において T_1+T_2 と kT_1 が線形写像であることを示せ.

定義 7.1.21 $T:V_1\to V_2$ と $S:V_2\to V_3$ がともに $\mathbf{K}$ 上の線形写像のとき, これらの合成写像 $S\circ T$ も $\mathbf{K}$ 上の線形写像である (下の 7.1.22). これを ST と記す.

問 7.1.22 7.1.21 で述べた合成写像 ST が $\mathbf{K}$ 上の線形写像であることを示せ.

問 7.1.23 $T, T_1, T_2: V_1\to V_2$ 及び $S, S_1, S_2: V_2\to V_3$ を $\mathbf{K}$ 上の線形写像とする. 次を示せ: $\quad S(T_1+T_2)=ST_1+ST_2,\quad (S_1+S_2)T=S_1T+S_2T.$

例題 7.1.24 (1) 3 つの vector 空間 U, V, V' があり, 線形写像 $S:U\to V$, $T:V\to V'$ が与へられたとせよ. $\dim V=m$ と記す. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\operatorname{rank} T+\operatorname{rank} S-m\leqq \operatorname{rank} TS.$$

(2) 行列についても同様に, $B\in \operatorname{Mat}(\ell,m,\mathbf{K})$, $A\in \operatorname{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ のとき, 次が成り立つことを証明せよ:

$$\operatorname{rank} B+\operatorname{rank} A-m\leqq \operatorname{rank} BA.$$

解 (1) 明らかに

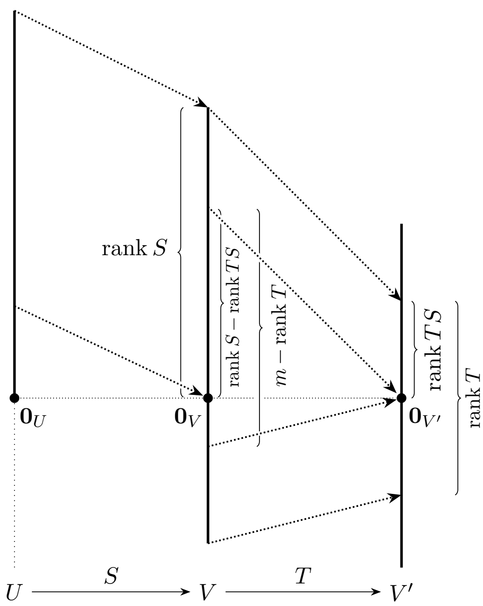
$$T^{-1}(\mathbf{0})\cap S(U)\subset T^{-1}(\mathbf{0}).$$

この両辺の次元は 7.1.18, 7.1.14 から分かり,

$$\operatorname{rank} S-\operatorname{rank} TS\leqq m-\operatorname{rank} T$$

となる. ここから移項によつて所望の不等式を得る (右図). 等号成立のためには, 上の不等号 "≧" が等号となること, 即ち, $T^{-1}(\mathbf{0})\subset \operatorname{Im}(S)$ となることが必要十分である.

(2) $S:\mathbf{K}^n\to\mathbf{K}^m$ を $S(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ で定め, $T:\mathbf{K}^m\to\mathbf{K}^\ell$ を $T(\boldsymbol{y})=B\boldsymbol{y}$ で定めて (1) を使へばよい. □



演習問題 7.1

7.1.25 次の写像は線形写像か. 理由を付けて答へよ.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$

(2) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 - 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$

(3) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$

(4) $T(f(x)) = f''(x)x + f'(x) : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2.$

(5) $T(f(x)) = f''(x)x + f'(x) + x : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2.$

7.1.26 次の各線形写像 T について, 次の (i), (ii) のそれぞれを求めよ.
(i) $\mathrm{Ker}\,(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}\,(T)$.
(ii) $\mathrm{Im}\,(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}\,(T)$.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3.$

但し $A = \begin{bmatrix} 3 & 15 & -12 & 8 & 13 \\ 2 & 10 & -8 & -2 & -6 \\ -6 & -30 & 24 & 7 & 20 \end{bmatrix}.$

(2) $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4.$

但し $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & -8 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 13 & -2 & -7 \end{bmatrix}.$

(3) $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4.$

但し $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & -23 & -19 \\ -2 & 6 & -8 & -44 & -16 \\ 0 & 0 & -4 & -20 & -12 \\ 3 & -9 & 3 & 21 & -3 \end{bmatrix}.$

(4) $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \ : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5.$

但し $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 8 & 1 & -6 \\ -3 & -9 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 & 9 & 4 & -9 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$

☆ 上記 7.1.26 の様な問題を, $\mathbb{R}^n$ でない $\mathbb{R}[x]_n$ などのより一般な vector 空間について解くためには, もう少し道具が必要である（7.3.6, 7.3.12 参照）.

7.2 Vector 空間の同型

命題 7.2.1 線形写像 $T: U \longrightarrow V$ について, 次の 3 つは同値である.
(1) T は単射.
(2) $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_U\}$, つまり $\mathrm{null}(T) = 0$.
(3) $\dim U = \mathrm{rank}\,(T)$.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか. (2) $\Rightarrow$ (1). $T(\boldsymbol{u}_1) = T(\boldsymbol{u}_2)$ ならば, T の線形性により $T(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) = \mathbf{0}_V$. 仮定により $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \mathbf{0}_U$. つまり $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. (3) $\Leftrightarrow$ (2) は 7.1.14 よりわかる. □

Vector 空間の同型の概念について述べておく (7.6.3 などで登場).

定義 7.2.2 Vector 空間 U からそれ自身への恒等写像を $I = I_U$ で表す [17]. U, V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. $\mathbf{K}$ 上の線形写像 $T: U \longrightarrow V$ に対し, V から U への $\mathbf{K}$ 上の線形写像 S が存在して, $ST = I_U$, $TS = I_V$ を満たすとき [18], T は U から V への $\mathbf{K}$ 上の同型写像と呼ばれる. また S は T の逆写像と呼ばれ T^{-1} と書かれる. Vectror 空間 V から V 自身への同型写像を同型変換と呼ぶ.

問 7.2.3 U と V は vector 空間であつて $\dim U = \dim V$ とする. このとき, 線形写像 $T: U \to V$ が同型写像であるためには, 7.2.1 の条件のどれか (従つてすべて) を満たすことが必要十分であることを示せ.
(Hint: (十分性) 7.1.14 と上の仮定 (3) 及び 6.5.18 から T が全射であることがわかるので, T は全単射. その逆写像を S と書けば, S が線形写像であることが T が線形写像であることから示される.)
このことから, 線形写像 T について「T が同型写像 $\Longleftrightarrow$ T が全単射」である.

演習問題 7.2

7.2.4 次の写像 T は全射であるか否か, 単射であるか否か, さらに $\mathbb{R}$ 上の同型写像であるか否かについて, 理由を付けて答へよ.

(1) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3,\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \longmapsto a + bx + cx^2 + dx^3$.

(2) $T: \mathbb{R}[x]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3,\ f(x) \longmapsto \int_0^x f'(t)\,dt$.

(3) $T: \mathbb{R}[x]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_3,\ f(x) \longmapsto f(2x-1)$.

(4) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a+1 \\ b-2 \\ c-1 \\ d \end{bmatrix}$.

[17] 単位行列と同記号であるが, 混乱は生じない.
[18] TS や ST は合成写像を意味する. 7.1.21 を参照.

7.3　線形写像の表現行列

ここでは, 一般の線形写像にも行列の理論を適用するために, 線形写像と行列を結びつける. この note では, n 次の正則行列の全体を

$$\mathrm{GL}(n,\mathbf{K}) = \{\, A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbf{K}) \mid \det(A) \neq 0 \,\}$$

と書く[19]. また, $\mathbf{K}$ 上の線形空間 V の vectors を並べたものを

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)$$

と記し, V 内の同じ数の vectors を並べた 2 組と $a,\, b \in \mathbf{K}$ について,

$$a\,(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m) + b\,(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = (a\,\boldsymbol{u}_1 + b\,\boldsymbol{v}_1, \cdots, a\,\boldsymbol{u}_m + b\,\boldsymbol{v}_m)$$

の様な演算も行ふ. さらに (6.3.9) で述べた様に, $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ について

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\boldsymbol{u}_i, \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{in}\boldsymbol{u}_i \right) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\,A$$

と記す. $A,\, B \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ について, 次式が成り立つことが容易にわかる:

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)(A+B) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\,A + (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\,B.$$

定義 7.3.1　U と V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とし, U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ を決めておく.

(1) $T : U \to V$ を線形写像とする. $T(\boldsymbol{u}_1)$, $\cdots$, $T(\boldsymbol{u}_n)$ はいづれも V の元であるから, $\boldsymbol{v}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書ける. 即ち, 行列 $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ が存在して

$$\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,A \tag{7.3.2}$$

と書ける. 6.3.14 より, その様な A は一つしかない. このとき A を U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する T の <u>表現行列</u> と呼ぶ.

(2) 逆に 行列 $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ が任意に与へられたとき (7.3.2) を満たす線形写像 $T : U \to V$ が一意的に存在する. T を A で <u>表現される</u> 線形写像と称する.

問 7.3.3　7.3.1(2) で, T の一意的な存在を確かめよ.

問 7.3.4　$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ の双方の基を標準基にとるとき, 7.1.4 で定義した $\mathbb{R}$ 上の線形写像 $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ の表現行列は A である. このことを確かめよ.

例題 7.3.5　写像 $T : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$ を $T\big(f(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x) + f(2x-1) - f(2x+1)$ で定める. このとき次の問に答へよ.

(1) T の像は $\mathbb{R}[x]_2$ に含まれることを示し, T が線形写像であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}[x]_3$ の基 $\{1, x, x^2, x^3\}$, $\mathbb{R}[t]_2$ の基 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列を求めよ.

解　(1) は容易なので省略する. 簡単な計算で

$$\big(T(1), T(x), T(x^2), T(x^3)\big) = (0, -1, -6x, -21x^2-2) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$$

となり, 表現行列は $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$ である. □

[19] これは行列の積に関して群（「代数学 1」で学ぶ）であり, $\mathbf{K}$ 上の n 次 <u>一般線形群</u>（<u>the general linear group</u>）と呼ばれる.

表現行列を使へば, 一般の vector 空間での 7.1.26 の様な問題が以下の様に解かれる.

例題 7.3.6 線形写像

$$T:\mathbb{R}[x]_3\to\mathbb{R}[x]_2,\quad T(f(x))=-3f'(x)+(x+1)f(1)$$

について, 次の (i), (ii) のそれぞれを求めよ.
(i) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.
(ii) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

解 計算により

$$\bigl(T(1),T(x),T(x^2),T(x^3)\bigr)=(1,x,x^2)\begin{bmatrix}1&-2&1&1\\1&1&-5&1\\0&0&0&-9\end{bmatrix}.$$

最後部の行列を $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\,]$ とおく. A の簡約化は $\begin{bmatrix}1&0&-3&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ である.

(i) 一般に $f(x)\in\mathbb{R}[x]_3$ は

$$f(x)=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3=(1,x,x^2,x^3)\,\boldsymbol{c}\qquad\left(\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix}\right)$$

と（一意的に）書け, 上の記号を使つて,

$$\begin{aligned}T\bigl(f(x)\bigr)&=T(c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3)\\&=c_1T(1)+c_2T(x)+c_3T(x^2)+c_4T(x^3)\\&=\bigl(T((1),T(x),T(x^2),T(x^3)\bigr)\,\boldsymbol{c}\\&=(1,x,x^2)\,A\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

と書けるから,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(T)&=\{\,f\in\mathbb{R}[x]_3\mid T(f)=o(x)\,\}\\&=\{\,(1,x,x^2,x^3)\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}[x]_3\mid(1,x,x^2)\,A\boldsymbol{c}=o(x),\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^4\,\}\\&=\{\,(1,x,x^2,x^3)\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}[x]_3\mid A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^4\,\}\quad(\because\ 6.3.13)\\&=\left\{(1,x,x^2,x^3)\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}[x]_3\ \middle|\ \boldsymbol{c}=c\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix},\ c\in\mathbb{R}\right\}\quad(\because\ \text{連立 1 次方程式の解法})\\&=\left\{c(1,x,x^2,x^3)\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\,(3+2x+x^2)\end{aligned}$$

となる. ゆゑに $\mathrm{Ker}(T)$ の基として $\{3+2x+x^2\}$ がとれて, $\mathrm{null}(T)=1$ である.
(ii) 6.4.4 の方法により $\{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_4\}$ は 1 次独立であり, $\boldsymbol{a}_3$ はこれらの 1 次結合で書かれる. ゆゑに 6.4.10 と同様に考へて $(1,x,x^2)A$ に並んだ多項式の中で,

$$(1,x,x^2)\boldsymbol{a}_1=1+x,\quad(1,x,x^2)\boldsymbol{a}_2=-2+x,\quad(1,x,x^2)\boldsymbol{a}_4=1+x-9x^2$$

からなる組は 1 次独立で, 残りの $(1,x,x^2)\boldsymbol{a}_3$ はこれら 3 つの多項式の 1 次結合で表される. 一方 $\mathrm{Im}(T)=\langle T(1),T(x),T(x^2),T(x^3)\rangle$ ゆゑ

$$\mathrm{Im}(T)=\text{“}(1,x,x^2)\,A\ \text{に並んだ多項式で生成される空間”}$$

であつて, 6.4.3 と 6.5.12 により, 上記の $\{1+x,-2+x,1+x-9x^2\}$ は $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基であり, $\mathrm{rank}(T)=3$ である. □

定義 7.3.7 （基の変換行列）U を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする．U の 2 組の基

$$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \quad \{\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n\}$$

を決めておく．これらの間の関係は, ある正方行列 $P \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ により

$$(\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\, P$$

と書ける．このとき P を基の変換行列と呼ぶ．6.4.9 から $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ である．

$\mathbf{K}$ 上の vector 空間内の $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ と $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, \ell, \mathbf{K})$ について

$$\big((\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A\big)B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)\big(AB\big)$$

であることは, 6.3.10 で示した．以後はこの式の両辺を $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n)AB$ で表す．

例題 7.3.8 2 つの線形写像 $S : U \to V$ と $T : V \to W$ 及び U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_\ell\}$, V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$, W の基 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ が与へられたとせよ．これらの基に関して S の表現行列を A とし, T の表現行列を B とする．このとき, TS のこれらの基に関する表現行列は BA である [20]．これを示せ．

解 $A = [\, a_{ij}\,]$ とおくと

$$\begin{aligned}
\big(TS(\boldsymbol{u}_1), \cdots, TS(\boldsymbol{u}_\ell)\big) &= \left(T\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\boldsymbol{v}_i\Big), \cdots, T\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i\ell}\boldsymbol{v}_i\Big)\right) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}T(\boldsymbol{v}_i), \cdots, \sum_{i=1}^{m} a_{i\ell}T(\boldsymbol{v}_i)\Big) \\
&= \big(T(\boldsymbol{v}_1), \cdots, T(\boldsymbol{v}_m)\big)\, A \\
&= \big((\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n)B\big)A \\
&= (\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_n)BA
\end{aligned}$$

となるからである． □

命題 7.3.9 U と V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とし,

U の 2 組の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n\}$,

V の 2 組の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$, $\{\boldsymbol{v'}_1, \cdots, \boldsymbol{v'}_m\}$

を決めておく．これらの基の変換行列を P および Q とせよ．即ち

$$(\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\, P, \quad (\boldsymbol{v'}_1, \cdots, \boldsymbol{v'}_m) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\, Q.$$

さらに T を vector 空間 U から同 V への線形写像として,

T の $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する表現行列を A,

T の $\{\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n\}$, $\{\boldsymbol{v'}_1, \cdots, \boldsymbol{v'}_m\}$ に関する表現行列を B

とせよ．このとき

$$B = Q^{-1}AP.$$

[20] AB ではない．

証明 等式 $\big(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)\big) = (\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m)\,B$ に Q の式を代入すれば

$$(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)) = (\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m)\,B = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,QB.$$

また $P = [p_{ij}]$ と書けば

$$(\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)P = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\boldsymbol{u}_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} p_{in}\boldsymbol{u}_i\Big)$$

であるから T の線形性によつて

$$\begin{aligned}(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)) &= \Big(T\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\boldsymbol{u}_i\Big), \cdots, T\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{in}\boldsymbol{u}_i\Big)\Big) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\,T(\boldsymbol{u}_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} p_{in}\,T(\boldsymbol{u}_i)\Big) = (T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n))P\end{aligned}$$

となる．これに A の定義の式 $(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,A$ を代入すれば

$$(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,AP.$$

ここで $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次独立性と 6.3.14 により $QB = AP$ を得るが, Q は正則であるから所望の式を得る． □

例題 7.3.10 $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ とし，線形写像 $T\colon U \to V$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in U)$ で定める．このとき

$$U \text{ の基 } \left\{ \boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$V \text{ の基 } \left\{ \boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ．

解 U の標準基を $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ とし, V の標準基を $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\}$ とする．$T(\boldsymbol{e}_1)$, $T(\boldsymbol{e}_2)$, $T(\boldsymbol{e}_3)$ は A の列 vectors に他ならないから,

$$\big(T(\boldsymbol{e}_1), T(\boldsymbol{e}_2), T(\boldsymbol{e}_3)\big) = \big(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\big)\,A$$

となり, これらの標準基に関する T の表現行列は A そのものである．一方

$$(\,\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3\,) = (\,\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\,)\,P, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\,\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\,) = \big(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2\big)\,Q, \qquad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

よつて

$$B = Q^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

を得る． □

例題 7.3.11 $T(f(x)) = f''(x)(1-x) + 4f(1+x) - f(1-2x) : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_1$ について答へよ.

(1) $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ のとき, $T(f) \in \mathbb{R}[x]_1$ であることを確かめよ.

(2) T が（$\mathbb{R}$ 上の）線形写像であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}[x]_3$ の基を $\{1, x, x^2\}$ とし, $\mathbb{R}[x]_2$ の基を $\{1, x\}$ として固定する. T のこれらの基に関する表現行列 A を求めよ.

(4) $\mathbb{R}[x]_3$ の基を $\{1-x, x-x^2, x^2\}$ とし, $\mathbb{R}[x]_2$ の基を $\{1-x, 1+x\}$ として固定する. T のこれらの基に関する表現行列 B を求めよ.

解 (1) 計算により

$$T(1) = 3, \quad T(x) = 3 + 6x, \quad T(x^2) = 5 + 10x \in \mathbb{R}[x]_1$$

であるから, 任意の $f(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ について $T(f) \in \mathbb{R}[x]_1$ である.

(2) 任意の $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]_2$ と定数 $c \in \mathbb{R}$ について, 7.1.7 の様にして,

$$T(cf(x)) = cT(f(x)), \quad T(f(x) + g(x)) = T(f(x)) + T(g(x))$$

が成り立つことを示せばよい.

(3) $T(1) = 3$, $T(x) = 3 + 6x$, $T(x^2) = 5 + 10x$ であるから,

$$(T(1), T(x), T(x^2)) = (3, 3 + 6x, 5 + 10x) = (1, x)\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

よつて, 求める表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

である.

(4) $\mathbb{R}[x]_2$ において

$$(1-x, x-x^2, x^2) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; (= (1, x, x^2)P \text{ とおく})$$

であり, $\mathbb{R}[x]_2$ において

$$(1-x, 1+x) = (1, x)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; (= (1, x)Q \text{ とおく})$$

であるから,

$$B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -\frac{5}{2} \\ -3 & -3 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

となる. □

演 習 問 題 7.3

7.3.12 ここでは $\mathbb{R}[x]_3$ の基を $\{1, x, x^2, x^3\}$ とし, $\mathbb{R}[x]_2$ の基を $\{1, x, x^2\}$ として固定する. 次の各線形写像 T について, 次の (i), (ii), (iii) のそれぞれを求めよ.

(i) これらの基に関する T の表現行列を求めよ.

(ii) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$.

(iii) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

(1) $T(f(x)) = f''(x)(1-x) - f'(2-x) : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$.

(2) $T(f(x)) = f''(x)x^2 - 2f'(x-1)x : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$.

7.3.13 次の線形写像 T について, 与へられた基に関する 表現行列を求めよ.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^3 \text{ の基 } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbb{R}^2 \text{ の基 } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) $T(f(x)) = xf'(x) + (x-1)f(x-1) : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_2$

$\mathbb{R}[x]_1$ の基 $\{1+x,\ 1-x\}$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{x,\ 1+x,\ x+x^2\}$

(3) $T(f(x)) = 2f'(1)(x-1) + 3f(1)x(x+4) : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_2$

$\mathbb{R}[x]_1$ の基 $\{1+2x,\ 1-2x\}$, $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{x,\ x^2,\ 1+x^2\}$

(4) $T(f(x)) = (x-1)^2 f''(x) + 2f'(1)(x-1) + 3f(1)x(x+4) : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$

双方の $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{-1+x,\ \ -1+x^2,\ \ -2+12x+3x^2\}$

7.4　線形変換とその表現行列

Vector 空間 V から V 自身への線形写像を <u>線形変換</u> と呼ぶ．このときは, 定義域としての V の基と値域としての V の基は同じものを取るのが自然であるから, V の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を定めたとき, この基に関する V の線形変換 T の表現行列 A を

$$(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A$$

によつて定義する．

定義 7.4.1　多項式 $f(t) = \sum_j a_j t^j \in \mathbf{K}[t]$ に対して次の様な記法を用意する．

(1) $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について, $f(A) = \sum_j a_j A^j$ と記す．もちろん $A^0 = I$ である．

(2) V を $\mathbf{K}$ 上の有限次元の vector 空間とする．$\mathbf{K}$ 上の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ について, $f(T) = \sum_j a_j T^j$ と記す． ここで, $T^2 = TT$, $T^3 = T^2T = TT^2$, $\cdots$ や scalar 倍, 和は 7.1.19, 7.1.21 で定めた記法で, $T^0 = I_V$（7.2.2 参照）である．

命題 7.4.2　V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 とし, V の基を固定する．線形変換 $T : V \to V$ の, この基に関する表現行列を A とする．このとき, $f(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対し, $f(T)$ も線形変換であることを示し, これの表現行列は $f(A)$ であることを示せ．

証明　前半は 7.1.20 と 7.1.21 よりわかる．後半を示す．7.3.8 を帰納的に使へば,

$$\big(T^j(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T^j(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A^j \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

であるから, $f(t) = \sum_j c_j t^j$ とおくとき, 7.3.1 の直前で述べた記法によつて,

$$\begin{aligned}
\big(f(T)(\boldsymbol{u}_1), \cdots, f(T)(\boldsymbol{u}_n)\big) &= \left(\Big(\sum_j c_j T^j\Big)(\boldsymbol{u}_1), \cdots, \Big(\sum_j c_j T^j\Big)(\boldsymbol{u}_n)\right) \\
&= \left(\sum_j c_j \big(T^j(\boldsymbol{u}_1)\big), \cdots, \sum_j c_j \big(T^j(\boldsymbol{u}_n)\big)\right) = \sum_j c_j \left(T^j(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T^j(\boldsymbol{u}_n)\right) \\
&= \sum_j c_j\,(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A^j = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\Big(\sum_j c_j\,A^j\Big)
\end{aligned}$$

となる．　□

7.3.9 より次を得る．

命題 7.4.3　T を V の線形変換とし, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の 2 組の基とする．これらの基の間の関係を

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,P$$

とする．もちろん $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ である．さらに T の $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する表現行列を A, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列を B とする．このとき

$$B = P^{-1}AP.$$

例題 7.4.4 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ とし, $\mathbb{R}^2$ の線形変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める. V の基

$$\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ.

解 $V = \mathbb{R}^2$ の標準基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ の関係は $(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)P$, $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ である. よつて

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 17 & -6 \end{bmatrix}$$

である. □

例題 7.4.5 $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とし, $\mathbb{R}^2$ の線形変換 T を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定める. V の基

$$\left\{ \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する T の表現行列 B を求めよ.

解 $V = \mathbb{R}^2$ の標準基 $\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2\}$ の関係は $(\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)P$, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ である. よつて

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

この様に表現行列が対角行列になる基は重要であり, 次節以降で詳しく論じられる. □

例題 7.4.6 次の vector 空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 T について以下の問に答へよ:

$$T(f) = \big(f''(x) + f(0)\big)x^2 + f'(x)x + f(1).$$

(1) T が実際に V の線形変換であることを示せ.
(2) V の基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.
(3) V の基 $\{-1-2x+x^2,\ 1+x,\ x^2\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ.

解 (1) は省略する. (2) この基の各元を T で写せば

$$T(1) = 1 + x^2, \quad T(x) = 1 + x, \quad T(x^2) = 1 + 4x^2.$$

よつて

$$\big(T(1),\ T(x),\ T(x^2)\big) = (1,\ x,\ x^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(3) 基 $\{-1-2x+x^2,\ 1+x,\ x^2\}$ を基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ で表せば

$$(-1-2x+x^2,\ 1+x,\ x^2) = (1,\ x,\ x^2)P, \qquad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

よつて, 求める行列は (P^{-1} を計算して)

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

である. □

注意 7.4.7 7.3.9 や 7.4.3 の記号において, 与へられた行列 $P \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ に対し, 基 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ に関して P を表現行列とする線形変換が存在する. 即ち,

$$\big(F(\boldsymbol{u}_1), \cdots, F(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)P$$

を満たす線形変換 $F : V \to V$ が唯一つ存在することは容易にわかる. つまり, 基の取り替へも一つの線形変換に他ならない.

定義 7.4.8 一般に, 線形空間 V, 部分空間 $W \subset V$, 線形変換 $T : V \to V$ について, $T(W) \subset W$ であることを W は T に関して<u>不変</u>であるといはれる.

演 習 問 題 7.4

7.4.9 次の線形変換 T について, 与へられた基に関する 表現行列を求めよ.

(1) $T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 9 & -7 & 9 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3$ の基 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.

(2) $T(f(x)) = 2f'(x)(x+1) - f(-1)x^2 - f(2) : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,
$\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1,\ x,\ x^2\}$.

(3) $T(f(x)) = 2f'(x)(x+1) - f(-1)x^2 - f(2) : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,
$\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\}$.

(4) $T(f(x)) = 2f'(x)(x+1) - f(-1)x^2 - f(2) : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$,
$\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{-2+4x+3x^2,\ -2-4x+x^2,\ 4-x+x^2\}$.

7.4.10 $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の基 $\{1, \sqrt{2}\}$ に関する線形変換
$T : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ x \mapsto (1+\sqrt{2})x$
(これは 7.1.6 (2) に挙げた写像) の表現行列を求めよ.

7.4.11 3 つの多項式 $f(t), g(t), h(t) \in \mathbf{K}[t]$ について, $f(t)\,g(t) = h(t)$ であるとする. このとき任意の正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ ($n \in \mathbb{N}$ は任意) について $f(A)\,g(A) = h(A)$ であることを証明せよ.

7.4.12 V を $\mathbf{K}$ 上の n 次元 vector 空間とせよ. T を V の線形変換とし $T^n = O$, $T^{n-1} \neq O$ とする. このとき 7.1.11 により, $\boldsymbol{u} \in V$ が存在して $T^{n-1}(\boldsymbol{u}) \neq \mathbf{0}$ である. その様な $\boldsymbol{u}$ について,

$$\{T^{n-1}(\boldsymbol{u}),\ \cdots,\ T(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{u}\}$$

が V の基であることを示し, この基に関する T の表現行列を求めよ.

7.5 固有値, 固有 vectors, 固有空間, 固有多項式

一般の線形変換に関して, 固有値と固有 vectors などについて説明する.

定義 7.5.1 T は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の線形変換とする.

$$T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} \quad (\ \boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0},\ \ \lambda \in \mathbf{K}\ )$$

を満たす λ を T の固有値, $\boldsymbol{u}$ を固有値 λ に属する T の固有 vector といふ.
Vector 空間 V の線形変換 T の固有値 λ に対し

$$W(\lambda, T) = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} \,\}$$

とおき, T の固有値 λ に属する固有空間といふ. $W(\lambda,T)$ 内の $\mathbf{0}$ でない vector が λ に属する T の固有 vectors に他ならない.

問 7.5.2 $W(\lambda,T)$ は V の部分空間であることを示せ.
（Hint : 部分空間の条件 6.2.5 を確かめよ. ）

ここで, 行列（線形変換の, ではなく）の固有値, 固有 vectors, 固有空間を定義する.

定義 7.5.3 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ に対し, $T_A : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n,\ \boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}$ の固有値, 即ち,

$$A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \quad (\exists \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0},\ \boldsymbol{u} \in \mathbf{K}^n)$$

なる $\lambda \in \mathbf{K}$ を A の固有値と呼ぶ. このとき, $\boldsymbol{u}\,(\neq \mathbf{0})$ を λ に属する A の固有 vector といふ. T_A の固有値 λ について $W(\lambda, T_A)$ を $W(\lambda, A)$ とも書いて A の λ に属する固有空間と称する. よつて

$$W(\lambda, T_A) = W(\lambda, A) = \{\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{K}^n \mid A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \,\}.$$

定義 7.5.4 正方行列 A に対して, 多項式

$$\varphi_A(t) = |tI - A|$$

を A の固有多項式とよぶ. t の方程式 $\varphi_A(t) = 0$ を A の固有方程式とよぶ.

定理 7.5.5 λ が A の固有値 $\iff \varphi_A(\lambda) = 0$

証明 $\lambda \in \mathbf{K}$ と vector $\boldsymbol{u}$ について, $T_A(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ が成り立つことと, $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ は同値であり, それは $(\lambda I - A)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ が成り立つことに他ならない. 今 $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ を加味すると, 5.5.1 の (4) $\iff$ (5) により, それは $\lambda I - A$ が正則でないことを意味する. さらに, それは 3.5.9 により, $|\lambda I - A| = 0$ つまり $\varphi_A(\lambda) = 0$ と同値である. □

命題 7.5.6 $\lambda \in \mathbf{K}$ が正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ の固有値であるとき, 属する固有 vector が $\mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{K})$ の中に必ず存在する. 特に

$$\dim_{\mathbf{K}} W(\lambda, A) \geqq 1$$

である.

証明 λ に属する固有 vector $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解に他ならないが, 連立 1 次方程式の解法 (5.4.8 など) によればこの方程式の解はすべて $\mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{K})$ に含まれてゐる. 仮定と 7.5.5 から $|\lambda I - A| = 0$ であるから, 5.5.1 と 3.5.9 によつて, 自明でない解が必ず存在する. その様な解が求める固有 vector に他ならない. □

例 7.5.7 $A = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi_A(t) = |\,tI - A\,| = \begin{vmatrix} t-11 & 16 \\ -8 & t+13 \end{vmatrix} &= (t-11)(t+13) + 16 \cdot 8 \\ &= t^2 + 2t - 15 = (t-3)(t+5) \end{aligned}$$

であるから, 固有値は 3 と -5 である. 簡単な計算で, それぞれに対応する固有空間

$$W(3, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(-5, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

が得られる.

例題 7.5.8 次の行列 A に対する線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ について, 固有多項式, すべての固有値, および, それらに対応する固有空間を求めよ:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -16 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 固有多項式は

$$\varphi_A(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3 = (t-1)(t+1)(t-3)$$

で固有値は ± 1, 3. 連立 1 次方程式 $(I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $(-I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $(3I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を解いて,

$$W(1, T_A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W(-1, T_A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W(3, T_A) = \mathbb{R} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る. □

演習問題 7.5

7.5.9 次の行列 A について, 固有多項式 $\varphi_A(t)$, 固有値, 各固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. (2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. (3) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -11 & -8 & 7 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

(4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (5) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (6) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 9 & -7 & 9 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$.

7.5.10 正方行列 A に対して, 次を示せ.
(1) $\varphi_A(0) = |-A|$.
(2) A が正則であるためには A の固有値に 0 が含まれないことが必要十分である.

7.5.11 正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{C})$ の固有値の積（重根は重複度に応じて含める）は行列式 $|A|$ と一致することを示せ.

7.5.12 A, $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について, $\varphi_{AB}(t) = \varphi_{BA}(t)$ を示せ.
（Hint：まず B が正則な場合に示せ．それを使つて B が正則でない場合を示せ．）

7.5.13 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について $\varphi_{{}^tA}(t) = \varphi_A(t)$ であることを示せ.

7.5.14 $A \in \mathrm{Mat}(m, \mathbf{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$, $D \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ について, $C = \begin{bmatrix} A & D \\ O & B \end{bmatrix}$ であれば, $\varphi_C(t) = \varphi_A(t)\varphi_B(t)$ であることを示せ.

7.5.15 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ について $\varphi_{A^{-1}}(t) = |A|^{-1}(-t)^n \varphi_A(1/t)$ であることを示せ.

7.5.16 $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする．このとき, M^{-1} の固有値は

$$\alpha_1{}^{-1}, \ \cdots, \ \alpha_n{}^{-1}$$

であることを示せ．（Hint：7.5.15 を利用．）

7.5.17 $n \geqq 1$ を整数とする．任意の $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ について, A は少くとも 1 つの固有 vector（$\in \mathrm{Mat}(n, 1, \mathbb{C})$）を持つことを示せ．（Hint: 代数学の基本定理 1.4.2 と 7.5.6 を利用．）

7.6　一般の場合の固有値, 固有 vector, 固有空間, 固有多項式

線形変換について固有多項式を定義し, 固有値, 固有 vectors, 固有空間を求める方法を述べる.

定義 7.6.1　T を n 次元 vector 空間 V の線形変換とする. V の 1 組の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ をとる. この基に関する T の表現行列を A とするとき

$$\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$$

と定義して, これを T の固有多項式とよぶ. t の方程式 $\varphi_T(t) = 0$ を T の固有方程式とよぶ.

$\varphi_T(t)$ は基の選び方に依らずに定まる. 実際, $B = P^{-1}AP$ のとき

$$\varphi_B(t) = |tI - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tI - A)P| = |P^{-1}||tI - A||P| = |tI - A| = \varphi_A(t)$$

であるから.

定理 7.6.2　T を vector 空間 V の線形変換とせよ. λ が T の固有値であるためには $\varphi_T(\lambda) = 0$ となることが必要十分である. よつて 7.6.1 の記号で T の固有値の全体と A の固有値の全体は一致する.

証明　$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の 1 組の基とし, この基に関する T の表現行列を A とする.
（必要性）λ を T の固有値で $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{u} \in W(\lambda, T)$ とせよ.

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) &= T(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = c_1 T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + c_n T(\boldsymbol{u}_n) \\ &= (T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) A\boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

一方, $\boldsymbol{u}$ は T の λ に属する固有 vector だから

$$T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u} = \lambda(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\lambda\boldsymbol{c}.$$

6.3.14 により $A\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{c}$ となる. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. よつて $\boldsymbol{c}$ は A の固有値 λ に属する固有 vector である. 7.6.1 と 7.5.5 より $\varphi_T(\lambda) = \varphi_A(\lambda) = 0$ である.
（十分性）$\varphi_T(\lambda) = 0$ であるから $\varphi_A(\lambda) = 0$. 従つて連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ は自明でない解を持つ. それを $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0})$ とする. 即ち $A\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{c}$. ここで

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{c}$$

なる $\boldsymbol{u} \in V$ を取れば $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であつて,

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) &= T(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = (T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n))\boldsymbol{c} \\ &= ((\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A)\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) A\boldsymbol{c} \quad (\because\ 6.3.10) \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\lambda\boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

であるから $\boldsymbol{u}$ は T の λ を固有値にもつ固有 vector である.　□

問 7.6.3 次のことを確かめよ. 上の証明の記号のもとで, 写像

$$W(\lambda, A) \to W(\lambda, T), \qquad \boldsymbol{c} \mapsto \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{c}$$

は vector 空間としての同型（7.2.2 参照）である. 特に, $\dim W(\lambda, T) = \dim W(\lambda, A)$.

問 7.6.4 V が $\mathbb{C}$ 上の 1 次元以上の vector 空間で, T が V の $\mathbb{C}$ 上の線形変換であるとき, T は少くとも 1 つの固有 vector を持つことを示せ. （Hint : T の表現行列について 7.5.17 を利用する. ）

例題 7.6.5 （[M1], p.103 より）Vector 空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の線形変換 $T:\ f(x) \mapsto f(1+2x)$ について, 以下の (i), (ii), (iii) を求めよ.
(i) 固有多項式 $\varphi_T(t)$, (ii) T の固有値, (iii) T の各固有値 λ に対して $W(\lambda, T)$.

解 $\mathbb{R}[x]_2$ の基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ について考察する.
$T(1) = 1,\ \ T(x) = 1 + 2x,\ \ T(x^2) = 1 + 4x + 4x^2$ であるから

$$\big(T(1), T(x), T(x^2)\big) = (1, x, x^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

となり, 表現行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. よつて

(i) $\varphi_T(t) = \varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t-2 & -4 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-4)$ で,

(ii) 固有値は 1, 2, 4 の 3 つ.

(iii) <u>固有値 1 について</u>.

$I-A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ の簡約化は $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ゆゑ $(I-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間は $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
ここで $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in W(1, T)$ であることと $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ が $(I-A)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ を満たすことは同値だから, $W(1, T) = \mathbb{R}\,1$.

<u>固有値 2 について</u>.

$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ の簡約化は $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり, $(2I-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間は $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 上と同様の考察により, $W(2, T) = \mathbb{R}\,(1+x)$.

<u>固有値 4 について</u>.

$4I - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の簡約化は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり, $(4I-A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間は $\mathbb{R}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. 上と同様の考察により, $W(4, T) = \mathbb{R}\,(1 + 2x + x^2)$. □

演 習 問 題 7.6

7.6.6 次の (1), (2), (3) の $T:\mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ について, (i), (ii), (iii) を求めよ:
(i) 固有多項式 $\varphi_T(t)$,
(ii) T の固有値,
(iii) T の各固有値 λ に対して $W(\lambda,T)$.

(1) $T(f(x)) = f(1-x)$ （[M1] から）.
(2) $T(f(x)) = f(2x) + f'(x)$ （[M1] から）.
(3) $T(f(x)) = 2f'(x)(x+1) - f(-1)x^2 - f(2)$.

7.6.7 Vector 空間 V の線形変換 T の固有値 λ に対し,

$$\mathrm{Ker}\,(T-\lambda I) = W(\lambda,T)$$

であることを示せ.

7.6.8 Vector 空間 V の線形変換 T が 2 つ以上の固有値をもつとする. λ と μ をその固有値とし $\lambda \neq \mu$ とする. また $W = W(\mu,T)$ とおく. このとき

$$(T-\lambda I)(W) = W$$

であることを示せ. 但し $(T-\lambda I)(W)$ は $\mathrm{Im}\,(T-\lambda I)|_W$ の意味である.

7.7 行列の対角化, 線形変換の対角化

線形変換を捉へるための重要な手法である表現行列の対角化について説明する.

定義 7.7.1 2 つの n 次正方行列 A, B について, 正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, B は A と 相似であるといはれ, $A \sim B$ と記す.

問 7.7.2 上記の相似は 同値関係[21] であること, 即ち, 次を示せ.
任意の $A, B, C \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について次の (1), (2), (3) が成り立つ:
(1) $A \sim A$; (2) $A \sim B \implies B \sim A$; (3) $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

命題 7.7.3 Vector 空間 V 上の線形変換の表現行列は基を取り替へると, それに相似な行列が表現行列となる. また, 行列 A を表現行列とする線形変換 T と, A に相似な行列 B があるとき, V の基を適当に取り換へれば B が表現行列となる.

証明 前半は 7.4.3 に他ならない. 後半. 仮定から正則行列 P によつて $B = P^{-1}AP$ と書けてゐる. このとき, P を変換行列として基を取り換へれば, 再び 7.4.3 によつて, 新たな表現行列が B となる. □

定義 7.7.4 (1) 与へられた正方行列 A に対し, 正則行列 P を見付けて $B = P^{-1}AP$ が対角行列になる様にすることを A の 対角化 と称する. より精密に, $\mathbf{K}$ を体として, $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ のときに $B, P \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ と取れるとき, A は $\mathbf{K}$ 上対角化されるといふ. あるいは A は $\mathbf{K}$ 上 対角化可能 であるともいはれる.
(2) 線形変換 T の表現行列が対角化可能であるとき T は 対角化可能 であるといはれる. 対角化可能のとき, 対角行列である表現行列と, 対応する基を求めることを 対角化 といふ.

注意 7.7.5 (1) 対角化する意義は, 7.4.3 と 7.7.4 から, 対角化可能な線形変換を, 基をうまく取ることで, その基の各 vector の方向に定数倍する線形写像と理解することにある. 例へば $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ に対して $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を取ると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

を得る. このことは, T_A を把握する際に, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を基に取つた場合はわかりづらいが, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を基に取れば, T_A は $\boldsymbol{u}_1$ の方向には 3 倍, $\boldsymbol{u}_2$ の方向には 5 倍する線形写像であると把握できることを意味してゐる.
(2) 対角化できない正方行列 A も存在する. それは, 基礎の体 $\mathbf{K}$ が小さすぎて, 固有値がその体に属さないことが原因である場合と, 体 $\mathbf{K}$ を拡大しても, 行列自身が原因で対角化できない場合とがある. 基礎の体が $\mathbb{C}$ の場合は, 前者は起り得ない. 後者の場合は, 対角行列に近い種々の “ 標準形 ” が考案されてゐる. 中でもよく知られたものが Jordan 標準形である. これについては第 11 章で学ぶ.

[21] 「数学序論」で学んだ概念.

命題 7.7.6　T を V の線形変換, T の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とする.

(1) r 個の vectors $\boldsymbol{w}_i \in W(\lambda_i, T)$ $(i = 1, \cdots, r)$ について $\mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r$ ならば, すべての i について $\boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}$.

(2) 次の不等式が成り立つ: $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbf{K}} W(\lambda_i, T) \leqq \dim_{\mathbf{K}} V$.

証明　(1), (2) を同時に示す. 以下 $\dim_{\mathbf{K}}$ の $\mathbf{K}$ を省く. $\dim V = n$, $\dim W(\lambda_i, T) = n_i$ とおく. 各 i $(1 \leqq i \leqq r)$ に対し $W(\lambda_i, T)$ の 1 組の基 $\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ を取り

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}\boldsymbol{u}_{ij} = \mathbf{0} \qquad (c_{ij} \in \mathbb{R}) \tag{7.7.7}$$

とおく. これは $\boldsymbol{u}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}\boldsymbol{u}_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0} \tag{7.7.8}$$

ということである. $T(\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$ であるから (7.7.8) を T で写すと

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}.$$

これを次々に T で写すことで

$$\sum_{i=1}^{r} {\lambda_i}^k \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0} \quad (0 \leqq k \leqq r-1)$$

を得る. 即ち

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r)P = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & {\lambda_1}^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & {\lambda_2}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & {\lambda_r}^{r-1} \end{bmatrix}$$

である. 3.6.1 により $\det(P) \neq 0$ だから, P は正則行列で

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0})P^{-1} = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}).$$

これで主張 (1) が示された. このとき,

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}\boldsymbol{u}_{ij} = \mathbf{0} \qquad (1 \leqq i \leqq r).$$

$\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ は 1 次独立だから

$$c_{i1} = c_{i2} = \cdots = c_{in_i} = 0$$

である. よつて $n_1 + \cdots + n_r$ 個の vectors

$$\{\, \boldsymbol{u}_{ij} \,|\, 1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq n_i \,\}$$

は 1 次独立である. この個数は V の vectors の 1 次独立な最大個数, つまり $n = \dim V$ を越えないから所望の不等式が成り立つ. □

次の定理はこの講義を通じて最も重要なものの 1 つである.

> **定理 7.7.9** A を n 次正方行列とし, A の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とする. A が $\mathbf{K}$ 上で対角化されるためには
> $$\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbf{K}} W(\lambda_i, A) = n$$
> であることが必要十分条件である.

証明 （必要性）A が対角化されるから, 正則行列 $P = [\,\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n\,]$ が存在して

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \quad (\text{対角行列})$$

となる. このとき $AP = PB$ ゆゑ $A\boldsymbol{p}_j = b_j\boldsymbol{p}_j$ $(1 \leqq j \leqq n)$ である. つまり b_j は固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ のどれかに一致し, $\boldsymbol{p}_j (\neq \mathbf{0})$ はその固有値に対応する固有 vector である. つまり, 各 i について $b_j = \lambda_i$ ならば $\boldsymbol{p}_j \in W(\lambda_i, A)$ である. さらに 6.4.6 により $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立なので

$$\dim(W(\lambda_i, A)) \geqq \#\{\,\boldsymbol{p}_j \,|\, b_j = \lambda_i\,\} = \text{“}\, b_j = \lambda_i \text{ となる } j \text{ の個数”}.$$

この式を $i = 1, \cdots, r$ について加へれば,

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i, A)) \geqq \sum_{i=1}^{r} \text{“}\, b_j = \lambda_i \text{ となる } j \text{ の個数”} = n$$

となる. これと 7.7.6 と合せれば所望の等式が得られる.

（十分性）各 $W(\lambda_i, A)$ の基 $\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ を選んでおく. 7.7.6 の証明から, vectors の組 $\{\,\boldsymbol{u}_{in_i} \,|\, 1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq n_i\,\}$ は 1 次独立である. 一方

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda_i, A)) = n$$

であるから, 上の組は全空間 $\mathbf{K}^n$ の基である. これらを並べて

$$P = [\,\boldsymbol{u}_{11} \cdots \boldsymbol{u}_{1n_1}\, \boldsymbol{u}_{21} \cdots , \boldsymbol{u}_{2n_2} \cdots \boldsymbol{u}_{r1} \cdots \boldsymbol{u}_{rn_r}\,]$$

とおくと P は 6.4.6 から正則行列であり, $A\boldsymbol{u}_{in_i} = \lambda_i \boldsymbol{u}_{in_i}$ を満たすので

$$AP = PB, \qquad B = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_r \ \ddots \ \lambda_r}^{n_r} \end{bmatrix} \quad (\text{対角行列}).$$

即ち $B = P^{-1}AP$ と対角化された. □

注意 7.7.10 上記 7.7.9 の記号で, 方程式 $\varphi_A(t) = 0$ における λ_i の重複度が m_i であれば, $\dim W(\lambda_i, A) \leqq m_i$ である. このことの完全な証明は 11.1.6 (3) で述べられる.

7.7.9 と 7.6.3 から容易に線形変換についての次の定理が得られる.

定理 7.7.11 T を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の線形変換とし, T の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とする. V の基を任意にとる. それに関する T が $\mathbf{K}$ 上対角化されるためには

$$\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbf{K}}(W(\lambda_i, T)) = \dim_{\mathbf{K}}(V)$$

であることが必要十分条件である.

7.7.9 の証明から, 6.2.11 の記号を使つて 7.7.9 や 7.7.11 の主張は次の様に述べられる.

系 7.7.12 7.7.9 の記号の元で, A が対角化できるためには, 6.2.11 の記号で,

$$\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i, A) = \mathbf{K}^n \quad \left(\text{これは後の 10.1.1 の記号で } \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i, A) = \mathbf{K}^n \text{ と書かれる}\right)$$

であることが必要十分. 同様に, 7.7.11 の記号の下で, T が対角化できるためには

$$\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i, T) = V \quad \left(\text{これは後の 10.1.1 の記号で } \bigoplus_{i=1}^{r} W(\lambda_i, T) = V \text{ と書かれる}\right)$$

であることが必要十分である.

7.7.9 の証明は, 与へられた正方行列の対角化の計算方法を与へてゐる.

例題 7.7.13 行列

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -16 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対し, 正則行列 P を見付けて $P^{-1}AP$ を対角行列とせよ.

解 まづ $\varphi_A(t) = (t-1)(t+1)(t-3)$ と計算される. そこで 7.5.5 に基づき

$$(I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad (-I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad (3I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

を, それぞれ解く. いま A は 7.5.8 のそれであつて

$$W(1, T_A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W(-1, T_A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W(3, T_A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

である. そこで, これらの空間を生成する vectors を並べて

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3]$$

とすれば

$$(A\boldsymbol{p}_1,\ A\boldsymbol{p}_2,\ A\boldsymbol{p}_3) = (\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

であるから

$$AP = P\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \quad \text{つまり} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

を得る. □

例題 7.7.14 行列

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 8 & -4\\ -2 & 5 & -2\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

に対し, 正則行列 P を見付けて $P^{-1}AP$ を対角行列とせよ.

解 固有多項式は $\varphi_A(t)=(t-1)^2(t-3)$ となる. そこで 7.5.5 に基づき

$$(I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0},\quad (3I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$

を, それぞれ解くことにより.

$$W(1,T_A)=\left\{c_1\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\, c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\},$$

$$W(3,T_A)=\left\{c\begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\middle|\, c\in\mathbb{R}\right\}.$$

これらの空間を生成する vectors を並べて

$$P=\begin{bmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

を得る. □

例 7.7.15 (対角化できない例) $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{R})$ の固有多項式は $\varphi_A(t)=(t-1)^2$ となり, 固有値は 1 のみで,

$$W(1,A)=\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.\quad \therefore\ \dim_{\mathbb{R}} W(1,A)=1<2=\dim\mathbb{R}^2.$$

ゆゑに A を対角化することはできない.

例題 7.7.16 線形変換 $T:\mathbb{R}[x]_2\to\mathbb{R}[x]_2$,

$$T(f(x))=f''(x)(x-1)(x+3)+f'(x)x-f(1)x^2$$

の固有値, それぞれの固有値に対する固有空間, 可能であれば T を対角化せよ.

解 基 $\{1, x\ x^2\}$ に関する表現行列を求める:

$$\begin{aligned}(T(1), T(x),\ T(x^2))&=(-x^2, x-x^2, 2(x-1)(x+3)+2x^2-x^2)\\ &=(-x^2, x-x^2, -6+4x+3x^2)\quad=(1, x, x^2)\,A,\qquad A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 0 & 1 & 4\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\end{aligned}$$

よつて

$$\varphi_T(t)=\varphi_A(t)=t^3-4t^2+t+6=(t-3)(t-2)(t+1).$$

よつて固有値は 3, 2, −1 である. それぞれの固有値に対応する方程式

$$(3I-A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0},\ (2I-A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0},\ (-I-A)\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$$

の解は, それぞれ,

$$c_1\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix},\ c_2\begin{bmatrix}-3\\4\\1\end{bmatrix},\ c_3\begin{bmatrix}6\\-2\\1\end{bmatrix}\quad (c_1,\ \ c_2,\ \ c_3\in\mathbb{R})$$

である. よつて, 各固有値に対応する固有空間はそれぞれ

$$W(3,T)=\mathbb{R}(-2+2x+x^2),\ W(2,T)=\mathbb{R}(-3+4x+x^2),\ W(-1,T)=\mathbb{R}(6-2x+x^2)$$

である (7.6.3 参照). これにより T は

$$\begin{aligned}&(\,T(-2+2x+x^2),\ T(-3+4x+x^2),\ T(6-2x+x^2)\,)\\ &\qquad=(\,-2+2x+x^2,\ -3+4x+x^2,\ 6-2x+x^2\,)\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

と対角化される. □

演 習 問 題 7.7

7.7.17 次の行列 A が $\mathbb{R}$ 上で対角化されるかを調べ, できる場合は A を対角化する行列 P を記し, 対角化 $B = P^{-1}AP$ を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ (3) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ (5) $A = \begin{bmatrix} -9 & -4 & 8 \\ 8 & 3 & -8 \\ -8 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ (6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

(7) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

7.7.18 次の線形変換 $T : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ について, 固有値とそれぞれの固有値に対する固有空間を求めよ. また, 対角化可能か否かを答へ, 可能の場合は対角化せよ.

(1) $T(f(x)) = 2f'(x)(x+1) - f(-1)x^2 - f(2)$.
(2) $T(f(x)) = f''(x) - 2f'(-1)(x+1) + 2f(-1)(x+1)^2$.

7.7.19 $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ について A^n を求めよ.

7.7.20 n 次正方行列 $A = [\,a_{ij}\,]$ について, その対角成分の和を A の跡 (trace) と呼び, $\mathrm{tr}(A)$ で表す. 即ち

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

A の固有多項式を $\varphi_A(t) = t^n + c_1t^{n-1} + \cdots + c_n$ と書くとき

$$\mathrm{tr}(A) = -c_1, \quad \det(A) = (-1)^n c_n$$

であることを示せ.

7.7.21 次の問に答へよ.

(1) $A \in \mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n,m,\mathbf{K})$ のとき, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ であることを示せ.
(2) 互ひに相似な 2 つの行列の跡は等しいこと, 即ち, 正方行列 A について

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

であることを示せ. （参考: 7.5.12 と比べよ. ）
(3) $A,\ B,\ C \in \mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})$ のとき, $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB)$ であることを示せ. また, $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$ は必ずしも成り立たないことを示せ.

7.7.22 T を V の線形変換とし, $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ は T の相異なる固有値とする（その全てでなくともよい）. 各固有空間 $W(\lambda_i, T)$ $(i = 1, \cdots, r)$ の基を選んで, $\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ と記す. このとき, これらの合併

$$\{\,\boldsymbol{u}_{ij} \mid 1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq n_i\,\}$$

は 1 次独立であることを示せ. （Hint: 7.7.6(1) を利用. ）

7.8 Cayley-Hamilton の定理

次に Cayley-Hamilton の定理[22] といふ名で知られる印象的な定理を述べる. 7.4.1 でも述べたが, 一般に多項式 $f(t) = \sum_j a_j t^j \in \mathbf{K}[t]$ と正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について, $f(A) = \sum_j a_j A^j$ と約束する. 但し $A^0 = I$ である.

定理 7.8.1（Cayley-Hamilton の定理）正方行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ について
$$\varphi_A(A) = O.$$

証明 $B(t) = tI - A$ とおき, これの余因子行列を $\widetilde{B}(t)$ とおくと, 3.5.7 により

$$B(t)\widetilde{B}(t) = \varphi_A(t)I \tag{7.8.2}$$

である. A の次数を n とする. $\widetilde{B}(t)$ の各成分は t の高々 $n-1$ 次の多項式である. よつて t の冪に関して整理すると
$$\widetilde{B}(t) = t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + tB_1 + B_0$$
と書ける. ここで B_k はどれも n 次正方行列である. (7.8.2) より

$$(tI - A)(t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + tB_1 + B_0) = \varphi_A(t)I \tag{7.8.3}$$

ここで形式的には t に A を代入して $\varphi_A(A) = O$ が示せさうであるが, 両辺は行列であつて, この代入の操作は正当なものではない. そこで, 以下の様にする. まづ,
$$\varphi_A(t) = t^n + c_1t^{n-1} + c_2t^{n-2} + \cdots + c_{n-1}t + c_n$$
とおく. 次に (7.8.3) の左辺を展開すると
$$t^nB_{n-1} + t^{n-1}(-AB_{n-1}+B_{n-2}) + t^{n-2}(-AB_{n-2}+B_{n-3}) + \cdots + t(-AB_1+B_0) + (-AB_0).$$
よつて (7.8.3) において両辺の t の係数を比較して
$$B_{n-1} = I,\quad -AB_{n-1} + B_{n-2} = c_1I,\quad -AB_{n-2} + B_{n-3} = c_2I,\quad \cdots,$$
$$-AB_1 + B_0 = c_{n-1}I,\quad -AB_0 = c_nI$$
である. 以上から
$$\begin{aligned}\varphi_A(A) &= A^n + c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + \cdots + c_{n-1}A + c_nI \\ &= A^nB_{n-1} + A^{n-1}(-AB_{n-1}+B_{n-2}) + A^{n-2}(-AB_{n-2}+B_{n-3}) + \cdots \\ &\qquad + A(-AB_1+B_0) + (-AB_0) \\ &= A^nB_{n-1} - A^nB_{n-1} + A^{n-1}B_{n-2} - A^{n-1}B_{n-2} + A^{n-2}B_{n-3} + \cdots \\ &\qquad - A^2B_1 + AB_0 - AB_0 = O\end{aligned}$$
となつて証明された. □

例 7.8.4 7.5.7 の $A = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$ に対して $\varphi_A(t) = |tI - A| = t^2 + 2t - 15$ である. これより 7.8.1（Cayley-Hamilton の定理）は
$$\varphi_A(A) = A^2 + 2A - 15I = O$$
と確認できる（実際に計算してみよ）.

---

[22] Arthur Cayley (1821-1895) England 生. William Rowan Hamilton (1805-1865) Irland 生.

演 習 問 題 7.8

7.8.5 次の行列 A と多項式 $f(t)$ について, $f(A)$ を計算せよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $f(t) = 3t^2 - t + 5$.　　(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $f(t) = t^2 - t - 1$.

7.8.6 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ と $g(t) = t^7 - 4t^4 - 3t$ について $g(A)$ を求めよ.

7.8.7 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 9 & -7 & 9 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ と $g(t) = t^5 - 2t^2 + 12t + 36$ について $g(A)$ を求めよ.
（7.4.9 を参照されたい.）

7.8.8 次の行列 A について A^{15} を求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -6 & 5 & 3 \\ 7 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

7.8.9 （線形変換に関する Cayley-Hamilton の定理）線形変換 $T : V \to V$ について $\varphi_T(T) = O$ となることを示せ.（Hint : 7.4.2 利用.）

第 8 章　内積空間

8.1　内積

以下では, 専ら実数体 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間のみ扱ひ, V は常に $\mathbb{R}$ 上の有限次元 vector 空間を表す.

定義 8.1.1　$V \times V$ から $\mathbb{R}$ への写像 $(\ ,\ )$ が次の 4 つの性質をすべて満たすとき, この写像を V における内積といふ. 但し $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ は任意の元である.

P1　$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$,

P2　$(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,

P3　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$,

P4　$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$.

また $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対する内積の値 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を単に $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積と称する. 内積の定義された vector 空間を単に内積空間と称する.

以下では, 原則として V は常に内積 $(\ ,\ )$ が定義された内積空間を表すものとする.

問 8.1.2　$(\ ,\ )$ を内積とする内積空間 V について,

P5　任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = 0$,

P6　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$,

P7　$(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

が成り立つことを示せ.

例 8.1.3　$\mathbb{R}^n$ の vectors

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

について

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

と定めれば, これは 8.1.1 の 4 条件を満たす. これを $\mathbb{R}^n$ の標準内積と呼ぶ.

以後, 特に断らない限りは vector 空間 $\mathbb{R}^n$ は標準内積による内積空間とする.

問 8.1.4　$\mathbb{R}[x]_n$ における積分

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

は内積を与へることを確かめよ.

定義 8.1.5 $\boldsymbol{u} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq 0$ であるから
$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$
なる実数が定まる. これを $\boldsymbol{u}$ の norm, あるいは長さといふ.

命題 8.1.6 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ.
(1) $\|c\,\boldsymbol{u}\| = |c|\,\|\boldsymbol{u}\|$.
(2) $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式[23]).
(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (三角不等式).

証明 (1) $\|c\boldsymbol{u}\|^2 = (c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{u}) = c^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = c^2\|\boldsymbol{u}\|^2$ である. これの平方根をとればよい.
(2) まづ $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ならば, 所望の不等式の両辺が 0 なので正しい. 次に $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ とし, $t \in \mathbb{R}$ の 2 次函数 $f(t) = \|t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2$ を考へる. これは
$$f(t) = \|t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})t + \|\boldsymbol{v}\|^2$$
と書けるが, 常に $f(t) \geqq 0$ であるから, 2 次函数としての判別式 D は
$$D/4 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 \leqq 0$$
を満たす. これより直ちに主張が導かれる.
(3) (2) を使ふと
$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2$$
を得る. これより直ちに主張が導かれる. □

定義 8.1.7 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ を満たす vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は垂直であるといはれ, $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.

命題 8.1.8 零 vector と異なる $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \in V$ が, どの 2 つも垂直であるとする. このとき, これらの vectors は 1 次独立である.

証明 $c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$ について $c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$ であるとせよ. このとき各 i について
$$0 = (\boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r) = c_1(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_1) + \cdots + c_r(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_r) = c_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i)$$
となるが $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{0}$ であるから **P4** により $c_i = 0$ でなくてはならない. □

[23] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) France 生. Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) Germany 生.

演 習 問 題 **8.1**

8.1.9 $\mathbb{R}^2$ において $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2$ と定めれば, これは内積を与へることを示せ.

8.1.10 8.1.4 で確かめた様に $\mathbb{R}[x]_2$ における積分

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$

はこの空間の内積である. 任意の $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ に対して,

$$(f, g) = [\, a_0 \ a_1 \ a_2 \,] \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

となることを示せ.

8.1.11 上の 8.1.10 の内積に関する内積空間 $\mathbb{R}[x]_2$ において

$$f_1(x) = 3 + 15x, \quad f_2(x) = 3 - 30x + 15x^2$$

のどちらとも直交する多項式の全体を決定せよ. （答 : $\{\, c\,(-15 + 2x + 35x^2) \,|\, c \in \mathbb{R} \,\}$）

8.1.12 内積空間において, 次が成り立つことを示せ.

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2$.

(2) $2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2$.

(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$.

(4) $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \iff \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$.

(5) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \perp (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \iff \|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$.

8.1.13 内積空間 V とその部分空間 W に対し

$$W^{\perp} = \{\, \boldsymbol{u} \in V \,|\, \text{すべての } \boldsymbol{v} \in W \text{ に対して } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \,\}$$

と定め, これを W の <u>直交補空間</u> と称する. $W^{\perp}$ は V の部分空間であることを示せ.

8.1.14 内積空間 V において, 次を示せ.

(1) $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

(2) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ とする. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$ が任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対して成立するならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$.

8.1.15 8.1.11 の状況のもとで

$$W = \{\, a\, f_1(x) + b\, f_2(x) \,|\, a,\ b \in \mathbb{R} \,\}$$

とおくと W は内積空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間である. このとき $W^{\perp}$ を求めよ.

8.1.16 （有限次元の）内積空間 V の部分空間 W について次を示せ.
(1) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, $V = W + W^{\perp}$.
(2) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$.
(3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

8.1.17 （有限次元の）内積空間 V の部分空間 W_1, W_2 について次を示せ.
(1) $W_1 \subset W_2 \iff {W_1}^{\perp} \supset {W_2}^{\perp}$.
(2) $(W_1 + W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} \cap {W_2}^{\perp}$.
(3) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = {W_1}^{\perp} + {W_2}^{\perp}$.

8.1.18 「代数学 1」で触れた Hamilton の <u>4 元数体</u>

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a + b\boldsymbol{i} & c + d\boldsymbol{i} \\ -c + d\boldsymbol{i} & a - b\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \middle| \ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \quad \text{（もちろん } \boldsymbol{i} \text{ は虚数単位）}$$

は行列の和と scalar 倍に関して, $\mathbb{R}$ 上の 4 次元 vector 空間である. いま

$$A = \begin{bmatrix} a + b\boldsymbol{i} & c + d\boldsymbol{i} \\ -c + d\boldsymbol{i} & a - b\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \text{ に対し } \overline{A} = \begin{bmatrix} a - b\boldsymbol{i} & c - d\boldsymbol{i} \\ -c - d\boldsymbol{i} & a + b\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \text{（すべての成分を複素共役に）}$$

とおき, $\mathbb{H}$ の任意の 2 元 A, B に対し $(A, B) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}({}^t\!A\,\overline{B})$ と定める. これが $\mathbb{H}$ の内積を与えることを示せ.

8.2 正規直交基と直交行列

この節でも V は内積 $(\ ,\ )$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の有限次元 vector 空間を表すものとする. また $\mathbb{R}^n$ は標準内積を持つ内積空間を表すものとする.

定義 8.2.1 $\dim(V)=n$ とする. $\{\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基で

(8.2.2) $$(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}\quad(1\leqq i,j\leqq n)$$

を満たすとする. この様な基を正規直交基と称する. 実際, 8.1.8, 6.5.17, および仮定 $\dim(V)=n$ により, (8.2.2) が成り立てば, $\{\boldsymbol{u}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_n\}$ は基となることに注意せよ.

命題 8.2.3 (Gram-Schmidt[24] の正規直交化法) $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ を V の基とする. このとき, 次を満たす V の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_n\}$ が存在する (記法は 6.5.1 参照):

$$\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r\rangle_{\mathbb{R}}\qquad(1\leqq r\leqq n).$$

証明 まづ $\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{||\boldsymbol{v}_1||}\boldsymbol{v}_1$ として $r=1$ の場合が成り立つ. 次に

$$\boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1,\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{||\boldsymbol{v}'_2||}\boldsymbol{v}'_2$$

とおくと $(\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_1)=0$, $||\boldsymbol{u}_2||=1$ となることがわかるから $r=2$ のときも成り立つ. 一般に $\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r$ が所望の条件を満たすとき,

$$\boldsymbol{v}'_{r+1}=\boldsymbol{v}_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}(\boldsymbol{v}_{r+1},\boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i,\quad \boldsymbol{u}_{r+1}=\frac{1}{||\boldsymbol{v}'_{r+1}||}\boldsymbol{v}'_{r+1}$$

とおけば $(\boldsymbol{u}_{r+1},\boldsymbol{u}_i)=0$ $(i\leqq i\leqq r)$ であり, $\boldsymbol{u}_{r+1}$ の作り方から

$$\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{u}_{r+1}\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_r,\boldsymbol{v}_{r+1}\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_r,\boldsymbol{v}_{r+1}\rangle_{\mathbb{R}}$$

となる. □

例題 8.2.4 次の $\mathbb{R}^4$ 内の 3 つの vectors の生成する部分空間を W とする. これら vectors に対して, この順序に従つて Gram-Schmidt の正規直交化法を用ゐて W の正規直交基を求めよ.

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}-3\\4\\-4\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}6\\-2\\0\\7\end{bmatrix}.$$

解 8.2.3 の証明の記法を使ふ.

$$\|\boldsymbol{v}_1\|=5,\quad \boldsymbol{u}_1=\frac{1}{5}\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\-4\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_2-(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-4\\2\\-2\\-1\end{bmatrix},\quad \|\boldsymbol{v}'_2\|=25,\quad \boldsymbol{u}_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\2\\-2\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{v}'_3=\boldsymbol{v}_3-(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1-(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\-8\\-2\\4\end{bmatrix},\quad \|\boldsymbol{v}'_3\|=2,\quad \boldsymbol{u}_3=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-2\\-4\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

かうして得られた $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が求める正規直交基である. □

[24] Jørgen Pedersen Gram (1850-1916) Denmark 生. Erhard Schmidt (1876-1959) Estonia 生.

定義 8.2.5 内積空間 V 上の線形変換 T が, 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, 等式

$$(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

を満たすならば, T は直交変換と呼ばれる.

注意 8.2.6 Vector 空間 V における 2 つの vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の距離を $\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ と見做せば, 8.2.5 と 8.1.12(2) から分る様に, 直交変換 $T : V \to V$ とは, (原点を動かさず) 任意の 2 点間の距離を変へない写像のことである. (8.2.19 も見よ.)

注意 8.2.7 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする. $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$ と書くとき,

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\,(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

これは $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を内積の性質 **P1**, **P2**, **P5**, **P7** と $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ を使つて書き下せば得られる.

命題 8.2.8 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする. V の線形変換 T が直交変換であるためには, $\{T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$ が内積空間 V の正規直交基であることが必要十分である.

証明 (必要性) T は直交変換だから

$$(T(\boldsymbol{u}_i), T(\boldsymbol{u}_j)) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} \qquad (1 \leqq i,\ j \leqq n)$$

である. $\dim V = n$ であるから, 8.1.8 より $\{T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$ は正規直交基である.
(十分性) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ とし, $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$ とすれば, 8.2.7 より

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

一方 T は線形写像であるから 7.1.1 の **T1**, **L2** によつて,

$$T(\boldsymbol{u}) = a_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + a_nT(\boldsymbol{u}_n), \quad T(\boldsymbol{v}) = b_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + b_nT(\boldsymbol{u}_n)$$

である. さらに仮定と 8.2.7 より

$$(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が得られ, T が直交変換であることがわかる. □

注意 8.2.9 高校までで学ぶ 3 次元以下 Euclid 空間において, 原点を中心とする回転移動や, 原点を通る 1 本の直線あるいは 1 枚の平面に関する対称移動, さらにそれらの合成変換は任意の 2 点間の距離を変へない. 直交変換はそれを内積空間 (Euclid 空間の自然な一般化) へ拡張したものに他ならない. 余談であるが, 距離は変更を受けるれども, 角度は変はらない様な写像 (等角写像と呼ぶ) も詳しく調べられてゐる. その例は複素函数論で学ぶであらう.

定義 8.2.10 実正方行列 A が ${}^tAA = I$ を満たすとき A は<u>直交行列</u>であるといはれる．（このとき 3.5.11 や 5.5.4 より $A{}^tA = I$ でもある）

問 8.2.11 次の行列は直交行列であることを確かめよ．

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & -6 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 & 1 \\ \sqrt{2}+1 & \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & -1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2}-1 \\ 1 & -\sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}+1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

問 8.2.12 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ．

直交行列が直交変換の表現行列についての焼き直しであることが次の命題からわかる．

命題 8.2.13 $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について，次の 4 つは同値．
(1) A は直交行列．
(2) A は正則であり ${}^tA = A^{-1}$．
(3) $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関しての正規直交基．
(4) T_A は直交変換．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2)．${}^tAA = I$ ならば 3.5.12 により $A{}^tA = I$ で ${}^tA = A^{-1}$ である．
(2) $\Rightarrow$ (1) は明らか． (1) $\Leftrightarrow$ (3)．${}^tAA = [(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)]$ であることからわかる．
(3) $\Leftrightarrow$ (4)．8.2.8 を $V = \mathbb{R}^n$, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, $T = T_A$ として適用すれば直ちに示される． □

命題 8.2.14 V を内積空間とする．$\dim V = n$ とし，$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の 1 組の正規直交基とする．行列 A が線形変換 $T : V \longrightarrow V$ のこの基に関する表現行列であるとき，次が成り立つ：T が直交変換 $\Longleftrightarrow$ A が直交行列．

証明 $A = [a_{ij}]$ と書くと，各 $s, t = 1, \cdots, n$ について，

$$\begin{aligned}(T(\boldsymbol{u}_s), T(\boldsymbol{u}_t)) &= \left(\sum_{h=1}^{n} a_{hs}\boldsymbol{u}_h, \sum_{k=1}^{n} a_{kt}\boldsymbol{u}_k\right) = \sum_{h,k} a_{hs}a_{kt}(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{u}_k) \\ &= \sum_{r=1}^{n} a_{rs}a_{rt}(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_r) = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}a_{rt}.\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} a_{rs}a_{rt}$ は ${}^tAA$ の (s, t) 成分なので，A が直交行列であることと右辺が δ_{st} に等しいことが同値．つまり，$\{T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_1)\}$ が V の正規直交基であることと A が直交行列であることが同値である．それゆゑ，主張は 8.2.8 から直ちに従ふ． □

演 習 問 題 **8.2**

8.2.15 以下の (1), (2) のそれぞれにおいて $\mathbb{R}^4$ における 3 つの vectors $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ の生成する部分空間を W とする. これら vectors を, この順序に従つて Gram-Schmidt の正規直交化法により W の正規直交基を求めよ.

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$

(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$

8.2.16 $\mathbb{R}[x]_2$ を 8.1.4 の内積に関する内積空間とする. このとき, 基 $\{1,\ x,\ x^2\}$ をこの順に従つて Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ.

8.2.17 2 つの直交行列の積もまた直交行列であることを示せ.

8.2.18 P が直交行列であれば P は正則行列であり, P^{-1} も直交行列であることを示せ.

☆ 上記の 2 つ, 8.2.17 と 8.2.17 は, n 次直交行列の全体が群[25] をなすことを示してゐる. それを直交群と呼び $\mathrm{O}(n)$ と記す. 行列式が 1 の n 次直交行列の全体も群をなすことは容易にわかる. これを特殊直交群と呼び, $\mathrm{SO}(n)$ と記す.

8.2.19 T を V の線形変換とする. T が直交変換であるためには $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ.

8.2.20 直交行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.

(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく :
$t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1, \quad t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1, \quad t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1.$ 7.5.16 も使ふ.)

8.2.21 H を成分を有理数とする交代行列とする. 後の 8.5.19 により H は固有値として -1 を持ち得ない. このことと後の 11.5.3（Frobenius の定理）によつて $I + H$ が正則であることがわかる. 以上のことを認めた上で, 行列

$$f(H) = (I - H)(I + H)^{-1}$$

は, -1 を固有値に持たず, しかも成分がすべて有理数である様な直交行列であることを示せ. さらに, f は

$\{H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \mid H$ は交代行列$\}$ から

$\{T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \mid T$ は $|T| = 1$ かつ -1 を固有値に持たない直交行列$\}$

への全単射であることを示し, これの逆の対応を求めよ. （f は Cayley 変換と呼ばれる. ）

---

[25] 脚注 [8] を参照.

8.3　2 次と 3 次の直交行列

ここでは, 幾何学的に考察し, 2 次と 3 次の直交行列の三角函数による記述を述べる.

問 8.3.1　次の (1), (2) に答へよ.

(1) 行列式が 1 である 2 次直交行列 A に対し, $0 \leqq \theta < 2\pi$ なる θ が唯一つ存在して, $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ と書け, 直観的には T_A は原点の廻りの θ 回転であることを示せ.

(2) 行列式が -1 の 2 次の直交行列 B に対し, $0 \leqq \varphi < 2\pi$ なる φ が唯一つ存在して, $B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$ と書けること, 直観的には T_B は, 原点を通つて傾き $\tan\frac{\varphi}{2}$ なる直線（但し, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ のときは y 軸）に関する対称移動であることを示せ.

次に 3 次の直交行列について述べる. 一つ結論を書くと

命題 8.3.2　行列式の値が 1 である 3 次の直交行列 A は 3 つの定数 $0 \leqq \alpha < 2\pi$, $0 \leqq \beta \leqq \pi$, $0 \leqq \gamma < 2\pi$ を使つて

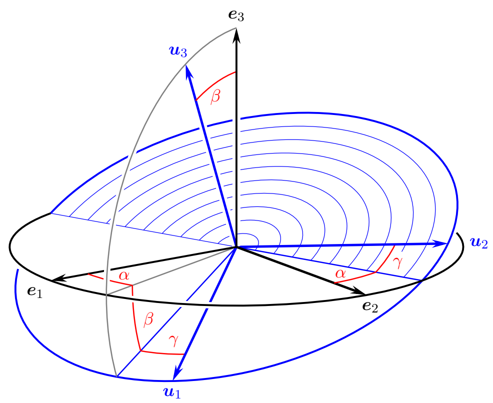
$$A = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & & \sin\beta \\ & 1 & \\ -\sin\beta & & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

と書ける. ここで $\beta \neq 0, \pi$ の場合は α, β, γ は一意的に定まる. 一方, $\beta = 0$ または π の場合は $\alpha + \gamma$ の値のみが一意的に定まる.

ここでは直観的な説明を行ふ. 精密な説明は [S] の第 IV 章 §6 を参照されたい.

証明　まづ A による線形変換 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ を, 空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を動かさず, “面対称移動” をしない “合同変換” だと考へて, その様な変換を思ひ浮かべて欲しい. さて, ここで

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & & \sin\theta \\ & 1 & \\ -\sin\theta & & \cos\theta \end{bmatrix}$$



を表現行列とする $\mathbb{R}^3$ の線形変換を S_θ, T_θ とする. 8.3.1 より S_θ は基の第 3 の vector を動かさない回転を表し, T_θ は基の第 2 の vector を動かさない回転を表す. 右図は, 任意に与へられた行列式 1 なる直交行列 A を表現行列とする線形変換により, $\mathbb{R}^3$ の標準基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が新しい基 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ に写された様子を示してゐる. この図を読み取れば

$$\boldsymbol{u}_i = S_\gamma T_\beta S_\alpha(\boldsymbol{e}_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

となることがわかる. これから主張は直ちに従ふ. □

行列式が -1 なる直交行列（A とする）の場合は, 例へば A の代りに $A\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$ を考へれば 2 次のときと同様である.

4 次以上の直交行列についても同様の考察が可能である ([S], 第 IV 章, §6 を参照).

8.4 随伴変換, 対称変換

定義 8.4.1 V を内積空間とする. 但し, 内積は $(\ ,\ )$ で表す. 線形変換 $S : V \to V$ に対し, 写像 $S' : V \to V$ で

(8.4.2) $$(S(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, S'(\boldsymbol{v})) \quad (\forall \boldsymbol{u}, \forall \boldsymbol{v} \in V)$$

を満たすものが一意的に存在する (下の 8.4.3(1)). S' は S の随伴変換であるなどといはれ, $S' = {}^tS$ と記す. このとき S' も線形変換である (下の 8.4.3(2)) から, この関係は対等であつて, S は S' の随伴変換であるから, $S = {}^tS'$ と書いてもよい. それゆゑ, S と S' は互ひに随伴であるとも言はれる.

問 8.4.3 線形変換 S の随伴変換 ${}^tS$ について次の問に答へよ.
(1) S に対して随伴変換 ${}^tS$ は一意的に存在することを示せ.
(2) 随伴変換 ${}^tS$ は線形変換であることを示せ.

随伴変換と転置行列の関係は次の通り.

命題 8.4.4 V の正規直交基を 1 組定め, S を V の線形変換とする. この基に関する 線形変換 S の表現行列 を A とせよ. このとき, この基に関する ${}^tS$ の表現行列は ${}^tA$ である. また, この基に関して ${}^tA$ を表現行列とする線形変換 (7.3.3 参照) が ${}^tS$ に他ならない. 特に ${}^t(T_A) = T_{{}^tA}$ である.

証明 $\dim(V) = n$ とする. 1 組定められた V の正規直交基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする. この基に関する ${}^tS$ の表現行列を $B = [b_{ij}]$ とし, $A = [a_{ij}]$ とおく. このとき

$$\big(S(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{u}_j\big) = \Big(\sum_k a_{ki}\,\boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_j\Big) = a_{ji}, \quad \big(\boldsymbol{u}_i, {}^tS(\boldsymbol{u}_j)\big) = \Big(\boldsymbol{u}_i, \sum_k b_{kj}\,\boldsymbol{u}_k\Big) = b_{ij}.$$

ゆゑに, すべての i, j について $a_{ij} = b_{ji}$ である. つまり $B = {}^tA$.
逆に $a_{ij} = b_{ji}$ であれば $(S(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{u}_i, S(\boldsymbol{u}_j))$ であるから, $B = {}^tA$ であれば, B の表現する線形変換 (7.3.3 参照) は ${}^tS$ になる. □

命題 8.4.5 T が V の線形変換であるとき, ${}^t({}^tT) = T$ である.

証明 V の正規直交基を取つて, それに関する表現行列を A とすれば, $(A^*)^* = A$ であるから, 主張は 8.4.4 により正しい. □

命題 8.4.6 T_1 と T_2 が V の線形変換であるとき ${}^t(T_1T_2) = {}^tT_2\,{}^tT_1$ である.

証明 2.2.8 (3) と 8.4.4 から直ちにわかる. □

定義 8.4.7 内積空間 V の線形変換 $S : V \to V$ がその随伴変換 ${}^tS$ と一致するとき, S を 対称変換 と称する. もちろん, このとき V の 1 つの正規直交基に関する表現行列は対称行列である.

次節以降で, 対称変換を正規直交基の取り替へによつて対角行列で表現（対角化）することについて考察する.

演習問題 8.4

8.4.8 V を内積空間とする.（$\mathbb{R}$ 上の）線形変換 $S : V \longrightarrow V$ と部分空間 $W \subset V$ について, $S(W) \subset W$ であることと, ${}^tS(W^\perp) \supset W^\perp$ であることは同値であることを示せ.（補足. 7.4.8 の用語を使ふと, 上記の主張は,「W が S に関して不変であることと, $W^\perp$ が ${}^tS$ に関して不変であることは同値である」と述べられる.）

8.5 実対称行列の対角化

第 7.7 節では正方行列の対角化を考察した．この節では, 実対称行列（実行列であって対称行列であるもの）は直交行列により対角化されることを説明する．即ち, 第 7.7 節で述べた対角化 $B = P^{-1}AP$ における正則行列 P として, 直交行列を選ぶことに相等する．それは, 与へられた n 次実対称行列 A に対し, 内積空間 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基を取り替へることで, A の表現するこの空間上の線形変換を対角行列で表現することでもある．これは幾何学的な応用において非常に重要である．

最初に, 第 1 章で述べたことを, もう一度確認しておく．

定義と命題 8.5.1 複素数の全体は体をなす．これを $\mathbb{C}$ で表す．複素数 $\alpha = a + b\boldsymbol{i}$ $(\boldsymbol{i} = \sqrt{-1})$ に対し, $\overline{\alpha} = a - b\boldsymbol{i}$ と書いて, これを α の複素共役と呼ぶ．
また, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について, $\alpha \in \mathbb{R} \iff \overline{\alpha} = \alpha$ であり,

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, \qquad \beta \neq 0 \text{ のとき } \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} \tag{8.5.2}$$

が成り立つ．即ち, 複素共役をとる操作は四則演算を保つ．

定義 8.5.3 複素数を成分とする行列 $A = [a_{ij}]$ についても $\overline{A} = \left[\,\overline{a_{ij}}\,\right]$ と定め, A の複素共役と呼ぶ．

問 8.5.4 行列の複素共役についても 8.5.1 と同様な等式が成り立つ, 即ち, 複素数を成分とする任意の行列 A, B と複素数 $c \in \mathbb{C}$ に対し, 以下が成り立つことを示せ．もちろん, 演算が定義できる場合に限る．

(1) A の成分はすべて実数 $\iff \overline{A} = A$. (2) $\overline{cA} = \bar{c}\,\overline{A}$, $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$.
(3) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$. (4) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$. (5) $\overline{{}^tA} = {}^t\overline{A}$.
(6) $\widetilde{\overline{A}} = \overline{\widetilde{A}}$（$\widetilde{A}$ は A の余因子行列．3.4.1 参照）. (7) $\det(B) \neq 0$ のとき $\overline{B^{-1}} = \overline{B}^{\,-1}$.

命題 8.5.5 実対称行列の固有値は全て実数である．

証明 ここでは基礎の体を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ に広げて議論する．$\lambda \in \mathbb{C}$ を n 次の実対称行列 A の固有値とせよ．即ち $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, ${}^tA = A$ であり,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

となる複素数成分の vector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在する．この式の両辺の複素共役をとれば

$$A\overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}} \quad (\because A \text{ は実行列})$$

を得る．このとき

$$\overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = {}^t(\overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{x}})\,\boldsymbol{x} = {}^t(A\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^tA\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}. \tag{8.5.6}$$

ここで $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるから,

$${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \overline{x_1}\,x_1 + \cdots + \overline{x_n}\,x_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$$

である．それゆゑ (8.5.6) から $\overline{\lambda} = \lambda$, 即ち $\lambda \in \mathbb{R}$ を得る． □

命題 8.5.7 A を n 次実正方行列とし, その固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする. これら固有値が全て実数ならば, A は直交行列により上三角行列に写される. 即ち, 直交行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる. P は $\det(P) = 1$ となる様に選べる. この表示を A の上三角化と称する.

証明 A の次数 n に関する帰納法で証明する. $n = 1$ においては明らかである. 次数が $n-1$ 以下の場合は主張が成り立つと仮定し, 次数が n の場合を示す. λ_1 を A の固有値の 1 つとし, $\boldsymbol{q}_1$ を λ_1 に対応する固有 vector で $\|\boldsymbol{q}_1\| = 1$ なるものとする. ここで $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ゆゑ $\boldsymbol{q}_1$ の成分も実数にとれることに注意せよ（実係数の連立方程式の解法!）. $\boldsymbol{q}_1$ を含む正規直交基 $\{\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ をとり（6.6.1 と 8.2.3 による）, $Q = [\boldsymbol{q}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{q}_n]$ とおく. このとき 8.2.13 により Q は直交行列である. 線形変換 T_A を上記の基に関して表現する行列を考へれば,

$$Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & * \\ \hdashline & B \end{array}\right] \quad (B \text{ は } n-1 \text{ 次の正方行列})$$

と書けることがわかる. 7.5.14 より $\varphi_A(t) = (t-\lambda_1)\varphi_B(t)$ であるから, B の固有値も全て実数である. よつて帰納法の仮定より

$$R^{-1}BR = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる $n-1$ 次直交行列 R が存在する. よつて

$$P = Q\left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & R \end{array}\right]$$

とおくと, P は直交行列である (8.2.17 による). 以上のことから, 3.5.14 を含めた行列の長方形分割（§2.3）によつて計算すれば

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & R^{-1} \end{array}\right] Q^{-1}AQ \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & R \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & R^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & * \\ \hdashline & B \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & R \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:ccc} \lambda_1 & & * & \\ \hdashline & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{array}\right]. \end{aligned}$$

最後に, 8.2.12 に注意して, もし $\det(P) = -1$ ならば $\boldsymbol{q}_1$ を $-\boldsymbol{q}_1$ に取り替へれば $\det(P) = 1$ となるが, 依然として P は直交行列である. □

例題 8.5.8 次の行列 $A \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R})$ を直交行列により上三角化せよ. 即ち, 直交行列 P を見出し, $B = P^{-1}AP$ が上三角行列である様にせよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　　(2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

解 (1) まづ $\varphi_A(t) = (t-1)(t-2)(t-3)$. この種の問題の解答は 1 通りではない. 固有値の順序を 1, 2, 3 にすると, 対応する固有 vectors として $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ がとれる. これらをこの順で Gram-Schmidt の方法で正規直交化したものを並べて $Q_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) & 2/3 \\ 0 & -4/(3\sqrt{2}) & -1/3 \end{bmatrix}$ とすれば, ${Q_1}^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/(2\sqrt{2}) \\ 0 & 2 & 5/(2\sqrt{2}) \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ と上三角化される. しかるに固有値の順序を 3, 2, 1 すると, 固有 vectors は順に $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となり, この順でこれを Gram-Schmidt の方法で正規直交化したものを並べると $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ となり, ${Q_2}^{-1}AQ_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ なる上三角化が得られる.

(2) $\varphi_A(t) = (t-3)^2(t+3)$ で, $W(3,A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $W(-3,A) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3 次正方行列 A に対して固有空間の次元の和が 2 しかないので, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ から 1 つ選んで 1 次独立な組を作りたい. 実際には, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ を合はせればよく (ここは三角化が対角化とは違ふところ), 得られた組

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が $\mathbb{R}^3$ の基をなす. この 3 つの vectors をこの順で Gram-Schmidt の方法で正規直交化して得られる vectors を並べた行列を Q とせよ:

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

このとき

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{12}{\sqrt{5}} & -\frac{9}{\sqrt{5}} \\ & -3 & 3 \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

と上三角化される.

上記 8.5.8 では, Gram-Schmitd の方法を 1 回づつだけで三角化できたが, 一般には, かうはいかなくて, 例へば上記の場合だと $(3,2)$ 成分は 0 にならない. その様な場合は, 8.5.7 の証明にある様に, さらに (上の場合は右下の 2 次正方行列を) 三角化し, その結果を合はせなければならない. 次 page で実行してみる.

前 page の 8.5.8(2) で最初の基を

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

の順にとると, 以下の通り, 手間が増える. この基に対して, この順で Gram-Schmidt の正規直交化を行つて得られる基を順に並べてできる直交行列は

$$Q = \begin{bmatrix} -2/3 & \sqrt{5}/3 & 0 \\ -1/3 & -2\sqrt{5}/15 & -2\sqrt{5}/5 \\ 2/3 & 4\sqrt{5}/15 & -\sqrt{5}/5 \end{bmatrix}$$

であり, このとき

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= {}^tQAQ \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -9\sqrt{5}/5 & -12\sqrt{5}/5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

ここで, この行列の右下の 2 次正方行列を

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

とおいて, これを上三角化する. B の固有値は 3 と -3 であり,

$$W(3,B) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W(-3,B) = \mathbb{R}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である. そこで, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ について, この順で Gram-Schmidt の正規直交化を行ひ, 得られた vectors を順に並べて

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

とし,

$$P = Q\begin{bmatrix} 1 & \\ & R \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

と三角化が完了する. □

注意 8.5.9 上記の 8.5.8 の計算について, さらに補足する. 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ の固有値がすべて実数であつて, A が対角化可能（7.7.11 を見よ）のときは, 1 回の作業で対角化が終了する. それは下記の理由による. 対角化 $B = P^{-1}AP$ において $P = [\boldsymbol{v}_1 \cdots \boldsymbol{v}_n]$ とおき, $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ について, この順で Gram-Schmidt の正規直交化法を行ふ. 即ち 8.2.3 の証明内の記号で

$$[\boldsymbol{u}_1\, \boldsymbol{u}_2\, \boldsymbol{u}_3 \cdots \boldsymbol{u}_n] = [\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2\, \boldsymbol{v}_3 \cdots \boldsymbol{v}_n]\begin{bmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} & -\frac{(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}_1)}{\|\boldsymbol{v}_2'\|} & -\frac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1)}{\|\boldsymbol{v}_3'\|} & \cdots & -\frac{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{u}_1)}{\|\boldsymbol{v}_n'\|} \\ 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_2'\|} & -\frac{(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_2)}{\|\boldsymbol{v}_3'\|} & \cdots & -\frac{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{u}_2)}{\|\boldsymbol{v}_n'\|} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_3'\|} & \cdots & -\frac{(\boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{u}_3)}{\|\boldsymbol{v}_n'\|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_n'\|} \end{bmatrix}.$$

ここで $Q = [\boldsymbol{u}_1\, \boldsymbol{u}_2\, \boldsymbol{u}_3 \cdots \boldsymbol{u}_n]$ とおくと, Q は直交行列であり $Q^{-1}AQ$ が上三角行列となる（2.2.23 および 3.5.14 を参照）. 一方, 対角化が不可能の場合は, 固有値に重根があり, その根の重複度よりも次元が小さい固有空間が存在する（11.1.5 と 11.1.6 を参照）. その場合, 8.5.8(2) の解答に述べた様に, 固有空間に属さない vector(s) を補つて全空間の基を得たのち, Gram-Schmidt の正規直交化を行ふが, その際の順序において, いかなる固有空間にも属さない vector が 2 番目から $n-1$ 番目の間にあると, （上記 (2) の解答の後半の様に）三角化の作業の回数が 2 回以上になる.

定理 8.5.10 実正方行列 A に対し, 直交行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるためには, A が対称行列となることが必要十分である.
またこの状況では, 直交行列 P は $\det(P)=1$ となる様に取れる.

証明 （必要性）P が直交行列で $P^{-1}AP=B$ が対角行列であるから,

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^t(PBP^{-1}) = {}^t(PB\,{}^tP) \quad (\because\ 3.5.17,\ 8.2.13) \\ &= P\,{}^tB\,{}^tP \quad (\because\ 2.2.8(3)) \\ &= PBP^{-1} \quad (\because\ B \text{ も対称行列であることと } 8.2.13) \\ &= A \end{aligned}$$

となり A は対称行列である.
（十分性） 8.5.5 により実対称行列の固有値は全て実数であるから, 8.5.7 により $\det(P)=1$ なる直交行列 P で

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とできる. ${}^tP=P^{-1}$ かつ ${}^tA=A$ であるから, ${}^t(P^{-1}AP) = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = P^{-1}AP$ である. 即ち $P^{-1}AP$ は対称行列である. つまり

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

と対角化される. □

注意 8.5.11 以上の結果と 8.4.7 と合はせることで, 対称変換は正規直交基をうまく選ぶことによつて, 対角行列で表現されることが帰結される.

命題 8.5.12 A を n 次の実対称行列とせよ. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ. このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ である.

証明 ${}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{v}$ を次の様に 2 通りに計算し比較する：

$$\begin{aligned} \mu\,{}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}(\mu\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{v} &= {}^t\boldsymbol{u}\,{}^tA\boldsymbol{v} \quad (\because\ A \text{ は対称行列}) \\ &= {}^t(A\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} \quad (\because\ 2.2.8) \\ &= {}^t(\lambda\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \lambda\,{}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

であるから $(\lambda-\mu)\,{}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}=0$ である. ここで $\lambda \neq \mu$ なので, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = 0$ でなくてはならない. つまり $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ である. □

例題 8.5.13 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ. また, B も記せ.

解 固有多項式は

$\varphi_A(t) = t^3 - 2t^2 - 8t + 16 = (t-2)(t^2-8)$.

よつて A の固有値は 2, $\pm 2\sqrt{2}$. これらに対応する 固有 vector は

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}, \ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}.$$

これらの 3 本の vectors が 8.5.12 で示した通り, 直交してゐることを確認されたい. ここで, これらをそれぞれの大きさで除したものをこの順で並べて

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とおく. これが求める P (の一つ) である. ${}^tP = P^{-1}$ であることを確認されたい. それゆゑ P^{-1} を求める計算は不要である. これにより,

$$B = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2\sqrt{2} & \\ & & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

と対角化される. □

固有多項式が重根を持つ様な対称行列の直交行列による対角化の例 も挙げておく.

例題 8.5.14 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ. さらに B も記せ.

解 固有多項式は

$$\varphi_A(t) = (t-3)(t+6)^2$$

で, 簡約化により固有空間を求めれば

$$W(3, A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$W(-6, A) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. (ここで 8.5.12 の主張が成立してゐることを確かめられたい.) しかし, この場合の様に重根になつてゐる固有値に対応する固有空間においては, 簡約化の計算で自然に得られる基を構成する vectors は一般には互ひに直交しない.

つまり, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ は直交してゐないので, $W(-6, A)$ の正規直交基を選ぶ必要がある. それには, この 2 つ関して Gram-Schmidt の正規直交化 (8.2.3) を行なつて, $W(-6, A)$ の正規直交基として

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

を得る. これに $W(3, A)$ の正規直交基 $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を合はせて

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

とすれば, P は直交行列であつて

$$B = {}^tPAP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & -6 & \\ & & -6 \end{bmatrix}.$$

しかし, $W(-6, A)$ の正規直交基としては,

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ととることもできて, この場合には,

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

となる. □

注意 8.5.15 8.5.10 の十分性, つまり $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ が対称行列であれば, 直交行列 P が存在して ${}^tPAP$ が対角行列になることの別証明を記す. ここに述べる証明の方が, この事実が成り立つ本質が見え易い. 以下, n に関する数学的帰納法で証明する. $n=1$ の場合は明らかに成り立つ. $n-1$ 次以下の対称行列については主張が成り立つとし, $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$ とせよ. まづ, 8.5.6 により A の n 個の固有値は全て実数であるから, 特に, 1 つ実なる固有値 λ_1 をとることができる. これに対応する長さ 1 の固有 vector を $\boldsymbol{p}_1$ とせよ:

$$A\boldsymbol{p}_1 = \lambda_1\boldsymbol{p}_1, \quad \|\boldsymbol{p}_1\| = 1.$$

ここで, 標準内積に関しての $W_1 = \mathbb{R}\boldsymbol{p}_1$ の直交補空間（8.1.13 で定義）を W_2 とすると ${}^tA = A$ であることから, 任意の $\boldsymbol{x} \in W_2$ について

$$(\boldsymbol{p}_1, A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{p}_1 A\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{p}_1{}^tA\boldsymbol{x} = {}^t(A\boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}) = 0$$

であるから, $A\boldsymbol{x} \in W_2$ である. つまり W_2 は A 倍写像の T_A で不変（7.4.8 で定義）である. ここで $\boldsymbol{p}_1$ と W_2 の正規直交基を列 vector に並べた行列（但し $\boldsymbol{p}_1$ を第 1 列とする）を Q とおけば, もちろん Q は直交行列である. このとき, ある行列 $A_1 \in \mathrm{Mat}(n-1,\mathbb{R})$ によつて,

$$AQ = Q\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \hline & A_1 \end{array}\right], \quad \text{つまり} \quad {}^tQAQ = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \hline & A_1 \end{array}\right]$$

と書かれる. このとき, ${}^tQAQ$ は対称行列なので A_1 も対称行列である. 帰納法の仮定により $n-1$ 次直交行列 Q_1 が存在して

$$Q_1A_1{}^tQ_1 = B_1$$

が対角行列となる. よつて

$${}^tQAQ = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \hline & Q_1B_1{}^tQ_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & Q_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \hline & B_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^tQ_1 \end{array}\right].$$

このとき,

$$P = Q\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & {}^tQ_1 \end{array}\right]^{-1} = Q\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & Q_1 \end{array}\right]$$

は直交行列で

$${}^tP = {}^t\!\left(Q\left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & Q_1 \end{array}\right]\right) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & Q_1 \end{array}\right]^{-1}{}^tQ$$

あるから

$${}^tPAP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \hline & B_1 \end{array}\right]$$

と対角化された.

演 習 問 題 8.5

8.5.16 次の行列 A を直交行列により上三角化せよ．即ち，直交行列 P を見出し，$B = P^{-1}AP$ が上三角行列である様にせよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (3) $A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -4 & 12 & -7 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -3 \\ -6 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

8.5.17 次の実対称行列 A を対角化せよ．即ち，$B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め，対角行列 B も記せ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} -5 & -18 & 0 \\ -18 & 34 & 18 \\ 0 & 18 & 13 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

8.5.18 2 つ対称行列の積は対称行列にならないことを反例を与へて示せ．さらに，2 つの対称行列 A, B について，次が成り立つことを示せ：（[S], p.152）

$$AB = BA \iff AB \text{ が対称行列.}$$

8.5.19 実数を成分とする交代行列（実交代行列）の固有値は純虚数か 0 に限ることを示せ．（ Hint：$\boldsymbol{u}$ と $A\boldsymbol{u}$ との標準内積を利用して $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ または $\lambda = -\overline{\lambda}$ となることを示せ. 8.5.5 も参照せよ．）

8.5.20 実対称行列 $A_1, \cdots, A_s$ に対し，直交行列 P が存在して，$P^{-1}A_1P, \cdots, P^{-1}A_sP$ がすべて対角行列となるためには，$A_1, \cdots, A_s$ のどの 2 つも交換可能であることが必要十分である．これを証明せよ．（同時対角化）

第 9 章　2 次曲線と 2 次曲面

9.1　Euclid 空間と代数的曲面

ここでは Euclid 空間は, 非常に古くからある概念にもかかはらず, これを現代的に厳密に定義しやうとすると, かなり手間が掛かる [26] ので, ここでは, 簡単に述べておく.

この本においては, 記号 $\mathbb{R}^n$ は実数を成分とする n 次の数 vectors 全体のなす vector 空間を表してゐる. これと混同しない様に, ここでは n 次元 Euclid 空間を $\mathbb{E}^n$ で表す.

定義 9.1.1　n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^n$ とは, 内積空間 $\mathbb{R}^n$ を位置 vector に持つ点のなす空間のことである. より詳しく述べれば $\mathbb{E}^n$ には, 原点と呼ばれるあらかじめ固定された点 O があり, 各点 $\mathrm{P} \in \mathbb{E}^n$ には一意的に vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ が定まる. このとき, $\boldsymbol{a}$ は O を始点とし, P を終点とする P の位置 vector と呼ばれ, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{a}$ と記される. 任意の 2 点 P, $\mathrm{Q} \in \mathbb{E}^n$ の位置 vector を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とするとき, 点 P から Q に至る vector なるものを $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ として定義し $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と記す. $\mathbb{R}^n$ の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を 1 つとる. このとき $\mathbb{E}^n$ の各点 P の位置 vector　$\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^n c_j \boldsymbol{u}_j$ の係数 $(c_1, \cdots, c_n)$ を P の座標と呼び, $\mathrm{P} = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{E}^n$　などと書く. また任意の 2 点 P, Q の距離を $\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|$ と定める.

例へば $\mathbb{E}^3$ は実数 3 個の順序付きの組 (x, y, z)（これを $\mathbb{E}^3$ の点 と呼ぶ）の全体であり, 2 つの点 (x, y, z) と (x', y', z') の距離が $\left((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right)^{\frac{1}{2}}$　で与へられる空間である. 高校までで学んだ座標平面や座標空間は, それぞれ $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{E}^3$ に他ならない.

$\mathbb{E}^n$ の座標は, 原点 O の変更と, 位置 vectors の空間 $\mathbb{R}^n$ 正規直交基の変更に伴なつて変はるのであるが, それに応じて, 考察する図形 $S \subset \mathbb{E}^n$ の方程式が変更を受ける.

定義 9.1.2　部分集合 $S \subset \mathbb{E}^n$ が n 変数実数係数多項式 $F(X_1, \cdots, X_n)$ によつて

$$S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{E}^n \mid F(x_1, \cdots, x_n) = 0\} \tag{9.1.3}$$

と表はされるとき, S を $\mathbb{E}^n$ の代数的超曲面と呼ぶ. (9.1.3) において, F の次数が d のとき, S を d 次代数的超曲面と呼ぶ. $n = 2$ のとき S は代数的曲線と呼ばれ, $n = 3$ のとき S は代数的曲面 [27] と呼ばれる.

[26] 気になる読者は, 例へば, 岩波数学辞典の「ユークリッド空間」の項目, あるいは 河田敬義 著 :「アフィン幾何・射影幾何」(岩波講座 基礎数学) などを見られたい.

[27] 一般に, 代数曲線, 代数的曲面といふ言葉はもつと広い概念を指すので, この用語の使用法は, この本に限つてのものであることに注意されたい.

補題 9.1.4 直交行列 T と vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ をとり, 固定する. 一般に, $\mathbb{E}^n$ の座標を直交変換と平行移動により $\boldsymbol{x} \longmapsto T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, つまり $\boldsymbol{x} = {}^tT\,(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b})$, ($\boldsymbol{x}$ は x_1, x_2, $\cdots$, x_n を成分とする列 vector) で変更して, (9.1.3) の S を与へる多項式 $F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を新しい多項式 $G(X'_1, X'_2, \cdots, X'_n)$ に変換するとき, F と G の全次数は同一である.

証明 なぜなら, この様な変換の逆の変換は再びこの形の変換であるが, もし, 次数が下つたとすると（1 次式での変換で次数が上がることは有り得ない）逆の変換で元に戻したときに, 1 次式での変換で次数が上がることになり矛盾である. □

9.2 2 次形式の係数行列

定義 9.2.1 体 $\mathbf{K}$ の元 $c_{ij} \in \mathbf{K}$ を係数とする n 変数 X_1, $\cdots$, X_n の 2 次の斉次式

$$F(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}X_iX_j$$

を $\mathbf{K}$ 上の n 元 2 次形式 といふ. ここで, 同類項をまとめるために $\frac{1}{2}(c_{ij} + c_{ji}) = a_{ij} = a_{ji}$ とおき, $A = [a_{ij}]$ とおくと A は対称行列であり,

$$F(X_1, \cdots, X_n) = [\,X_1 \cdots X_n\,]\,A \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

と書ける. この状況のとき A を F の 係数行列 と呼ぶ.

例 9.2.2 上の表示方法の例を挙げておく.
(1) 2 変数の例 :

$$X^2 - 4XY - 2Y^2 = [\,X\ Y\,]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

(2) 3 変数の例 :

$$3X^2 - 5Y^2 + 2Z^2 - 14YZ + 12XZ = [\,X\ \ Y\ \ Z\,]\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

以下, この章では $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ の場合のみ扱ふ.

9.3　2 次曲線の分類

ここでは $\mathbb{E}^2$ において

$$F(X,Y)=a_{11}X^2+2a_{12}XY+a_{22}Y^2+2b_1X+2b_2Y+c$$

により

$$C=\{\,(x,y)\in\mathbb{E}^2\,|\,F(x,y)=0\,\}$$

と定義される代数的曲線を, 2 次曲線 と称する. 以下, 2 次曲線 C の形状を調べるが, C が空集合の場合もある. F は斉次式ではないが 9.2 の用語を流用して $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ を F の 係数行列 と呼ぶ. $D=\det(A)$ として, $D=0$ か否かで分ける.

$D\neq 0$ のとき. まづ,

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{-a_{22}b_1+a_{12}b_2}{D},\frac{-a_{11}b_2+a_{12}b_1}{D}\right),\quad (X',Y')=(X-x_0,Y-y_0)$$

とおくと $\left(\frac{\partial}{\partial X}F(x_0,y_0)=\frac{\partial}{\partial Y}F(x_0,y_0)=0 \text{ に注意}\right)$

$$F(X,Y)=a_{11}{X'}^2+2a_{12}X'Y'+a_{22}{Y'}^2+c' \quad (c' \text{ は定数})$$

となる. もし $a_{12}=0$ ならば C の形状は一目瞭然なので, $a_{12}\neq 0$ とする. この場合は

$$2a_{12}\cos(2\theta)=(a_{11}-a_{22})\sin(2\theta)$$

を満たす θ を取り

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$$

なる X'', Y'' で $F(X,Y)$ を書けば（直交行列による変換 !）

$$F(X,Y)=p_{11}{X''}^2+p_{22}{Y''}^2+c''$$

の形となる. これを C の 標準形 といふ. ここで

$$F(X,Y)=[\,X'\ Y'\,]\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} p_{11} & \\ & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}+c''$$

であるから p_{11} と p_{22} は A の固有値に他ならない.

$D=0$ の場合　この場合は

$$F(X,Y)=\pm(pX+qY)^2+2b_1X+2b_2Y$$

の形になるから,

$$\cos\theta=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},\quad \sin\theta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

なる θ を取つて

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

なる X', Y' で F を書けば

$$F(X,Y)=\pm(p^2+q^2){X'}^2+2b_1(X'\cos\theta+Y'\sin\theta)+2b_2(-X'\sin\theta+Y'\cos\theta)$$

となる. 以上のことと高校で学んだ事を合はせれば 2 次曲線は C は楕円, 双曲線, 放物線などの簡単な図形であることがわかる.

例題 9.3.1 次の方程式で表される 2 次曲線 C の概形を図示せよ：

$$x^2-4xy-2y^2+10x+4y=0.$$

解 まづ, $(x,y)=(x'+x_0,\,y'+y_0)$ を代入して x, y の 1 次の項を消すための平行移動を求めると $(x_0,y_0)=(-1,2)$ を得る．（これは, 左辺を $F(x,y)$ として, $\frac{\partial}{\partial X}F(X,Y)=\frac{\partial}{\partial Y}F(X,Y)=0$ なる (X,Y) を求めても得られる.）これにより, 与式は

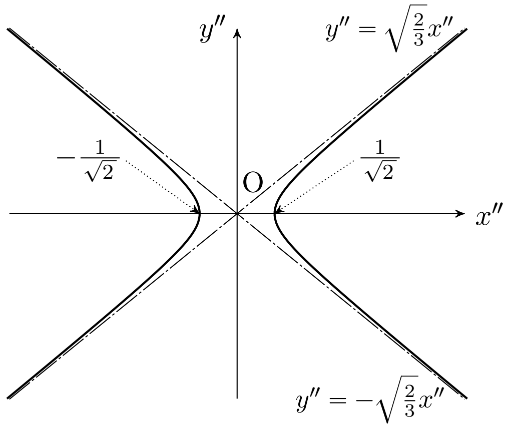
$$x'^2-4x'y'-2y'^2-1=0 \tag{9.3.2}$$

となる. この係数に対応する 2 次行列を $A=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&-2\end{bmatrix}$ とおく. $\varphi_A(t)=(t-2)(t+3)$ より A の固有値は 2, -3 であり, 対応する固有 vector を求めることにより,

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&\\&-3\end{bmatrix},\quad \left(\text{但し } P=\tfrac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2&1\\-1&2\end{bmatrix}\text{ で, これは直交行列}\right)$$

を得る（8.5.12 に注意せよ). $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x''\\y''\end{bmatrix}$ とおき, (9.3.2) に代入すれば

$$2x''^2-3y''^2=1 \tag{9.3.3}$$



を得る. 漸近線は

$$y''=\pm\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,x''$$

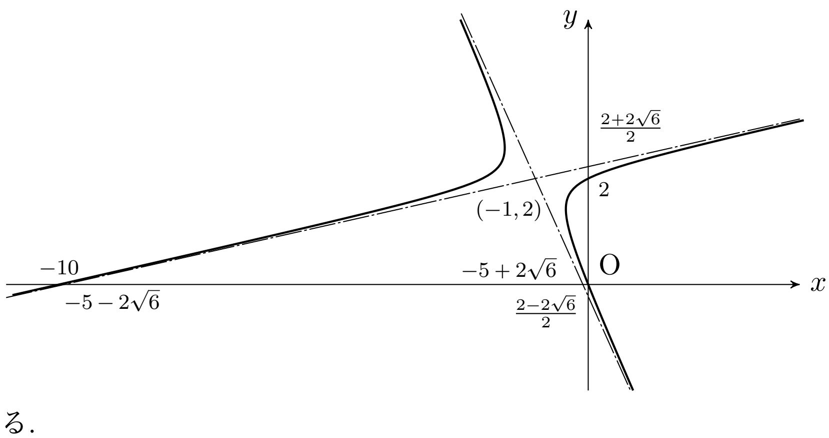
である. また 8.3.1(1) に鑑みて

$$P=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$$

と書ける. この場合 θ は第 4 象限にある角（およそ $-26.565°$）である. よつて (9.3.3) の表す曲線を θ だけ回転させて, さらに vector $[x_0\ y_0]=[-1\ 2]$ の分だけ平行移動させると, 所望の曲線が得られる. 元の座標での漸近線は

$$y-2=\tfrac{\sqrt6-2}{2}(x+1),\quad y-2=\tfrac{-\sqrt6-2}{2}(x+1)$$

であり, その交点 $(-1,2)$ が C の中心である. C と座標軸との交点は $(0,0)$, $(0,2)$, $(-10,0)$ の 3 点. 以上から C の概形を図示すれば,



の様になる. □

2 次曲線の方程式は, 正規直交基を選んで, 対角行列による 2 次形式に変換できたが, 双曲線, 楕円は直交する 2 本の対称軸を持つし, 放物線は対称軸を持つから, 2 次対称行列が直交行列で対角化されるといふ定理 8.5.10 の幾何学的な意味が明断に感じ取れるであらう.

演習問題 9.3

9.3.4 次の 2 次曲線 C の標準形を求めた上で, その概形を描け.

(1) $C:\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$　（答：標準形は $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$）

(2) $C:\ 2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0.$　（答：標準形は $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1.$）

9.4 2 次曲面の分類

この節の目的は, 対称行列が直交行列により対角化されることを, 幾何学的な観察を通じて理解すること にある.

空間 $\mathbb{E}^3$ の部分集合 S が 3 変数の実数係数多項式 $F(X,Y,Z)$ によつて

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \mid F(x,y,z) = 0\} \tag{9.4.1}$$

と表はされるとき, S を $\mathbb{E}^3$ の代数的曲面と呼ぶのであつた（9.1.2 を見よ）.

以下, この節では,

$$\begin{aligned} F(X,Y,Z) &= a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 \\ &\qquad + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY - c \quad (c \neq 0) \end{aligned} \tag{9.4.2}$$

の形の多項式で定義される 2 次曲面 S のみ扱ふ. 本来は 9.3 節の様に X, Y, Z の 1 次の項を含めた形で扱ふべきであるが, 煩雑になるので, ここでは (9.4.2) の形の多項式で定義される 2 次曲面のみに限定して説明する. これ以外の 2 次曲面については [A], §9.4 が詳しい.

以下では, (9.4.2) に基き,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad F(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{x}\,A\,\boldsymbol{x} - c$$

と書く. ここでも A を F の係数行列と呼ぶ. A の対角化を ${}^tTAT = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix}$ とおく. ここで T は直交行列である. $\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ とおくことで, F は

$$F({}^tT\boldsymbol{x}') = b_1{x'}^2 + b_2{y'}^2 + b_3{z'}^2 - c$$

に変換される. 方程式 $F({}^tT\boldsymbol{x}') = 0$ を $c \neq 0$ で割ることにより,

$$a_1\,{x'}^2 + a_2\,{y'}^2 + a_3\,{z'}^2 = 1 \tag{9.4.3}$$

の形になる. これを S の標準形と称する. 以下では $\operatorname{rank}(A) = 3$, 即ち $a_1a_2a_3 \neq 0$ と仮定する.

定義と定理 9.4.4 上記 (9.4.3) の形になつたとき, a_1, a_2, a_3 のうちの正の数の個数 r と負の数の個数 s を記号

$$\operatorname{sgn}(F) = (r,s)$$

で表し, この記号を F の符号数と称する [28]. 固有値の性質から, $\operatorname{sgn}(F)$ は変換する直交行列 T の選び方によらない. 同様の記号は, $\mathbb{R}$ 上の 3 変数以外の 2 次形式（9.2.1）についても定義され, 同様のことが成立する.

[28] 3.1.14 で定義した置換の符号と同じ記号であるが, 混乱はないと信ずる.

ここで, 2 次曲面 (9.4.3) を分類すれば, 次の様になる. それぞれが図に描いた概形になることを理解するためには, それぞれの方程式において x を定数 k とした方程式が, 平面 $x = k$ の上に描く図形を表してゐることを踏まへればわかるであらう. 或いは, 同様の考察を y や z にも行つてみればよい.

1. $\operatorname{sgn}(F) = (3, 0)$ のとき標準形は
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
となり, 図 9.4.5 の様になる.
これを 楕円面 と呼ぶ.

2. $\operatorname{sgn}(F) = (2, 1)$ のとき標準形は
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
となり, 図 9.4.6 の様になる.
これを 一葉(いちよう)双曲面 と呼ぶ.

3. $\operatorname{sgn}(F) = (1, 2)$ のとき標準形は
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$
となり, 図 9.4.7 の様になる.
これを 二葉(によう)双曲面 と呼ぶ.

4. $\operatorname{sgn}(F) = (0, 3)$ のときは空集合になる.

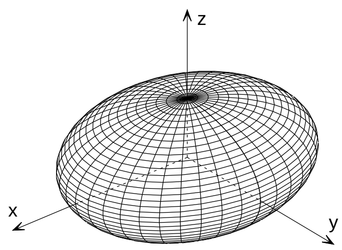


図 9.4.5 楕円面

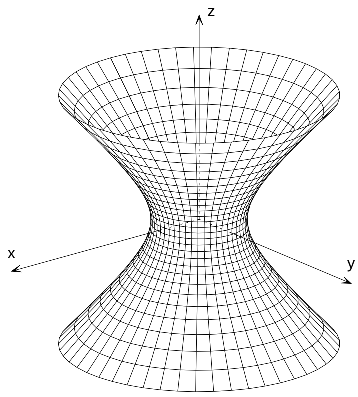


図 9.4.6 一葉双曲面

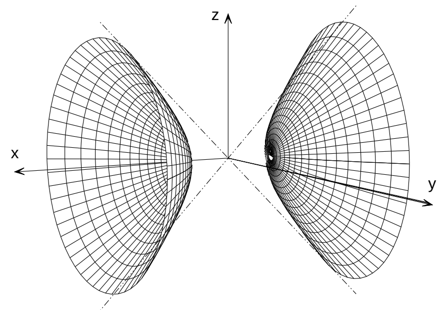


図 9.4.7 二葉双曲面

注意 9.4.8 9.3 と 9.4 で概説した 2 次曲線や 2 次曲面の概念は, 一般の体の上での 2 次形式へと一般化され, 古くから活発に研究されてをり, 厖大な研究が存在する.

例題 9.4.9 方程式 $-5x^2 - 11y^2 + 2z^2 + 12zx + 12zy = 7$ で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ．また得られた標準形の表す曲面の概略（座標軸の名称は入れること）を図示し, その曲面の名称も記せ.

解 与式は

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -11 & 6 \\ 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

を使つて

$$[x\ \ y\ \ z]A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 7$$

と書かれる．固有多項式は $\varphi_A(t) = (t+7)(t-7)(t+14)$ で, 結果的には

$$P = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ とおけば } B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & -7 & \\ & & -14 \end{bmatrix}$$

となる．このとき

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

とおけば, 与式は $7x'^2 - 7y'^2 - 14z'^2 = 7$, 即ち

$$x'^2 - y'^2 - 2z'^2 = 1$$

となる．よつて与へられた方程式が表すのは図 9.4.7 の様な二葉双曲面である． □

演 習 問 題 9.4

9.4.10 次の方程式で定義される 2 次曲面の標準形を求め, 得られた標準形の表す曲面の概略を図示せよ．その際に必ず座標軸の名称を入れよ．また, 新座標を旧座標に変換する直交行列 P と得られた 2 次曲面の名称も記せ.

(1) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 3.$

(2) $-5x^2 + 34y^2 + 13z^2 - 36xy + 36yz = 7.$ （Hint：8.5.17 の結果を利用．）

(3) $-2x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 8xy + 4yz + 4zx = 3.$ （Hint：8.5.14 の結果を利用．）

第 10 章　Vector 空間の直和と最小多項式

これ以降では零多項式 $o(x)$ を単に 0 で表すことにする.

10.1　Vector 空間の部分空間による直和分解

次に述べる vector 空間の直和分解の概念はとても重要である.

定義 10.1.1　Vector 空間 V の部分空間 $W_1, \cdots, W_r$ について, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{w}_i \in W_i$$

と表され, かつ唯 1 通りにしか表せないとき, V は $W_1, \cdots, W_r$ の直和である, または, V は $W_1, \cdots, W_r$ によつて直和分解される, などといはれ,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r \quad \left(\text{または} \quad V = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i \right)$$

と表記される. この状況で, 各 W_i は V の直和因子と呼ばれる. また, 上記で, 各 $\boldsymbol{v}$ に対し一意的に定まる $\boldsymbol{w}_i$ を $\boldsymbol{v}$ の W_i 成分と呼ぶ.

例 10.1.2　7.7.12 に挙げた等式は, 上の状況が成り立つてゐる一例である.

問 10.1.3　$V = \mathbb{R}^3$ とする. 次の各問において $V = W_1 + W_2$（この記号については 6.2.11 参照）, $V = W_1 \oplus W_2$ のそれぞれが成り立つか否かを理由を付けて答へよ.

(1) $W_1 = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}.$

(2) $W_1 = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| c,\ d \in \mathbb{R} \right\}.$

(3) $W_1 = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{R} \right\}, \quad W_2 = \left\{ c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}.$

問 10.1.4　$B = \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の基とする. これを $B_1, \cdots, B_r$ に分割して $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$（$i \neq j$ のとき $B_i \cap B_j = \varnothing$）とし, 各 $1 \leqq i \leqq r$ について, W_i を B_i で生成される部分空間とする. このとき $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ である. これを示せ.

問 10.1.5　Vector 空間 V が $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ と直和に分解してゐるとし, 各部分空間 W_i の基 $B_i = \{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{ir_i}\}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ をとつておく. このとき, これらの全体 $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ は V の基である. これを証明せよ.

問 10.1.6　$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ のとき, $\dim(V) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_r)$ であることを示せ.

ここで 6.2.11 で述べた, 部分空間の和の記号 $W_1 + \cdots + W_r = \sum_{i=1}^{r} W_i$ を思ひ出さう.

定理 10.1.7 V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間, W_i $(1 \leqq i \leqq r)$ は V の部分空間であるとし, $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ であるとする. 次の 3 つは同値である.
(1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ (直和分解),
(2) 任意の $2 \leqq k \leqq r$ に対し, $(W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k = \{\mathbf{0}\}$,
(3) 任意の $1 \leqq k \leqq r$ に対し, $W_k \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} W_j = \{\mathbf{0}\}$.

証明 (1)⇒(2). (2) の等式がある $2 \leqq k \leqq r$ で不成立であるとせよ：

$$(W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k \neq \{\mathbf{0}\}.$$

このとき $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{w}_k \in (W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k$ なる $\boldsymbol{w}_k$, および $\boldsymbol{w}_j \in W_j$, $(1 \leqq j \leqq k-1)$ が存在して

$$\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{k-1}$$

と表はされてゐる. 従つて

$$\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{k-1} - \boldsymbol{w}_k$$

と $\mathbf{0}$ が 2 通りに表はされることになり矛盾である.
(2)⇒(1). ある $\boldsymbol{v} \in V$ が 2 通りに

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{r-1} + \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2 + \cdots + \boldsymbol{w}'_{r-1} + \boldsymbol{w}'_r$$

と表はされたとせよ. この 2 式の差を取れば

$$(\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}'_1) + (\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}'_2) + \cdots + (\boldsymbol{w}_{r-1} - \boldsymbol{w}'_{r-1}) = \boldsymbol{w}'_r - \boldsymbol{w}_r$$

となる. これと仮定から $\boldsymbol{w}'_r = \boldsymbol{w}_r$ でなければならない. 同様な議論を繰り返せば,

$$\boldsymbol{w}'_r = \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{w}'_{r-1} = \boldsymbol{w}_{r-1}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{w}'_1 = \boldsymbol{w}_1$$

がわかり, (1) が成り立つことがわかる.
(2) ⇒ (3) は (1) と (2) の同値性, および (1) の直和は順序に依らないことを考慮すれば, $W_1, \cdots, W_r$ の順序を入れ替へた上で, (2) の $k = r$ の場合を使へばわかる.
(3) ⇒ (2) は

$$\{\mathbf{0}\} = W_k \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} W_j \supset W_k \cap (W_1 + \cdots + W_{k-1}) \supset \{\mathbf{0}\}$$

ゆゑ成り立つ. □

定義 10.1.8 Vector 空間 V の部分空間 W が与へられたとき,

$$V = W \oplus W'$$

を満たす部分空間 W' を W の補空間と呼ぶ.

注意 10.1.9 Vector 空間 V と任意の部分空間 $W \subset V$ に対し, 10.1.8 により, その補空間が必ず存在する. しかし, もちろん, 補空間は W から一意的に定まるわけではない. 8.1.13 で述べた直交補空間 $W^{\perp}$ は補空間の特殊な例である. 演習問題 10.1.11 としておく.

線形変換に関する記法 (7.1.8 も参照). ここで記法の変更を行ふ. 線形変換 $T : V \to V$ について, 今まで主に $\mathrm{Im}(T)$ と書いてきたものを, 以降は原則として $T(V)$ と記す:

$$T(V) = \mathrm{Im}(T).$$

但し $\mathrm{Im}(T)$ を使用することもあり得る. また, $\mathrm{Ker}(T)$ を $T^{-1}(\mathbf{0})$ とも記す:

$$T^{-1}(\mathbf{0}) = \mathrm{Ker}(T).$$

演 習 問 題 10.1

10.1.10 線形空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 $\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ に対し, これの相異なる 2 つの補空間を具体的に挙げよ.

10.1.11 内積空間 V とその部分空間 W に対し, 8.1.13 で定義した直交補空間

$$W^{\perp} = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid \text{すべての } \boldsymbol{v} \in W \text{ に対して } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \,\}$$

を考へる. このとき $V = W \oplus W^{\perp}$ であることを証明せよ.

10.1.12 Vector 空間 V とその部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ について, $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとする. このとき, 次のことを示せ.
$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ であるためには, $\mathbf{0} \in V$ が $W_1, \cdots, W_s$ に属する vectors の和として一意的に表示されること, 即ち, もし $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in W_s$ について $\mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ ならば $\boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_s = \mathbf{0}$ となること, それが必要十分である.

10.1.13 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を V の基とする. 最初の r 個 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ で生成される部分空間を W とすると, 残りの $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ で生成される部分空間 W' は W の補空間であることを示せ.

10.2　線形変換の直和と行列の直和

以下すべて, 一般の体 $\mathbf{K}$ 上で考へる.

定義 10.2.1　Vector 空間 V が部分空間 $V_1, \cdots, V_r$ によつて

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

と直和分解されてゐるとする. V の各 vector に対し, 対応する V_j 成分は, その vector に番号 j を添字に付けて表すことにする. 即ち $\boldsymbol{v} \in V$ のとき

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r \quad (\boldsymbol{v}_j \in V_j,\ 1 \leqq j \leqq r).$$

V の線形変換 S, および, 各 V_j の線形変換 S_j が, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について

$$S(\boldsymbol{v}) = S_1(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + S_r(\boldsymbol{v}_r) \tag{10.2.2}$$

を満たすとき, 即ち, 任意の $\boldsymbol{v}_j \in V_j$ について $S(\boldsymbol{v}_j) = S_j(\boldsymbol{v}_j)$ $(1 \leqq j \leqq r)$ のとき, S は $S_1, \cdots, S_r$ の直和であると言はれ,

$$S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$$

と略記される. これの右辺を S の直和分解とも言ふ.

問 10.2.3　上の 10.2.2 の状況の下で, $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $S_j(\boldsymbol{v}) = S_j(\boldsymbol{v}_j)$ と定めて定義域を V に拡張する. このとき $i \neq j$ ならば $S_i S_j = O$ である. これを示せ.

例 10.2.4　Vector 空間 V の線形変換 $S : V \to V$ と V の部分空間 V_i への直和分解

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$$

が与へられ, すべての i について $S(V_i) \subset V_i$ であるとせよ. このとき, 写像 (射影子)

$$\mathrm{pr}_i : V \longrightarrow V_i, \quad \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}_i \tag{10.2.5}$$

(但し, $\boldsymbol{v}_i$ は $\boldsymbol{v}$ の V_i 成分) により $S_i = S \circ \mathrm{pr}_i$ とおくと, $S(\boldsymbol{v}_i) = S(\mathrm{pr}_i(\boldsymbol{v}_i)) = S_i(\boldsymbol{v}_i)$ ゆゑ,

$$\begin{aligned} S_i S_j = O, \quad S(\boldsymbol{v}) &= S(\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_r) \\ &= S(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + S(\boldsymbol{v}_r) = S_1(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + S_r(\boldsymbol{v}_r) \end{aligned}$$

である. ゆゑに, $S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ である.

写像の直和に対応して行列の直和も定義しておく.

定義 10.2.6 正方行列 $A^{(i)} \in \mathrm{Mat}(n_i, \mathbf{K})$ $(i = 1, \cdots, r)$ について, 行列

$$A = \begin{bmatrix} A^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & A^{(r)} \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K}) \quad (n = n_1 + \cdots + n_r)$$

を $A^{(1)}, \cdots, A^{(r)}$ の直和と呼び, 次の様に表す:

$$A = A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \cdots \oplus A^{(r)}.$$

さらに, A のうち $A^{(i)}$ 以外の成分をすべて 0 としたものを A_i と記す:

$$A_i = \begin{bmatrix} O & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & O & & & & \\ & & & A^{(i)} & & & \\ & & & & O & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & O \end{bmatrix}.$$

このとき, $T_A = T_{A_1} \oplus T_{A_2} \oplus \cdots \oplus T_{A_r}$ が成り立つ.

注意 10.2.7 上記について補足する. 例へば $W = \mathbb{R}[x]_2$ は $V = \mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である. この状況で $f(x) = 2 + 3x$ は W の要素であるが, そのまま V の要素とも見做される. しかし, 通常, $W = \mathbb{R}^3$ は $V = \mathbb{R}^5$ の部分空間とは直ちには見做せない. この場合は, 例へば

$$W' = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5 \middle| x_1 = x_2 = 0 \right\}$$

とおけば W' は V の部分空間であることに異論はない. しかし, 時に（文脈から推測できるであらうと判断される場合）断りなく W と W' と同一視することがある. 例へば 10.2.6 の状況において,

$$V_i = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbf{K}^n \middle| x_{n_{i-1}+1}, \cdots, x_{n_i} \text{ 以外の成分はすべて } 0 \right\}$$

を $\mathbf{K}^{n_i}$ と同一視して $T_{A_i} : V_i \to V_i$ と $T_{A^{(i)}} : \mathbf{K}^{n_i} \to \mathbf{K}^{n_i}$ とを同一視する, といふことがよく行はれる. そもそも両者の表現行列は（しかるべく基を対応させておけば）どちらも $A^{(i)}$ であることに注意されたい. これらの慣習は記述の煩雑さを避けるためであるので, 慣れていただきたい.

次の定理は 11.1.6 の証明などで使用する. また 第 10.5 節でも詳しく述べる.

定理 10.2.8 [29] Vector 空間 V の線形変換 $T_i \neq O$ $(1 \leqq i \leqq r)$ について
(1) $I = T_1 + T_2 + \cdots + T_r$, (ここに I は単位変換. 和の定義は 7.1.19 を見よ)
(2) $i \neq j$ ならば $T_i T_j = O$ (零写像)
の双方が成り立つとせよ. このとき

$$T_i{}^2 (= T_i T_i) = T_i \quad (1 \leqq i \leqq r) \quad \text{で}^{30)} \quad V = T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus \cdots \oplus T_r(V)$$

である. 特に I は $T_1, \cdots, T_r$ の直和である:

$$I = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r.$$

例 10.2.9 正則行列 $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$ と 3 つの行列

$$A_1 = P^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} P, \quad A_2 = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} P, \quad A_3 = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} P$$

について, $T_i = T_{A_i} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{u} \mapsto A_i \boldsymbol{u}$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ とすれば, $I = T_1 + T_2 + T_3$ であり, $i \neq j$ について $T_i T_j = O$ である.

証明 まづ, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について, 条件 (1) から

$$\boldsymbol{v} = I(\boldsymbol{v}) = T_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + T_r(\boldsymbol{v}) \in T_1(V) + \cdots + T(V_r)$$

なので, $V = T_1(V) + \cdots + T(V_r)$ が成り立つ. 一方, 条件 (1) の両辺に T_i を施せば仮定の (2) と 7.1.23 から

$$T_i = T_i I = T_i(T_1 + T_2 + \cdots + T_r) = T_i T_1 + T_i T_2 + \cdots + T_i T_r = T_i T_i$$

となるから, $T_i T_i = T_i$ である. 以上のことと 10.1.7 から, 任意の $2 \leqq k \leqq r$ に対して

(10.2.10) $$\big(T_1(V) + T_2(V) + \cdots + T_{k-1}(V)\big) \cap T_k(V) = \{\mathbf{0}\}$$

であることを示せばよい. $\boldsymbol{w} \in \big(T_1(V) + T_2(V) + \cdots + T_{k-1}(V)\big) \cap T_k(V)$ は

(10.2.11) $$\boldsymbol{w} = T_1(\boldsymbol{v}_1) + T_2(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + T_{k-1}(\boldsymbol{v}_{k-1}) = T_k(\boldsymbol{v}_k), \quad \boldsymbol{v}_j \in V,$$

と表はされる. (10.2.11) の中辺と右辺を T_k で写せば 7.1.23 から

(10.2.12) $$(\mathbf{0} =)\, T_k T_1(\boldsymbol{v}_1) + T_k T_2(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + T_k T_{k-1}(\boldsymbol{v}_{k-1}) = T_k T_k(\boldsymbol{v}_k).$$

一方 (10.2.11) と (10.2.12) 及び前半で示した $T_k T_k = T_k$ を使へば

(10.2.13) $$\boldsymbol{w} = T_k(\boldsymbol{v}_k) = T_k T_k(\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}.$$

よつて (10.2.10) が成り立つ. □

[32] 10.2.8 を 10.5.16 と比較するとよい.
[33] つまり T_i は冪等行列 (射影子) (§10.5 を参照) である.

10.3　最小多項式

ここでは, 固有多項式をさらに精密化した最小多項式と呼ばれるものについて学ぶ.

定義 10.3.1　多項式環 $\mathbf{K}[t]$ の空でない部分集合 M が 2 つの条件
I1　$M + M \subset M$,
I2　$\mathbf{K}[t]\, M \subset M$
を共に満たすならば, M は, この多項式環の ideal であるといはれる.

問 10.3.2　次に挙げる集合から $\mathbb{R}[t]$ の ideal を選び出せ. また, 判断理由も記せ.
(1)　$\{0\}$.　(2)　$\mathbb{R}$.　(3)　$\mathbb{R}[t]$.
(4)　$\{ f(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, f(1) = 0 \}$.　(5)　$\{ f(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, f(1) = 1 \}$.
(6)　$\{ f(t) \in \mathbb{R}[t] \,|\, f(1) = 0,\ f(2) = 0 \}$.　(7)　$\mathbb{R}[t]_3$　(3 次以下の多項式全体).
(8)　$\{ g_1(t)(t-1)^2 + g_2(t)(t^3 - 2t^2 + 1) \mid g_1(t),\ g_2(t) \in \mathbb{R}[t] \}$.
(9)　$f_1(t), \cdots, f_n(t) \in \mathbb{R}[t]$ を選んで固定するときの

$$\{g_1(t)f_1(t) + \cdots + g_n(t)f_n(t) \,|\, g_1(t), \cdots, g_n(t) \in \mathbb{R}[t]\}.$$

定義 10.3.3　0 でない多項式 $f(t) \in \mathbf{K}[t]$ について, $f(t)$ の最高次の係数が 1 であるならば, $f(t)$ は monic であるといはれる.

定理 10.3.4　$\mathbf{K}[t]$ の $\{0\}$ でない ideal M に対し, monic な $p(t) \in \mathbf{K}[t]$ が唯一つ存在して,

$$M = p(t)\,\mathbf{K}[t]$$

となる. この様な状況を M は $p(t)$ で生成されるといふ.

証明　0 を除く M の元の中で, 次数が最小な多項式の 1 つを $g(t)$ とせよ. 任意に $f(t) \in M$ ととれ. このとき, ある $q(t), r(t) \in \mathbf{K}[t]$ により

$$f(t) = g(t)q(t) + r(t), \quad (\ r(t) = 0 \ \ \text{または} \ \ \deg r(t) < \deg g(t)\ )$$ [34]

と書ける. しかるに $r(t) = f(t) - g(t)q(t) \in M$ であるから, $g(t)$ の選び方から $r(t) = 0$ でなければならない. 従つて $M = g(t)\mathbf{K}[t]$ である. $g(t)$ を, その最高次係数を $c(\neq 0)$ で除したものを $p(t)$ とするとき $g(t)\mathbf{K}[t] = p(t)\mathbf{K}[t]$ であるから, 所望の $p(t)$ が得られた. 一意性について: 2 つあれば, 双方が他方の因子で monic なので一致する. □

注意 10.3.5　(1)　10.3.4 は, $\mathbf{K}[t]$ は単項 ideal 整域[35] だといふことである.
(2)　10.3.2 (4) の集合は $(t-1)\,\mathbf{K}[t]$ と書けるが, $t-1$ が 10.3.4 の $p(t)$ に他ならない.
(3)　10.3.2 (6) の集合は $(t-1)(t-2)\,\mathbf{K}[t]$ と書け, $(t-1)(t-2)$ が 10.3.4 の $p(t)$.
(4)　10.3.2 (9) の集合を 10.3.4 によつて $p(t)\,\mathbf{K}[t]$ と書いたとき, $p(t)$ は $f_1(t), \cdots, f_n(t)$ の最大公約数に他ならない. そのことは, 次の 10.3.6 の証明と同様に考へることで理解できるであらう.

[34] deg は多項式の次数を表す.
[35] 可換環論の用語.

補題 10.3.6 多項式 $f_1(t), \cdots, f_n(t) \in \mathbf{K}[t]$ が共通の因子を持たないとき, $g_1(t), \cdots, g_n(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在して,

$$f_1(t)g_1(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t) = 1$$

となる. この等式を $f_1(t), \cdots, f_n(t)$ に対する Bézout 等式と呼ぶ.

証明 まづ, $M = \{ f_1(t)g_1(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t) \,|\, g_1(t), \cdots, g_n(t) \in \mathbf{K}[t] \}$ とおく. M が ideal であることは容易に確かめられる. よつて, 10.3.4 により, ある多項式 $p(t)$ によつて $M = p(t)\mathbf{K}[t]$ と書ける. しかるに $f_1(t), \cdots, f_n(t) \in M$ である (一つの $g_j(t)$ を 1 に, それ以外の $g_i(t)$ $(i \neq j)$ を 0 にとつてみよ) から, $p(t)$ の次数が 0 でなければ, 仮定に矛盾する. $p(t)$ の次数が 0 であれば $M = \mathbf{K}[t]$ となり, 証明は完了する. □

定義 10.3.7 (正方行列の最小多項式) 正方行列 A に対し, $f(A) = O$ を満たす多項式 $f(t) \in \mathbf{K}[t]$ の中で, 次数が最小かつ monic なものを $\mu_A(t)$ で表す. 下記の 10.3.9 から, これは常に存在し, 一意的に定まる. $\mu_A(t)$ を A の最小多項式と呼ぶ.

例 10.3.8 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ について $\varphi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$, $\mu_A(t) = (t-1)(t-2)$, $\varphi_B(t) = \mu_B(t) = (t-1)^3$ である (確かめよ). この様に, 最小多項式と固有多項式は異ることもあれば一致することもあるし, 最小多項式が重根を持つ場合もある.

定理 10.3.9 正方行列 A に対し, 次が成り立つ.
(1) A の最小多項式は存在し, しかも唯 1 つに限る.
(2) λ が A の固有値 $\Longleftrightarrow \mu_A(\lambda) = 0$.
(3) $0 \neq f(t) \in \mathbf{K}[t]$ について, $f(A) = O \Rightarrow \mu_A(t) \,|\, f(t)$. 特に $\mu_A(t) \,|\, \varphi_A(t)$. [36)]

証明 証明を通じて $J = \{ f(t) \in \mathbf{K}[t] \,|\, f(A) = O \}$ と記す.
(1) 7.8.1 (C-H の定理) により $\varphi_A(A) = O$ ゆゑ $\varphi_A(t) \in J$ で $J \neq \varnothing$, $J \neq \{0\}$. J は $\mathbf{K}[t]$ の ideal であることも簡単にわかる. よつて 10.3.4 により monic な $p(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在して $J = p(t)\mathbf{K}[t]$ と一意的に書ける. このとき, 定義により $p(t)$ は最小多項式 $\mu_A(t)$ に他ならないから, 最小多項式は一意的に存在する.
(2) A の任意の固有値 λ について $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ $(\exists \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0})$ だから, 任意の多項式 $f(t)$ について $f(A)\boldsymbol{u} = f(\lambda)\boldsymbol{u}$ が成り立つ. 特に, $\mu_A(t)$ については $\mathbf{0} = O\boldsymbol{u} = \mu_A(A)\boldsymbol{u} = \mu_A(\lambda)\boldsymbol{u}$ ゆゑ, $\mu_A(\lambda) = 0$ となり, (2) の $(\Rightarrow)$ が示された. 上で述べた様に $\varphi_A(t) \in J$ であるが, (1) の証明の $p(t)$ の意味から $\varphi_A(t)$ は $p(t) = \mu_A(t)$ で割り切れる. ゆゑに (2) の $(\Leftarrow)$ が成り立つ.
(3) 仮定より $f(t) \in J$ であるから (1) の証明により $\mu_A(t) = p(t) \,|\, f(t)$. □

36) 2 つの多項式 $f(t)$ と $g(t)$ について $g(t)$ が $f(t)$ で割り切れることを $f(t) \,|\, g(t)$ と記す.

一般の線形変換 $T:V\longrightarrow V$ についても, いままでと同様に V の基を定めた上で, その表現行列について考察することで, 次の定義に至る.

定義 10.3.10　Vector 空間 V の線形変換 T に対し, $f(T)=O$ を満たす多項式 $f(t)\in\mathbf{K}[t]$ の中で, 次数が最小で monic な多項式を $\mu_T(t)$ で表す. 次の 10.3.11 により, これは存在し, 一意的に定まる. $\mu_T(t)$ を T の最小多項式と呼ぶ.

問 10.3.11　V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間として, V の基を 1 つ決めて固定する. T を V の線形変換とし, A をその基に関する T の表現行列とせよ. また $f(t)$ を $\mathbf{K}$ 上の t の多項式とする. 以下のことが成り立つことを示せ.　（Hint : 7.4.2）

(1) $f(t)\in\mathbf{K}[t]$ について, $f(T)=O$（零変換） $\Longleftrightarrow$ $f(A)=O$（零行列）.

(2) $\mu_T(t)=\mu_A(t)$. 特に $\mu_T(t)$ は存在し, しかも唯 1 つしか存在しない.

(3) λ が T の固有値 $\Longleftrightarrow \mu_T(\lambda)=0$. （Hint : 上の (2) と 10.3.9(2) と 7.6.2）

(4) $0\neq f(t)\in\mathbf{K}[t]$ について, $f(T)=O \Rightarrow \mu_T(t)\,|\,f(t)$. 特に $\mu_T(t)\,|\,\varphi_T(t)$ である.

定理 10.3.12　$\mathbb{C}$ 上の線形変換 $T:V\to V$ が対角化可能であるためには, $\mu_T(t)$ が重根を持たないことが必要十分である.

証明　T の異なる固有値を $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ とする.
（必要性）7.7.12 により, 各 $W(\lambda_i,T)$ の基を選んで, それらを集めた vectors が V の基となる. いま T は対角化可能なので, 固有値の意味から, その表現行列は対角成分には各 λ_i が $\dim W(\lambda_i,T)$ づつ並んだ対角行列になる. その表現行列の最小多項式が $(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_r)$ となることは容易に確かめられる.
（十分性）　$\dim V=n$, $W(\lambda_i,T)=W_i$ とおく. 仮定より

$$(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\cdots(T-\lambda_r I)=O.$$

7.1.24 を繰り返して使ふことにより

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(T-\lambda_1 I)+\operatorname{rank}(T-\lambda_2 I)+\cdots+\operatorname{rank}(T-\lambda_r I)-(r-1)n&\\ \leqq \operatorname{rank}(O)=0.&\end{aligned}$$

一方 $W_i=\operatorname{Ker}(T-\lambda_i I)$ であるから 7.1.14 により

$$\dim W_i+\operatorname{rank}(T-\lambda_i I)=\operatorname{null}(T-\lambda_i I)+\operatorname{rank}(T-\lambda_i I)=n.$$

これらを合はせれば

$$\dim W_1+\dim W_2+\cdots+\dim W_r\geqq n$$

がわかるが [37], 7.7.6 から, この不等式は等式でなければならない. よつて, 7.7.11 により T は対角化可能であることがわかる. □

[37] もし $\mu_A(t)$ が重根を持てば, この和が重複した項を有してしまふことに注意.

注意 10.3.13 上の十分性の証明について補足しておく. 一般に, 線形変換 T の異なる固有値の全体を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ とし, $W_i = W(\lambda_i, T)$ と記せば, 7.7.22 と 10.1.9 により, V の部分空間 U が存在して,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r \oplus U$$

と書ける. 一方, 上で述べた通り 7.1.14 より,

$$\mathrm{rank}\,(T - \lambda_i I) = n - \dim W_i \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

である. 一方, 10.3 の導出と同様に（以下 $\prod(T-\lambda_j I)$ は $(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_r I)$ の意）

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}\,(T-\lambda_1 I) + \mathrm{rank}\,(T-\lambda_2 I) + \cdots + \mathrm{rank}\,(T-\lambda_r I) - (r-1)n \\ &\quad \leqq \mathrm{rank}\,\big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big) = \dim\big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big)(V) = \dim\big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big)(U)\end{aligned}$$

を得る. さらに同様に, これらを合はせて,

$$\dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_r + \dim\big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big)(U) \geqq n$$

を得る. ここで 7.6.8 より, 実際は

$$\mathrm{Im}\big((T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_{j-1} I)\big) \supset W_j \oplus \cdots \oplus W_r \supset W_j = \mathrm{Ker}(T-\lambda_j I)$$

ゆゑ, 7.1.24 の証明で述べたことから 7.1.24 を適用した結果はどれも等式であつて,

$$\dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_r + \dim\big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big)(U) = n.$$

以上は $\mu_T(t)$ が重根を持つか否かに関係なく成り立つことに注意されたい.
さて, ここで $\mu_T(t)$ が重根を持たないと仮定すると

$$\big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big)(U) = \big(\textstyle\prod(T-\lambda_j I)\big)(V) = O(V) = \{\mathbf{0}\}$$

であるから,（7.7.6 を使はずに）10.3 が得られる.

演 習 問 題 10.3

10.3.14 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$, $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ について等式 $\mu_{P^{-1}AP}(t) = \mu_A(t)$ を証明せよ.

10.3.15 行列 $A \in \mathrm{Mat}(m+n, \mathbf{K})$ が 2 つの行列 $B \in \mathrm{Mat}(m, \mathbf{K})$ と $C \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ によつて $A = \begin{bmatrix} B & \\ & C \end{bmatrix}$ と書かれるとき $\mu_A(t)$ は $\mu_B(t)$ と $\mu_C(t)$ の最小公倍多項式であることを示せ.（Hint : 任意の多項式 $f(t)$ について行列 $f(A)$ を $f(B)$ と $f(C)$ で表せ.）

10.3.16 次の行列の最小多項式を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$

補足. 上の 10.3.16 に挙げた行列は Jordan（ジョルダン）[38] 行列と呼ばれるものである. 体 $\mathbf{K}$ が代数的閉体 [39]（$\mathbb{C}$ など）であれば, $\mathbf{K}$ に成分をもついかなる正方行列も, ある Jordan 行列に相似であり, そのことから最小多項式が直ちにわかるのである.（第 11 章 で学ぶ.）

[38] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) France 生.
[39] $\mathbf{K}[t]$ 内のどの多項式も 1 次式のみの積に因数分解される様な体 $\mathbf{K}$ のこと（「代数学 5 及び 6」で学ぶ）.

10.4 可換な線形変換, 可換な行列

ここで, 行列の積の可換性と対角化可能性の関係について, いくつか述べておく.

定義 10.4.1 (7.4.8 の再掲) 線形変換 $T : V \to V$ と V の部分空間 W について, $T(W) \subset W$ であるとき, W は T に関して (T で) 不変であるといはれる.

上の 10.4.1 の状況下で, W の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ をとり, それを延長 (6.6.1 参照) して $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の基とすれば, この基に関する表現行列は $\begin{bmatrix} B & D \\ & C \end{bmatrix}$ の形になる. ここで $B \in \mathrm{Mat}(r, \mathbf{K})$, $C \in \mathrm{Mat}(n-r, \mathbf{K})$, $D \in \mathrm{Mat}(n, n-r, \mathbf{K})$ である.

命題 10.4.2 V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. T_1, T_2 がともに V の $\mathbb{C}$ 上の線形変換で $T_1T_2 = T_2T_1$ であるとき, 次が成り立つ.
(1) T_1 のどの固有空間も T_2 で不変である.
(2) T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.

証明 (1) λ が T_1 の 1 つの固有値で $\boldsymbol{u} \in W(\lambda, T_1)$ であれば, $T_1(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ ゆゑ,

$$T_1\bigl(T_2(\boldsymbol{u})\bigr) = (T_1T_2)(\boldsymbol{u}) = (T_2T_1)(\boldsymbol{u}) = T_2\bigl(T_1(\boldsymbol{u})\bigr) = T_2(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda T_2(\boldsymbol{u})$$

となる. 従つて $T_2(\boldsymbol{u}) \in W(\lambda, T_1)$ である. よつて $T_2\bigl(W(\lambda, T_1)\bigr) \subset W(\lambda, T_1)$ である.
(2) 7.6.4 により, $\mathbb{C}$ 上では, どんな線形変換も少くとも 1 つ固有 vector を持つから, T_2 は (1) の $W(\lambda, T_1)$ の線形変換として固有 vector を持つが, それは T_1 と T_2 に共通の固有 vector に他ならない. □

命題 10.4.3 A, B が $\mathbb{C}$ 上の正方行列で $AB = BA$ であるとき, 次が成り立つ.
(1) A の固有空間に属する $\boldsymbol{u}$ に対し $B\boldsymbol{u}$ はまたその空間に属する.
(2) A と B に共通な固有 vector が存在する.

証明 $T_1 = T_A$, $T_2 = T_B$ として 10.4.2 を用ゐればよい. □

次の様な 10.4.2 の逆に近い主張が成り立つ :

命題 10.4.4 V の線形変換 T_1, T_2 について, T_1 が対角化可能で T_1 の任意の固有空間が T_2 で不変であるとき, $T_1T_2 = T_2T_1$ である.

証明 λ を T_1 の任意の固有値とする. $\boldsymbol{u} \in W(\lambda, T_1)$ のとき, $T_1(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ であるから,

$$(T_1T_2)(\boldsymbol{u}) = T_1(T_2(\boldsymbol{u})) = \lambda T_2(\boldsymbol{u}) = T_2(\lambda\boldsymbol{u}) = T_2(T_1(\boldsymbol{u})) = (T_2T_1)(\boldsymbol{u})$$

となる. 一方, 7.7.12 より V の任意の vector は T_1 の固有空間に属する vectors の和で書けるから, 主張が成り立つ. □

正方行列 A について T_A を考察すれば, 10.4.4 を行列に焼き直した主張も成り立つ.

命題 10.4.5 行列 A_1, $A_2 \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について, A_1 が対角化可能で, A_1 の任意の固有空間が, 写像 $\boldsymbol{u} \mapsto A_2\boldsymbol{u}$ で不変であるならば, $A_1A_2 = A_2A_1$ である.

問 **10.4.6** 任意の $a, b \in \mathbf{K}$ に対し, 次の 2 つの行列は可換であることを確かめよ:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & & \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a & 1 \\ & & & & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b & 1 & & & \\ & b & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & b & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K}).$$

$n \geqq 2$ なら, これらの行列は対角化できないことも示せ.

演 習 問 題 10.4

10.4.7 次の 2 つの行列について $AB = BA$ であることを確かめ, A と B の共通の固有 vectors をすべて求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

(2) $A = \begin{bmatrix} 33 & 17 & -22 \\ -13 & -4 & 9 \\ 35 & 20 & -23 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -31 & -15 & 21 \\ -10 & -6 & 7 \\ -50 & -25 & 34 \end{bmatrix}$ [40].

10.4.8 T を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V の対角化可能な線形変換とせよ. $W_1, W_2 \subset V$ を V の 2 つの部分空間とし, $V = W_1 \oplus W_2$ と直和分解されてゐるとする. さらに W_1 と W_2 はそれぞれ T によつて不変, 即ち $T(W_1) \subset W_1$, $T(W_2) \subset W_2$ であると仮定する. このとき $T|_{W_1}, T|_{W_2}$ はどちらも対角化可能であることを示せ.

(Hint: W_1 の基と W_2 の基を合はせた vectors を V の基にとれば, T の表現行列は $T|_{W_1}$ の表現行列と $T|_{W_2}$ の表現行列が対角に並んだ行列になつてゐる. ここで 10.3.15 を使ふと $T|_{W_1}, T|_{W_2}$ の最小多項式は T の最小多項式の約数であることがわかる. この状況で 10.3.12 を用ゐてみよ.)

10.4.9 T_1, T_2 はともに, $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V の対角化可能な線形変換であるとし, $T_1T_2 = T_2T_1$ が成り立つてゐるとする. このとき V の基が存在して, その基に対する T_1 と T_2 の表現行列がどちらも対角行列になる. これを証明せよ.

(Hint : 10.4.2 を使ふ.) (この様な状況を, T_1 と T_2 は同時対角化可能であると言ふ.)

---

[40] この問題は $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix},$
$A = PA_1P^{-1}, \quad B = P({B_1}^2 + 2B_1)P^{-1}$ として作つたものである.

10.5　冪等変換（射影変換），射影子，冪零変換

始めに射影子 (射影行列) と冪等変換 (冪等行列) について述べる．

> **定義 10.5.1**　Vector 空間 V が部分空間 V_1, V_2 の直和であるとする: $V = V_1 \oplus V_2$. 各 $\boldsymbol{v} \in V$ について，これを $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$ と書くとき，$\boldsymbol{v}$ にその V_1 成分と呼ぶべき $\boldsymbol{v}_1$ を対応させる写像 $T: V \to V_1 \subset V$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v}_1$ は V の線形変換である (下記の 10.5.2)．これは V から V_1 への射影子と呼ばれる．

問 10.5.2　射影子は線形変換であることを示せ．

上の 10.5.1 の状況のとき，$T^2 = T$ である．実際，$\boldsymbol{v}_1$ の V_1 成分は $\boldsymbol{v}_1$ 自身なのだから，$T^2(\boldsymbol{v}) = T(T(\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{v}_1 = T(\boldsymbol{v})$. 定義から直ちに，次のことがわかる：

$$\boldsymbol{v} \in V_1 \iff T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \iff (I - T)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{v} \in V_2 \iff T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \iff (I - T)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}.$$

> **定義 10.5.3**　線形変換 T が $T^2 = T$ を満たすとき，T は冪等(べきとう)変換と呼ばれる．

上に述べたことから，射影子は冪等変換である．この逆も正しい．即ち次が成り立つ．

> **命題 10.5.4**　Vector 空間 V の冪等変換 T が与へられたとき
> $$V_1 = \{\,\boldsymbol{u} \in V \mid T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\,\}, \quad V_2 = \{\,\boldsymbol{u} \in V \mid T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\,\}$$
> とおくと，$V_1 = T(V)$, $V_2 = (I-T)(V)$, $V = V_1 \oplus V_2$ が成り立つ．

証明　$V_1 = T(V)$, $V_2 = (I-T)(V)$ は問 (10.5.5) とし，$V = V_1 \oplus V_2$ のみを示す．
任意の $\boldsymbol{v} \in V$ について

$$T(\boldsymbol{v}) + (I-T)(\boldsymbol{v}) = (T + (I-T))(\boldsymbol{v}) = I(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

であるから，$V = V_1 + V_2$ が成り立つ．一方，$\boldsymbol{v} \in V_1 \cap V_2$ とすると，$T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ かつ $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{v} = T(\boldsymbol{v}) = T^2(\boldsymbol{v}) = T(T(\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ であるから $V_1 \cap V_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ である．従つて 10.1.7 により $V = V_1 \oplus V_2$ である．□

問 10.5.5　10.5.4 のうち，$V_1 = T(V)$, $V_2 = (I-T)(V)$ を証明せよ．

注意 10.5.6　上のことから射影子と冪等変換は同一の概念であることがわかつた．

冪等変換 $T: V \longrightarrow V$ について $V_1 = T(V)$, $V_2 = (I-T)(V)$ とし，V_1 の基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$, V_2 の基を $\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とすれば，これらの和集合が V の基となる．
ここで，$T(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq r)$, $T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{0}$ $(r+1 \leqq i \leqq n)$ であるから，

$$\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_r), T(\boldsymbol{u}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n) \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

（1 が r 個並ぶ）

となり，この表現行列を A と書けば $A^2 = A$ である．

定義 10.5.7 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ が等式 $A^2 = A$ を満たすとき, A は冪等行列 または射影行列と呼ばれる.

また, 前 page 最後に述べた状況で, 各 $\boldsymbol{v} \in V$ を $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ （$\boldsymbol{v}_1 \in V_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in V_2$）となる $\boldsymbol{v}_2$ に写す写像 $V \longrightarrow V_2$, $\boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{v}_2$ の表現行列は, 行列 A を使つて $I - A$ となり,

$$(I - A)^2 = I - A, \quad A(I - A) = (I - A)A = O$$

が成り立つことが簡単に確かめられる.

問 10.5.8 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ を冪等行列とせよ. 以下のそれぞれを示せ.

(1) A の最小多項式 $\mu_A(t)$ は $t^2 - t$ の約数である. 従つて A の固有値は 0 または 1 である.

(2) $W_0 = W(0, A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$, $\quad W_1 = W(1, A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\}$ とせよ. このとき, $W_0 \oplus W_1 = \mathbf{K}^n$ であることを示せ.

(3) $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ が存在して,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となることを示せ.

(4) $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rank}\,(A)$ であることを示せ. （Hint : 6.4.13 (3) と 7.7.21 (2)）

注意 10.5.9 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ が $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ によつて対角化されたとき,

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1} \tag{10.5.10}$$

$$= \lambda_1 P \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \lambda_1 P \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \cdots + \lambda_n P \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

となる. 右辺は, 互ひの積が O である様な射影行列（冪等行列）の 1 次結合になつてゐることに注意されたい. 有限次元の線形代数学においては, 読者は射影行列や上の式にあまり重要性を感じないかも知れないが, (10.5.10) が, 対角化とは, 互ひの積が O である様な射影行列の和に分けることに他ならない, といふことを示してゐることを感じていただきたい. 無限次元の線型代数学（函数解析学）において, (10.5.10) に対応するものは spectrum 分解（12.5.10 参照）と呼ばれ, 非常に重要なものである. 興味のある読者は, 例へば,

竹之内 脩 著, 函数解析, 朝倉書店 （初版は 1963 年）

の第 3 章を覗いて見られたい.

次に冪零行列や冪零変換について述べておく.

定義 10.5.11　A を正方行列とする. $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき, A は冪零行列と称される. また, 線形変換 T について, $m \in \mathbb{N}$ が存在して $T^m = O$ となるとき, T は冪零変換(べきれい)と呼ばれる.

問 10.5.12　$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$ と任意の 3 次正則行列 P について $P^{-1}AP$ が冪零行列であることを示せ.

命題 10.5.13　V のある基を固定し, その基に関する V の線形変換 T の表現行列を A とせよ. 次の 4 つは同値である.
(1) T は冪零変換.
(2) A は冪零行列.
(3) T の固有値は 0 のみである.
(4) A の固有値は 0 のみである.

証明　(1) $\Leftrightarrow$ (2). $\ell \in \mathbb{N}$ について T^ℓ の表現行列は, 7.3.8 より A^ℓ であるから明らか.
(3) $\Leftrightarrow$ (4) は 7.6.2 からわかる.
(1) $\Rightarrow$ (3). λ を T の固有値とし, $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ なる $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を採れ. いま, ある $k \in \mathbb{N}$ があつて $T^k = O$ であるから, $\boldsymbol{0} = T^k(\boldsymbol{u}) = \lambda^k\boldsymbol{u}$. ゆゑに $\lambda = 0$ でなければならない.
(4) $\Rightarrow$ (2). A の次数を n とする. 仮定より $\varphi_A(t) = t^n$. 7.8.1 (C-H) より $A^n = O$. つまり, A は冪零行列である. □

注意 10.5.14　10.5.13 と 10.3.9(3) により冪零行列の最小多項式は t の冪である. また, 10.5.13 と 10.3.11(3) により冪零変換の最小多項式も t の冪である.

演 習 問 題 10.5

10.5.15 可換な 2 つの冪零行列の scalar 倍, 和, 積は冪零行列であることを示せ. このことから, 可換な 2 つの冪零変換の scalar 倍, 和, 積のどれも, 冪零変換である.

10.5.16 $m-1$ 個の行列 $A_1, \cdots, A_{m-1} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ が

$$A_iA_j = \delta_{ij}A_i \quad (1 \leqq i \leqq m-1,\ 1 \leqq j \leqq m-1)$$

を満たすとする. この様な行列の組を直交冪等行列系と呼ぶ. この様な組について, $A = A_1 + \cdots + A_{m-1}$ とおくと

$$A^2 = A, \quad AA_i = A_iA = A_i \ \ (1 \leqq i \leqq m-1),$$
$$A\mathbf{K}^n = A_1\mathbf{K}^n \oplus \cdots \oplus A_{m-1}\mathbf{K}^n$$

が成り立つ. さらに $A_m = I - A$ とおくと

$$A_1 + \cdots + A_m = I, \quad A_iA_j = \delta_{ij}A_i \quad (1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq m),$$
$$\mathbf{K}^n = A_1\mathbf{K}^n \oplus \cdots \oplus A_m\mathbf{K}^n$$

が成り立つ. これらのことを証明せよ. (本問と 10.2.8 と比較してみよ.)

10.5.17 対角化可能な冪零行列は零行列のみであることを示せ.

10.5.18 (Skolem-Noether[41] の定理) $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ は, 零写像ではなく, 任意の $X, Y \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$, 任意の $c \in \mathbf{K}$ について

$$f(X+Y) = f(X) + f(Y), \quad f(cX) = cf(X), \quad f(XY) = f(X)f(Y)$$

を満たすとする. (このことを, f は $\mathbf{K}$ 上の環としての $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ の自己準同型である, といふ.) このとき, $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ が存在して, 任意の $X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ に対して

$$f(X) = P^{-1}XP \tag{10.5.19}$$

となることを証明せよ. ([S], p.127 より)

(Hint : (i, j) 成分が 1 でそれ以外の成分がすべて 0 である行列 I_{ij} について $f(I_{ij})$ を考察せよ.)

ちなみに, (10.5.19) の形の自己準同型は内部自己同型と呼ばれる. ゆゑに, 上の事実は, 行列全体のなす環の非自明な自己準同型は内部自己準同型に限る, と述べられる.

[41] Thoralf Albert Skolem (1887-1963) Norway 生. Amalie Emmy Noether (1882-1935) Germany 生. 最初に Skolem により発見されたが, Noether はそれを知らずに再発見した.

第 11 章　Jordan 標準形

11.1　準固有空間

対角化できない行列に対しても, 対角行列に近い形の標準形が, いろいろ知られてゐる. ここでは, その中で代表的な Jordan 標準形について述べる. そのために, 固有空間の概念を拡張しておく必要がある. この節を通して, すべての vector 空間は $\mathbf{K}=\mathbb{C}$ 上のものに限られる. また, すべての行列はその成分が $\mathbf{K}=\mathbb{C}$ の元であるものとする. 実際は, $\mathbf{K}$ が代数的閉体であればよいが, この概念の説明の手間を省くために, この節では $\mathbf{K}=\mathbb{C}$ とする.

定義 11.1.1　線形変換 T の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とし,
$$\varphi_T(t)=\prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)^{n_i}$$
とする. このとき, 各 i について n_i を α_i の重複度と呼ぶ. 正方行列 A についても同様で, A の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ として, その固有多項式が
$$\varphi_A(t)=\prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)^{n_i}$$
であるとき, 各 i について n_i を α_i の重複度と呼ぶ.

定義 11.1.2　T を V の線形変換とする. I は今までの通り恒等写像を表すものとする. T の固有値 λ に対し
$$\widetilde{W}(\lambda, T)=\{\,\boldsymbol{u}\in V \mid (T-\lambda I)^{\ell}(\boldsymbol{u})=\mathbf{0}\ \ (\exists \ell\in\mathbb{N})\,\}$$
とおく. これを T の λ に関する準固有空間と呼ぶ.　正方行列 A についても
$$\widetilde{W}(\lambda, A)=\widetilde{W}(\lambda, T_A)$$
と記して A の準固有空間と呼ぶ.

問 11.1.3　11.1.2 の記号の下で, $\widetilde{W}(\lambda, T)$ は V の部分空間であることを示せ.

問 11.1.4　次の行列 A で定められる線形変換 $T_A:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, $T_A(\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{u}$ に対し, T_A の固有値, および, 各固有値に対する固有空間と準固有空間を求めよ.

(1) $A=\begin{bmatrix}3&1&\\&3&1\\&&3\end{bmatrix}$.　　(2) $A=\begin{bmatrix}1&3&\\&2&5\\&&2\end{bmatrix}$.

注意 11.1.5 (1) 11.1.2 の状況で, 明らかに $W(\alpha_i, T)$ は $\widetilde{W}(\alpha_i, T)$ の部分空間である.
(2) 次の 11.1.6 (3) と 7.7.9 の証明から, 線形変換 T が対角化できる場合は,
$$W(\alpha_i, T)=\widetilde{W}(\alpha_i, T)$$
となる. 読者には, ここで 10.3.12 を, 再度, 視野に入れて考察されたい.

次の定理にこの章の多くの重要な内容が詰まつてゐる.

> **定理 11.1.6** V の線形変換 T の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とする. 次が成り立つ.
>
> (1) 各 i について, T により $\widetilde{W}(\alpha_i, T)$ は それ自身へ写像される.
>
> (2) V は $\widetilde{W}(\alpha_i, T)$ ($1 \leqq i \leqq r$) の直和に分解される： $V = \bigoplus_{i=1}^{r} \widetilde{W}(\alpha_i, T)$.
>
> (3) α_i の重複度を n_i とすれば $\dim \widetilde{W}(\alpha_i, T) = n_i$.

証明 (1) 固有値の番号 i を固定する. $\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ ならば, ある $m \in \mathbb{N}$ について $(T - \alpha_i I)^m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ であるが, 任意の $m \in \mathbb{N}$ について T と $(T - \alpha_i I)^m$ は可換ゆゑ,

$$(T - \alpha_i I)^m\bigl(T(\boldsymbol{u})\bigr) = T\bigl((T - \alpha_i I)^m(\boldsymbol{u})\bigr) = T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}.$$

よつて $T(\boldsymbol{u}) \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ がわかつた.

(2) T の固有多項式 $\varphi_T(t) = \prod_{j=1}^{r}(t - \alpha_j)^{n_j}$ の因子として $f_i(t)$ を次の様に定める：

$$f_i(t) = \prod_{j \neq i}^{r}(t - \alpha_j)^{n_j}.$$

$f_1, \cdots, f_r$ は共通因子を持たないから 10.3.6 より多項式 $g_1, \cdots, g_r \in \mathbf{K}[t]$ が存在して

$$1 = g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) + \cdots + g_r(t)f_r(t) \tag{11.1.7}$$

となる. $T_i = g_i(T)f_i(T)$ とおくと, この T_i は 10.2.8 の条件 (1), (2) を満たす. 実際, 条件 (1) は (11.1.7) から直ちにわかる通り $I = T_1 + T_2 + \cdots + T_r$ であるから成り立つ. 条件 (2) $T_iT_j = O$ ($i \neq j$) に関しては, $g_i(t)f_i(t)$ と $g_j(t)f_j(t)$ の積が $\varphi_T(t)$ で割り切れることと 7.8.1（C-H 定理）とからわかる. 以上から

$$V = T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus \cdots \oplus T_r(V)$$

が成り立つ. このとき, 同時に

$$I = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r \tag{11.1.8}$$

も示された. 以上から, (2) を示すには

$$T_i(V) = \widetilde{W}(\alpha_i, T) \tag{11.1.9}$$

であることを示せばよい. 任意に $\boldsymbol{w} = T_i(\boldsymbol{v}) \in T_i(V)$ ($\boldsymbol{v} \in V$) をとると,

$$\begin{aligned}(T - \alpha_i I)^{n_i}(\boldsymbol{w}) = (T - \alpha_i I)^{n_i}(T_i(\boldsymbol{v})) &= (T - \alpha_i I)^{n_i} g_i(T) f_i(T)(\boldsymbol{v}) \\ &= g_i(T)\,\varphi_T(T)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

となる. 最後の等号は C-H 定理による. よつて $\boldsymbol{w} \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ であり,

$$T_i(V) \subset \widetilde{W}(\alpha_i, T).$$

次に逆の包含関係を示さう. まづ, $\gcd\bigl(t - \alpha_i, g_i(t)f_i(t)\bigr) = 1$ であるから, 再度 10.3.6 を用ゐれば, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し, 多項式 $p(t)$, $q(t)$ が存在して $p(t)(t - \alpha_i)^m + g_i(t)f_i(t)\,q(t) = 1$ となり,

$$p(T)(T - \alpha_i I)^m + T_i\, q(T) = I \tag{11.1.10}$$

である. 任意の $\boldsymbol{w} \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ に対し, $m \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$(T - \alpha_i I)^m(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}. \tag{11.1.11}$$

ここで, $\boldsymbol{w}$ を (11.1.10) の両辺で写し, (11.1.11) を使ふと

$$\boldsymbol{w} = (T_i\, q(T))(\boldsymbol{w}) = T_i\big(q(T)(\boldsymbol{w})\big) \in T_i(V)$$

である. よつて $\widetilde{W}(\lambda_i, T) \subset T_i(V)$. 以上で $T_i(V) = \widetilde{W}(\lambda_i, T)$ が示された.

(3) の証明. $W_i = \widetilde{W}(\alpha_i, T)$, $\dim W_i = n_i{}'$ とおく. $W_1, \cdots, W_r$ の基を選び, それらを並べたものは, 上で示した (2) の結果と 10.1.5 により V の基になる. W_i が T に関して不変なので, この基に関する T の表現行列 A は,

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r \quad \text{（記号は 10.2.6 をみよ）}$$

の形になる. ここに A_i は, いま選んだ W_i の基に関し, T を W_i に制限した線形変換を表現する $n_i{}'$ 次正方行列である. さて, $A_i - \alpha_i I_{n_i{}'}$ は冪零行列である. 実際 T を W_i の線形変換と考へると

$$W_i \supset (T - \alpha_i I)(W_i) \supset (T - \alpha_i I)^2(W_i) \supset \cdots \quad \text{（I は W_i の恒等写像を表す）.}$$

W_i が有限次元であることから, 6.5.18 を使ふと $M \in \mathbb{N}$ が存在して, $\ell \geqq M$ ならば $(T - \alpha_i I)^\ell(W_i) = (T - \alpha_i I)^M(W_i)$ となる. これと 7.2.1 の (3)⇒ (1) によつて $T - \alpha_i I$ は $(T - \alpha_i I)^M(W_i)$ 上で単射. いま $(T - \alpha_i I)|_{W_i}$ が冪零変換でないと仮定すると, 7.1.11 によつて $(T - \alpha_i I)^M(W_i) \neq \{\boldsymbol{0}\}$ であり, $\boldsymbol{u} \in W_i$ が存在して, $(T - \alpha_i I)^M(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ となる. このとき, 上の単射性から, 任意の ℓ について $(T - \alpha_i I)^\ell(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{0}$ となる. これは W_i の定義からして矛盾である. ここで, $(T - \alpha_i I)^\ell|_{W_i}$ の表現行列は $(A_i - \alpha_i I_{n_i{}'})^\ell$ であるから, 10.5.13 により $A_i - \alpha_i I_{n_i{}'}$ は冪零行列である. 従つて, 再び 10.5.13 より, $A_i - \alpha_i I_{n_i{}'}$（$= N_i$ と記す）の固有値は 0 のみであり,

$$t^{n_i{}'} = \varphi_{N_i}(t) = |\,tI_{n_i{}'} - (A_i - \alpha_i I_{n_i{}'})| = |(t + \alpha_i)I_{n_i{}'} - A_i|.$$

ここで t を $t - \alpha_i$ に置き変へて $\varphi_{A_i}(t) = |tI_{n_i{}'} - A_i| = (t - \alpha_i)^{n_i{}'}$ がわかり,

$$\varphi_T(t) = \varphi_A(t) = \prod_i \varphi_{A_i}(t) = \prod_i (t - \alpha_i)^{n_i{}'}.$$

ここで, 2 つ目の等号は 7.5.14 を繰り返し使つて得られる. α_i の重複度は n_i であつたから, この式より $n_i = n_i{}'$ でなければならない. □

注意 11.1.12 以下 11.1.6 の証明中の記号を使ふ. 任意に $\boldsymbol{v} \in V$ をとれば, 一意的に

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{w}_i \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$$

と書ける. 一方, $j \neq i$ のとき $(t - \alpha_i)^{n_i} \mid f_j(t)$ であり, 11.1.6(3) の証明と C-H 定理 7.8.1 から $(A_i - \alpha_i I_{n_i})^{n_i} = O$ であるので, $g_j(A_i) f_j(A_i) = O$. ゆゑに (11.1.7) から $g_i(A_i) f_i(A_i) = I_{n_i}$. $T_j = g_j(T) f_j(T)$ であつたから, 結局 $T_j(\boldsymbol{w}_i) = \delta_{ij} \boldsymbol{w}_j$ と書け,

$$\begin{aligned} g_j(T) f_j(T)(\boldsymbol{v}) &= T_j(\boldsymbol{v}) = T_j(\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_i + \cdots + \boldsymbol{w}_r) \\ &= T_j(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_j(\boldsymbol{w}_j) + \cdots + T_j(\boldsymbol{w}_r) = \boldsymbol{w}_j \end{aligned} \tag{11.1.13}$$

を得る. つまり $g_j(T) f_j(T)$ は V から $\widetilde{W}(\alpha_j, T)$ への射影子 (10.2.5) に他ならない.

命題 11.1.14 λ を線形変換 T の固有値とし, その重複度を m とすると

$$\widetilde{W}(\lambda, T) = \{\,\boldsymbol{u} \,|\, (T-\lambda I)^m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\,\}.$$

証明 11.1.12 の記号で $\lambda = \alpha_j$ であるとし, $g_j(t) = g(t)$, $f_j(t) = f(t)$ と書くことにする. 主張を示すには左辺が右辺に含まれることを示せばよい.
$(t-\lambda)^m f(t) = \varphi_T(t)$ だから C-H 定理 7.8.1 により, $(T-\lambda I)^m f(T) = O$ である. このとき, 任意の $\boldsymbol{w} \in \widetilde{W}(\lambda, T)$ に対し, 11.1.12 の記法の下で, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ ととれば $\boldsymbol{w}_j$ は $\boldsymbol{w}$ に他ならないから, (11.1.13) から $g(T)f(T)(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$ である. ゆえに

$$\begin{aligned}(T-\lambda I)^m(\boldsymbol{w}) &= (T-\lambda I)^m g(T)f(T)(\boldsymbol{w}) \\ &= g(T)(T-\lambda I)^m f(T)(\boldsymbol{w}) = g(T)O(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

よつて $\boldsymbol{w} \in \{\,\boldsymbol{u} \,|\, (T-\lambda I)^m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\,\}$ である. □

例題 11.1.15 次で与へられる線形変換 T について, 下の (i) と (ii) に答へよ:

$$T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \quad T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \quad 但し \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 3 & 5 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

(i) T の固有多項式, 固有値, およびそれぞれ固有値に対する重複度を求めよ.
(ii) 各固有値 λ に対し, 固有空間 $W(\lambda, T)$ と準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda, T)$ を求めよ.

解 (i) $\varphi_T(t) = (t-1)(t-3)^2$, 固有値は 1, 3 で, それぞれの重複度は 1, 2 である.
(ii) 固有空間は

$$W(1,T) = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\},$$

$$W(3,T) = \left\{ c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

11.1.6 の証明の記号を用いて

$$f_1(t) = (t-3)^2, \quad f_2(t) = t-1$$

とおくと, これらに対し互除法を使つて,

$$1 = f_1(t)\,g_1(t) + f_2(t)\,g_2(t),$$

但し, $g_1(t) = \frac{1}{4}$, $g_2(t) = \frac{1}{4}(-t+5)$, を得る. ここで (11.1.9) を利用すれば, $V = \mathbb{C}^3$ について

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(1,T) &= T_1(V) = g_1(T)f_1(T)(V) \\ &= \tfrac{1}{4}(T^2 - 6T + 9I)(V) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \right\} = \mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(3,T) &= T_2(V) = g_2(T)f_2(T)(V) \\ &= \tfrac{1}{4}(-T^2 + 6T - 5I)(V) \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} & 1 & -2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} \,\middle|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3 \right\} \\ &= \mathbb{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbb{C}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

を得る. ちなみに, このとき確かに

$$T_1 + T_2 = I$$

となつてゐる. もちろん 11.1.14 を使つて計算してもよい. □

演 習 問 題 11.1

11.1.16 下の (1), (2), (3) に与へるそれぞれの線形変換 T について, 次の (i) と (ii) に答へよ.

(i) T の固有値とそのそれぞれの重複度を求めよ.

(ii) それぞれの固有値 λ に対し, 固有空間 $W(\lambda,T)$ と準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda,T)$ を求めよ.

(1) $T : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3,\quad T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\quad$ 但し $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}.$

(2) $T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4,\quad T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\quad$ 但し $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ & 1 & -1 & 2 \\ & & 1 & -3 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$

(3) $T : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4,\quad T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x},\quad$ 但し $\quad A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 3 & -3 \\ -9 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

11.2 Jordan 標準形

対角化できない行列も含めた標準形として Jordan 行列と呼ばれるものを考へる.

定義 11.2.1 $n \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対し, 正方行列

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$$

を Jordan 細胞と呼んで $J(\lambda, n)$ で表す.

例 11.2.2 次の行列はどれも Jordan 細胞である：

$$J(2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad J(-5,3) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & \\ & -5 & 1 \\ & & -5 \end{bmatrix}, \quad J(0,4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

問 11.2.3 $J = J(\alpha, n)$ の最小多項式は $\mu_J(t) = (t - \alpha)^n$ であることを示せ.

定義 11.2.4 いくつかの Jordan 細胞の直和で表される正方行列を Jordan 行列と呼ぶ.

例 11.2.5 Jordan 行列の例：

$$J(2,3) \oplus J(5,2) \oplus J(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 5 & 1 & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

定理 11.2.6 V の基を適当にとれば, V の冪零変換 N の表現行列 A は

(11.2.7) $$A = J(0, n_1) \oplus J(0, n_2) \oplus \cdots \oplus J(0, n_r) \quad \text{(Jordan 行列)}$$

となる. ここで, $n_1 \geqq \cdots \geqq n_r$ なる条件を追加すれば, 上の行列は一意的に定まる.

証明 N は冪零変換で, $N^{\nu-1} \neq O$, $N^\nu = O$ とする.

(11.2.8) $$W^{(i)} = \{\boldsymbol{u} \in V \mid N^i \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

とおけば,

$$V = W^{(\nu)} \supset W^{(\nu-1)} \supset \cdots \supset W^{(1)} \supset \{\boldsymbol{0}\}.$$

いま $\dim W^{(i)} = m_i$, $m_i - m_{i-1} = r_i$ $(1 \leqq i \leqq \nu)$, $m_0 = 0$, $r_{\nu+1} = 0$ とおく. $W^{(\nu-1)}$ の任意の基に r_ν 個の vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_{r_\nu}$ を付け加へて $V = W^{(\nu)}$ の基になる様にすれば（基の延長 6.6.1）

(11.2.9) $$W^{(\nu)} = \langle \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu} \rangle \oplus W^{(\nu-1)}.$$

そのとき, $N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-1)}$ であるが, これらの vectors は 1 次独立で, かつ

$$\langle N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \rangle \cap W^{(\nu-2)} = \{\boldsymbol{0}\}$$

となる．実際 $c_1N\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_{r_\nu}N\boldsymbol{a}_{r_\nu}\in W^{(\nu-2)}$ とすれば,

$$N^{\nu-1}(c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_{r_\nu}\boldsymbol{a}_{r_\nu})=N^{\nu-2}(c_1N\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_{r_\nu}N\boldsymbol{a}_{r_\nu})=\mathbf{0}.$$

よつて, $c_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+c_{r_\nu}\boldsymbol{a}_{r_\nu}\in W^{(\nu-1)}$. しかるに (11.2.9) から
$\langle\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_{r_\nu}\rangle\cap W^{(\nu-1)}=\{\mathbf{0}\}$. ゆゑに, $c_1=\cdots=c_{r_\nu}=0$. 以上から $r_\nu\leqq r_{\nu-1}$ もわかる．従つて $r_{\nu-1}-r_\nu$ 個の vectors $\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ が存在して, $W^{(\nu-2)}$ の基に $N\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$, $\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ を付け加へたものが $W^{(\nu-1)}$ の基になる．すなはち

(11.2.10) $$W^{(\nu-1)}=\langle N\boldsymbol{a}_1,\cdots,N\boldsymbol{a}_{r_\nu},\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\cdots,\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}\rangle\oplus W^{(\nu-2)}.$$

従つて, 上と同様にして

$$N^2\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ N^2\boldsymbol{a}_{r_\nu},\ N\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\ \cdots,\ N\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}\in W^{(\nu-2)}$$

は 1 次独立であり, かつ,

$$\langle N^2\boldsymbol{a}_1,\cdots,N^2\boldsymbol{a}_{r_\nu},N\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\cdots,N\boldsymbol{a}_{r_\mu-1}\rangle\cap W^{(\nu-3)}=\{\mathbf{0}\}$$

であることがわかる．よつて $r_{\nu-1}\leqq r_{\nu-2}$. 以下同様にして $r_\nu\leqq r_{\nu-1}\leqq\cdots\leqq r_1$ で, vectors $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{r_1}$ を適当に選べば

(11.2.11) $$W^{(i)}=\langle N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_1,\cdots,N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_{r_\nu},\cdots,\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1},\cdots,\boldsymbol{a}_{r_i}\rangle\oplus W^{(i-1)}$$

となることが証明される．これらの vectors の全体

$$\bigcup_{1\leqq i\leqq\nu}\{\,N^j(\boldsymbol{a}_k)\,|\,0\leqq j\leqq\nu-i,\ r_{i+1}+1\leqq k\leqq r_i\,\}$$

は, ここまでの作り方から V の基を与へる（次の page の図を参照）.

ここまでの議論 (或いは 7.4.12) から, $1\leqq k\leqq r_1$ に対し $\{\,\boldsymbol{a}_k,N\boldsymbol{a}_k,\cdots,N^{i-1}\boldsymbol{a}_k\,\}$ は 1 次独立であることもわかつた．さて, これらの張る部分空間 $\langle\boldsymbol{a}_k,N\boldsymbol{a}_k,\cdots,N^{i-1}\boldsymbol{a}_k\rangle$ は明らかに N によつて不変である（それ自身に写される）. この基の順序を逆にしたものに関して N を行列で表現してみると

$$\begin{aligned}&N(N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_k,N^{\nu-i-1}\boldsymbol{a}_k,\cdots,\boldsymbol{a}_k)\\&\qquad=(N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_k,N^{\nu-i-1}\boldsymbol{a}_k,\cdots,\boldsymbol{a}_k)\begin{bmatrix}0&1&&&\\0&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{bmatrix}=J(0,\nu-i)\end{aligned}$$

となる．従つて上の図に並んだ vectors のうち最左列にあるもの（ν 個）を下から上の順に並べ, その次に, 第 2 列にあるものを下から上の順で並べ, これを最右列まで行なつて得られた vectors の組を基とすれば, 対応する表現行列 A は所望の形になる．上で得られた Jordan 行列は, 定理の主張の中の条件 $n_1\geqq\cdots\geqq n_r$ を満たしてゐる．

（一意性）以上から, 各 $i\in\mathbb{N}$ について, (11.2.7) の右辺に現れる $J(0,i)$ の個数は

$$\begin{aligned}r_i-r_{i+1}&=(m_i-m_{i-1})-(m_{i+1}-m_i)=-m_{i-1}+2m_i-m_{i+1}\\&=-\dim W^{(i-1)}+2\dim W^{(i)}-\dim W^{(i+1)}\\&=-\mathrm{null}\,N^{i-1}+2\,\mathrm{null}\,N^i-\mathrm{null}\,N^{i+1}\ (=\mathrm{rank}\,N^{i-1}-2\,\mathrm{rank}\,N^i+\mathrm{rank}\,N^{i+1})\end{aligned}$$

であつて, これは N のみに依存するから一意的でなければならない．例へば $\nu=n_1$ であり, r_ν は n_1 と等しい n_i の個数に一致する． □

$\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{r_\nu}$				
$N\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$	$\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$			
$\cdots$	$\cdots$			
$N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_{r_\nu}$	$N^{\nu-3}\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\ \cdots,\ N^{\nu-3}\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$	$\cdots$	$\boldsymbol{a}_{r_3+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{r_2}$	
$N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ N^{\nu-1}\boldsymbol{a}_{r_\nu}$	$N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\ \cdots,\ N^{\nu-2}\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$	$\cdots$	$N\boldsymbol{a}_{r_3+1},\ \cdots,\ N\boldsymbol{a}_{r_2}$	$\boldsymbol{a}_{r_2+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_{r_1}$

$V = W^{(\nu)}$ の基

$W^{(\nu-1)}$ の基

$W^{(2)}$ の基

$W^{(1)}$ の基

補題 11.2.12　線形変換 T の相異なる固有値のすべてを $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とする. 簡単のために $W_i = \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ と書く. 各 i について $I^{(i)}$ を V から W_i への射影子とし, $I^{(i)}$ と $T|_{W_i}$ の合成を $T^{(i)}$ とする : $T^{(i)} = T|_{W_i} I^{(i)}$. このとき

$$T = T^{(1)} \oplus \cdots \oplus T^{(r)}$$

であつて, $T - (\alpha_1 I^{(1)} \oplus \cdots \oplus \alpha_r I^{(r)})$ は冪零変換である.

証明　11.1.6 と同じ状況なので, そこの記号を流用する. 11.1.12 で述べた通り, そこでの T_i は $I^{(i)}$ に他ならない. ここで, 11.1.6(1) より $T(W_i) \subset W_i$ であるから, $T^{(i)}(W_i) \subset W_i$. このことに注意して, (11.1.8), 即ち $I = I^{(1)} \oplus \cdots \oplus I^{(r)}$ の両辺に左から T を施せば, $T = T^{(1)} \oplus \cdots \oplus T^{(r)}$ を得る. 11.1.6(3) の証明で示した様に, $(T^{(i)} - \alpha_i I^{(i)})\big|_{W_i}$ は W_i の冪零変換で,

$$\begin{aligned} T - (\alpha_1 I^{(1)} \oplus \cdots \oplus \alpha_r I^{(r)}) &= (T^{(1)} \oplus \cdots \oplus T^{(r)}) - (\alpha_1 I^{(1)} \oplus \cdots \oplus \alpha_r I^{(r)}) \\ &= (T^{(1)} - \alpha_1 I^{(1)}) \oplus \cdots \oplus (T^{(r)} - \alpha_r I^{(r)}) \end{aligned}$$

となつてゐるから, 結論を得る. □

定理 11.2.13　V の線形変換 T の相異なる固有値のすべてを $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とする. T は適当な基に関して

(11.2.14)　$$\underbrace{J(\alpha_1, n_{11}) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_1, n_{1\nu_1})}_{\text{固有値が } \alpha_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{J(\alpha_r, n_{r1}) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_r, n_{r\nu_r})}_{\text{固有値が } \alpha_r}$$

と表される. もし, 固有値の順序, および, 各 $1 \leqq i \leqq r$ についての条件 $n_{i1} \leqq n_{i2} \leqq \cdots \leqq n_{i\nu_i}$ を課するならば, この表示は一意的である. 従つて, この表示は直和の順序を無視すれば一意的である. また T の最小多項式は $N_i = \max\{n_{ij} \,|\, 1 \leqq j \leqq \nu_i\}$ $(1 \leqq i \leqq r)$ として, 次式で与へられる :

$$\mu_T(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \alpha_i)^{N_i}.$$

証明　11.2.12 の証明から, 直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$ $(W_i = \widetilde{W}(\alpha_i, T))$ に応じて, 変換 $T - (\alpha_1 I^{(1)} \oplus \cdots \oplus \alpha_r I^{(r)})$ は

$$T - (\alpha_1 I^{(1)} \oplus \cdots \oplus \alpha_r I^{(r)}) = \bigoplus_{i=1}^{r} (T^{(i)} - \alpha_i I^{(i)})$$

と直和分解されて, この直和因子のそれぞれが冪零変換である. 11.2.6 により, 適当な基に関しての, 線形変換 $(T^{(i)} - \alpha_i I^{(i)})\big|_{W_i}$ の表現行列は $J(0, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(0, n_{i\nu_i})$ の形で表される. ゆゑに $T^{(i)}|_{W_i} = \big(\alpha_i I^{(i)} + (T^{(i)} - \alpha_i I^{(i)})\big)\big|_{W_i}$ の表現行列は, I_k を k 次単位行列, $\dim W_i = m_i$ として,

$$\begin{aligned} &\alpha_i I_{m_i} + \big(J(0, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(0, n_{i\nu_i})\big) \\ &\quad = \big(\alpha_i I_{n_{i1}} + J(0, n_{i1})\big) \oplus \cdots \oplus \big(\alpha_i I_{n_{i\nu_i}} + J(0, n_{i\nu_i})\big) \\ &\quad = J(\alpha_i, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_i, n_{i\nu_i}) \end{aligned}$$

と相似になる. 一意性は 11.2.6 から従ふ. 最後の主張は 11.2.3 から直ちにわかる. □

定義 11.2.15 線形変換 T の表現行列 が Jordan 行列 B に相似であれば, B を T の Jordan 標準形と称する．また n 次正方行列 A について $T_A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x}$ の Jordan 標準形が B のとき, B を A の Jordan 標準形と称する．

最後に 11.2.13 を行列の言葉で述べておく．

定理 11.2.16 (1) 任意の正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ に対し, その相異なる固有値のすべてを $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ とする．このとき A は

(11.2.17)
$$J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_r,$$
$$\text{但し,}\quad J_i = J(\alpha_i, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_i, n_{i\nu_i}) \quad (1 \leqq i \leqq r),$$

の形の Jordan 行列 J と相似である．もし, 固有値の順序, および, 各 $1 \leqq i \leqq r$ についての条件 $n_{i1} \leqq n_{i2} \leqq \cdots \leqq n_{i\nu_i}$ を課するならば, J は一意的に定まる．
(2) $\mu_A(t) = \mu_{T_A}(t)$ （10.3.11 を見よ） であり, それは上の Jordan 標準形 J を構成する Jordan 細胞の様子から 11.2.13 の様に与へられる．

定義 11.2.18 正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ が対角化可能であるとき, A は半単純行列であるといはれる．

補題 11.2.19 任意の正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ は次の様な和に一意的に表される．

(11.2.20)
$$A = S + N, \quad S \text{ は半単純行列}, N \text{ は冪零行列}, SN = NS.$$

このとき, S, N は A の $\mathbb{C}$ 係数多項式として表される．

証明 11.2.6 の証明や 11.2.13 の証明から, $\widetilde{W}(\alpha_1, A), \cdots, \widetilde{W}(\alpha_r, A)$ のそれぞれの基（列 vectors）を適当な順序でとれば, それらを並べてできる正方行列を P について, $P^{-1}AP$ が (11.2.17) の形になる．それをここでも J と記し, J の対角成分をすべて 0 で置き換へてできる行列を J_0 とすれば, J_0 は冪零行列であり (7.4.12, 11.2.6 など), $B = J - J_0$, $N = P^{-1}J_0P$ とおくと, B は対角行列で, N は冪零行列である．また $S = A - N$ とおくと, $A = S + N$ であり, $S = A - N = P^{-1}JP - P^{-1}J_0P = P^{-1}BP$ ゆゑ S は半単純である．ここで, A の異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とし,

$$\varphi_A(t) = \prod_{i=1}^{r}(t - \alpha_i)^{n_i}, \quad f_i(t) = \prod_{j \neq i}(t - \alpha_j)^{n_j}$$

とおくと, 11.1.6(2) の証明で述べた通り,

$$1 = g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) + \cdots + g_r(t)f_r(t)$$

となる $g_1(t), \cdots, g_i(t) \in \mathbb{C}[t]$ が存在する．このとき, 11.1.6(3) の証明と 11.1.12 から,

(11.2.21)
$$S = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\, g_i(A) f_i(A) \quad \text{（これは } A \text{ の } \mathbb{C} \text{ 係数多項式である）}$$

であることに注意せよ (演習問題 11.2.23)．先に述べたことから S も $N(= A - S)$ も $\mathbb{C}$ 上の A の多項式であるから, $SN = NS$ が成り立つ．

次に一意性を証明する. $A=S+N=S'+N'$ と 2 通りに分解されたとせよ. 仮定により $S'N'=N'S'$ であるから, S' と N' は A と可換であり, さらに A の多項式である S や N とも可換である. 10.4.9 より S と S' は同時に対角化されるから $S-S'$ は半単純であり, 10.5.15 により $N-N'$ は冪零行列である. しかるに, $S-S'=N'-N$ であるから 10.5.17 により $S-S'=N'-N=O$, 即ち $S'=S$, $N'=N$ でなければならない. よつて, 所望の表示の一意性が示された. □

注意 11.2.22 (11.2.20) の分解 $A=S+N$ に対して, S を A の半単純部分, N を A の冪零部分と呼ぶ. 11.2.16 や 11.2.19 で述べた通り, 正方行列 A に対して正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が Jordan 行列になり, 上の分解について, $P^{-1}SP$ は対角行列であり, $P^{-1}NP$ は (11.2.7) の形の Jordan 行列である. それゆゑ

$$\varphi_A(t)=\varphi_S(t).$$

即ち, 正方行列 A の固有多項式は A の半単純部分の固有多項式と一致する.

演 習 問 題 11.2

11.2.23 上の 11.2.19 の証明の中の (11.2.21) を厳密に示せ.

Hint : 11.2.19 の証明の記号を使ふ. 11.1.12 で述べたことから, 行列 $P\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の列 vectors の全体は $\mathbb{C}^n$ の基となるが, その基に関する $\alpha_i\,g_i(T_A)f_i(T_A)$ の表現行列は

$$A_i=\begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{matrix}}^{m_1+\cdots+m_{i-1}} && \\ & \overbrace{\begin{matrix}\alpha_i&&\\&\ddots&\\&&\alpha_i\end{matrix}}^{m_i} & \\ && \underbrace{\begin{matrix}0&&\\&\ddots&\\&&0\end{matrix}}_{m_{i+1}+\cdots+m_r}\end{bmatrix}$$

となる. ここに $m_j=\dim\widetilde{W}(\alpha_j,A)$ である.

11.3　例

実際に Jordan 標準形を求めてみる. 固有多項式が重根を持たない場合はすでに 7.7.9 等で説明したから, ここでは, 専ら重根を持つ場合を取り挙げる. 計算では 11.2.6 の証明を辿ればよく, すべての固有値 λ について $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $\cdots$ のすべてを求めることによる. 以下, 便宜上, 正方行列 A とその固有値 λ, および $i = 0, 1, \cdots$ について

$$W^{(i)}(\lambda) = W^{(i)}(\lambda, A) = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid (A - \lambda I)^i \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \,\}$$

と記すことにする.

例題 11.3.1　行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

解　まず, 固有多項式を求め, $\varphi_A(t) = (t-2)^2(t-3)$ を得る. さらに

$$W^{(2)}(2) = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{C} \right\}, \quad W^{(1)}(2) = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\},$$

$$W^{(1)}(3) = \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{C} \right\}$$

であるから [42], 11.2.6 の証明に従つて

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (A-2)\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ととり,

$$P = \big[\, (A-2I)\,\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{b}_1 \,\big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

を得る. □

例題 11.3.2　行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

解　固有多項式は $\varphi_A(t) = (t-2)^3$ であり,

$$W^{(2)}(2) = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{C} \right\}, \quad W^{(1)}(2) = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}$$

である. ここで $(A-2I)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ あるから

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A-2I)\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (A-2I)^2\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \big[\, (A-2I)^2\,\boldsymbol{a}_1 \ \ (A-2I)\,\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_1 \,\big] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

を得る. □

[42] $W^{(2)}(2, A)$ を求めるには, 互除法により Bézout 等式 $1 \cdot (t-2)^2 + (-t+1)(t-3) = 1$ を得て, それを利用してもよい.

例題 11.3.3　行列 $A=\begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

解　この場合も $\varphi_A(t)=(t-2)^3$ であるが,

$$W^{(1)}(2)=\left\{ a\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| a,\ b\in\mathbb{C} \right\}$$

は 2 次元ゆゑ, $W^{(2)}(2)=W^{(3)}(2)=\mathbb{C}^3$ となる. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\notin W^{(2)}$ だから, これを $\boldsymbol{a}_1$ とし,

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ (A-2I)\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}\left(=\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

これらの 1 次結合では表せない vector として $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ を選んで

$$P=\begin{bmatrix} (A-2I)\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix},\quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

を得る. □

これらの例から, 固有多項式 $\varphi_A(t)$ が重根を持つ場合は, それだけから A の Jordan 標準形を決定することはできないことがわかる.

例題 11.3.4　A は正方行列で $t\in\mathbb{C}$ とする. このとき, t に関する形式的冪級数として

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{tr}(A^j)\frac{t^j}{n}\right)=\det(I-tA)$$

が成り立つことを示せ. 但し $\exp(t)=\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}$ である.

解　A の固有値を $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$, Jordan 標準形を J とすれば, $\mathrm{tr}(A^j)=\mathrm{tr}(J^j)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{\alpha_i}^j$ となることが 7.7.21 と 11.5.3 によつてわかる. よつて

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}{\alpha_i}^j\frac{t^j}{n}\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}{\alpha_i}^j\frac{t^j}{n}\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\alpha_i t)^j}{n}\right)\\&=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\log(1-\alpha_i t)\right)=\exp\left(\log\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i t)\right)\\&=\det(I-tJ)=\det(I-tA)\end{aligned}$$

となり証明される. ここで $\log(1-t)=\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{j}$ と定めたが, 形式的冪級数としての等式 $\exp\bigl(\log(1-t)\bigr)=1-t$ を示すのは意外と面倒である [43]. □

[43] 荒川・伊吹山・金子 共著 : ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店 (2001 年) の pp.32–33 を参照.

演 習 問 題 **11.3**

11.3.5 行列 A に対し, 正則行列 P を与へて $B = P^{-1}AP$ を Jordan 標準形とせよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$. (2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ -10 & 12 & 9 & -5 \\ 11 & -11 & -9 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (3) $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 & -2 \\ -8 & 10 & 7 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

11.3.6 正方行列 A に対し, 次の 2 つの条件は同値であることを示せ.

(1) $\mu_A(t) = \varphi_A(t)$.

(2) A の任意の固有値 λ に対し, A の Jordan 標準形には λ を固有値とする Jordan 細胞が唯 1 つだけ含まれる.

11.3.7 次の行列の最小多項式を記せ.

(1) $A = J(3,3) \oplus J(2,5)$.

(2) $B = J(3,2) \oplus J(3,5) \oplus J(3,5) \oplus J(2,5)$.

(3) $C = J(-2,1) \oplus J(-2,2) \oplus J(3,5) \oplus J(3,1)$.

11.4 Jordan 標準形についての留意点

簡単のため $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ と記す.

$$\begin{bmatrix} c & c \\ s & -s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & c^2 \\ s^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c \\ s & -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+sc & 0 \\ 0 & 2-sc \end{bmatrix}$$

は左辺中央の行列の対角化であるが, $\theta \to 0$ とすると, 左辺左端の行列

$$\begin{bmatrix} c & c \\ s & -s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{c} & -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

の第 2 列の成分は発散してしまふ. また左辺右端の行列は非正則な行列に退化してしまふ. 一方, 左辺中央のもとの行列は対角ができないものになり, Jordan 行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{固有値 } 2 \text{ に関する Jordan 細胞})$$

になる. これの変換行列はもちろん単位行列である. この様に Jordan 標準形はもとの行列の変形に応じて連続的に得られるものではないため, 数値計算など, わずかの数値の違ひで対角化が可能になつたりならなかつたりする場合は, 非常に扱ひにくい. それでも, 線形代数の講義で扱はれる理由は, 正方行列 A に対して $\exp A$ を計算する場合などに有効であるからである. 例へば,

$$\exp\left(P^{-1}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}P\right) = P^{-1}\begin{bmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix}P$$

などを示すのに使はれる. 次の小節で説明する.

11.5 Frobenius の定理

一般に可換な 2 つの行列 A, B と負でない整数 n について

$$(A+B)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} A^{n-r} B^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{(n)_r}{r!} A^{n-r} B^r = \sum_{r=0}^{n} \frac{(n)_r}{r!} A^{n-r} B^r$$

である．ここで, $(n)_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$ である．それゆゑ, m 次以下の多項式 $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ について, 次式が成り立つ：

$$f(A+B) = \sum_{r=0}^{m} \frac{1}{r!} f^{(r)}(A) B^r. \tag{11.5.1}$$

さて, n 次正方行列 A に対し, $A = S + N$ を半単純成分 S と冪零成分 N の和への分解とせよ．このとき $SN = NS$（11.2.19 参照）であり, $N^n = O$ でもあるから, 任意の多項式 $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ について

$$f(A) = f(S+N) = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} f^{(r)}(S) N^r \tag{11.5.2}$$

ここで $N^\nu = O$ なる $\nu\,(\leqq n)$ をとれば

$$f(A) = f(S+N) = \sum_{r=0}^{\nu} \frac{1}{r!} f^{(r)}(S) N^r = f(S) + N \sum_{r=1}^{\nu} \frac{1}{r!} f^{(r)}(S) N^{r-1}$$

でもある．ここで $f(S)$ は半単純, 後部は冪零であるから, これは $f(A)$ の, 半単純成分と冪零成分の和への分解に他ならない (再び 11.2.19 による)．

いま, A の固有値を重複度を込めて $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすると, 明らかに $f(S)$ の固有値は $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_n)$ であるから, 11.2.22 によつて, $f(A)$ の固有値も

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ \cdots,\ f(\alpha_n)$$

である．以上を定理としてまとめておく：

> **定理 11.5.3** (Frobenius（フロベニウス）[44] の定理) 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ の固有値の全体を, 重複を許して $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすると, 多項式 $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ に対し, $f(A)$ の固有値は $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ である．

便宜のため以下に, 上記を凝縮した証明も記しておく．A の Jordan 標準形を J とすれば, J の対角成分に $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が重複度を込めて並ぶから, ある正則行列 P により,

$$A = PJP^{-1} = P \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \ast \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

として良い．このとき, 帰納法により, 容易に $f(J)$ の対角成分が

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_2),\ \cdots,\ f(\alpha_n)$$

であることと, $f(A) = Pf(J)P^{-1}$ となることがわかる．これより結論を得る．

[44] Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) Germany 生.

11.6　微分方程式の解法への Jordan 標準形の応用

線形代数学の応用への道案内として, t の函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \tag{11.6.1}$$

を解法について, より進んだ数学の知識を取り混ぜながら, 考へ方や方針のみ述べてみる. まづ

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

と書いて, (11.6.1) を

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$$

と表す. これの解は, 1 つの函数に関する変数分離型の微分方程式の解法と同様に

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(tA)\,\boldsymbol{x}(0)$$

と書ける. 但し exp は行列の指数函数であつて極めて自然なものである. 一方, 11.3.1 で示した様に A は,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

により

$$A = PJP^{-1}$$

と書ける. このとき容易に $\exp(tA) = P^{-1}\exp(tJ)P$ であることがわかる. しかも Jordan 標準形 J については $\exp(tJ)$ の成分表示も容易にわかり, 最終的に

$$\boldsymbol{x}(t) = P\exp(tJ)P^{-1}\,\boldsymbol{x}(0) = P\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{bmatrix}P^{-1}\,\boldsymbol{x}(0)$$

なる綺麗な解が得られるのである. 線形微分方程式の一般論から解は, 初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ を決めれば一意的であることが知られてゐる [45] から, これが (11.6.1) の一般解である.

注意 11.6.2　一般に与へられた実正方行列 A を直交行列 P を見付けて, （あるいは次節で学ぶ様に, 複素正方行列を unitary 行列 P を見付けて）$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形にできるか, といふ疑問が浮かぶであらう. しかし, これは一般には不可能である. ではどの様な標準形を考へるとうまくいくのか. それは重要な問題である. 興味を持つた読者は, 例へば

D.E. Littlewood : “On unitary equivalence”, J. London Math. Soc. 28 (1953) 314-322

などを眺められたい.

[45] 例へば, 三宅敏恒著 :「微分方程式 — やさしい解き方 —」, 培風館

第 12 章　Hermite 空間

この章では, $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を扱ふ. そのために, まづは, Hermite 内積 [46] と呼ばれる計量を定義する. この内積により, 第 8 章で ($\mathbb{R}$ 上の) 内積空間を考察したのと同様な扱ひが可能になる.

12.1　Hermite 内積

定義 12.1.1　V を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とする. V の vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{C}$ を対応させる写像 $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ が次の 4 条件をすべて満たすとき, この写像を V の Hermite 内積 [47] と呼ぶ. 但し, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}' \in V$ は任意の vectors を, $c \in \mathbb{C}$ は任意の定数を表す.

H1　$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$,

H2　$(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,

H3　$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$　(ここで $\overline{}$ は複素共役を取ることを示す),

H4　$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$.

問 12.1.2　$\mathbb{C}$ 上の vector 空間の Hermite 内積 $(\ ,\ )$ について以下を示せ. 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}' \in V$, 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し

H5　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$,

H6　$(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = \overline{c}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$　($\overline{c}$ は c の複素共役を表す),

H7　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) = 0$.

定義 12.1.3　(Hermite 空間)　Hermite 内積が定義された $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を Hermite 空間 [48] と称する. 以後, 特に断らない限り, この講義で扱ふ Hermite 空間の Hermite 内積は $(\ ,\ )$ で表すことにする.

例 12.1.4　$\mathbb{C}^n$ 上の任意の vectors $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n} \tag{12.1.5}$$

と定義すると, これは Hermite 内積になり, $\mathbb{C}^n$ は Hermite 空間になる. この内積を $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積と称する.

例 12.1.6　12.1.4 の空間において (12.1.5) を, 例へば

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} + 2a_2\overline{b_2} + \cdots + na_n\overline{b_n}$$

に置き換へても, $\mathbb{C}^n$ は Hermite 空間になる.

---

[46] Charles Hermite (1822-1901) France 生まれ.

[47] Hermite 内積は unitary 計量, 複素内積, 複素計量 などとも呼ばれる.

[48] Hermite 空間は unitary 空間, 複素内積 (vector) 空間, 複素計量 (vector) 空間 などとも呼ばれる.

問 **12.1.7** Hermite 空間 V において, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}' \in V$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$ が任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対して成り立つとき, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$ であることを示せ.

定義 12.1.8 (Norm) Hermite 空間 V と $\boldsymbol{u} \in V$ に対し

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$

とおき, これを $\boldsymbol{u}$ の norm あるいは長さと呼ぶ.

命題 12.1.9 Hermite 空間 V の norm について, 次の 3 つが成り立つ. 但し, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{C}$ は任意とする：

(1) $\|c\,\boldsymbol{u}\| = |c|\,\|\boldsymbol{u}\|$,

(2) $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leqq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式),

(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (三角不等式).

証明 (1) と (3) は 8.1.6 と同様に示される. (問とする)

(2) を示す. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ならば, 正しい. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ とする. 簡単な計算で

$$\left\| -\overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}\,\boldsymbol{u} + \|\boldsymbol{u}\|^2\,\boldsymbol{v} \right\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \left(\|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|^2 \right)$$

がわかる. 左辺が正または 0 であり $\|\boldsymbol{u}\| \neq 0$ であるから, 所望の不等式を得る. □

問 **12.1.10** 12.1.9 (1) および (3) を証明せよ.

以下 V は Hermite 内積 (,) が与へられた Hermite 空間とする. もちろん V は $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とし, $\mathbb{R}$ 上の vector 空間としての構造は考へない. また $\mathbb{C}^n$ については, その Hermite 内積として標準 Hermite 内積のみを扱ふ.

定義 12.1.11 (1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ であることを

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$

と記し, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交するといふ.

(2) W_1 と W_2 を V の部分空間とせよ. もし, 任意の $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ と任意の $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ に関して $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = 0$ であるならば, W_1 と W_2 は直交するといひ,

$$W_1 \perp W_2$$

と記す.

(3) W が V の部分空間のとき, 10.1.8 と同様に,

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in V \mid \text{任意の } \boldsymbol{v} \in W \text{ について } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\}$$

と定義し, これを W の直交補空間と称する. もちろん $W \perp W^{\perp}$ である.

命題 12.1.12　$\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ $(\boldsymbol{u}_k \neq \boldsymbol{0},\ 1 \leqq k \leqq n)$ が 2 つづつ互ひに直交すれば, これらは $\mathbb{C}$ 上 1 次独立である.

証明　いま

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots a_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

であるとせよ. この両辺と $\boldsymbol{u}_j$ との内積を取れば

$$c_j\|\boldsymbol{u}_j\|^2 = 0$$

を得るが, $\boldsymbol{u}_j \neq \boldsymbol{0}$ より $\|\boldsymbol{u}_j\|^2 \neq 0$ ゆゑ, $c_j = 0$ となる. □

定義 12.1.13　(1)　V の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leqq i,\ j \leqq n)$$

を満すとき, これらは正規直交基であるといはれる.
(2)　Hermite 空間 $\mathbb{C}^n$ の基本 vectors からなる基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は標準 Hermite 内積に関して正規直交基である. これを $\mathbb{C}^n$ の標準基といふ.

内積空間の場合の 8.2.3 と同様にして, 次のことが成り立つ.

命題 12.1.14　n 次元 Hermite 空間 V の 1 組の基を $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ とする. このとき V の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ で, 任意の $1 \leqq r \leqq n$ について

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \rangle_{\mathbb{C}}$$

となるものが存在する. 特に有限次元 Hermite 空間は正規直交基を持つ.

証明　証明は内積空間の場合と全く同様であるが, 以下に記す. まづ

$$\boldsymbol{u}_1 = \tfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$$

とおくと, $\|\boldsymbol{u}_1\| = 1$ である. よつて $r = 1$ について主張は正しい. 次に $(n \geqq 2$ のとき$)$

$$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \tfrac{1}{\|\boldsymbol{v}'_2\|}\boldsymbol{v}'_2$$

とおくと $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$, $\|\boldsymbol{u}_2\| = 1$ であり,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

であるので, $r = 2$ でも正しい. 一般に $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ $(1 \leqq r < n)$ が求まつたとき

$$\boldsymbol{v}'_{r+1} = \boldsymbol{v}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r}(\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_{r+1} = \tfrac{1}{\|\boldsymbol{v}'_{r+1}\|}\boldsymbol{v}'_{r+1}$$

とおく. $(\boldsymbol{v}'_{r+1}, \boldsymbol{u}_i) = 0$, $(1 \leqq i \leqq r)$ だから, $(\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i) = 0$ であり,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}}$$

ゆゑ $\boldsymbol{u}_{r+1}$ が求められた. この様にして主張が正しい事がわかる. □

注意 12.1.15　上の証明は 12.1.14 の条件を満たす基の計算方法を与へてゐるが, これも Gram-Schmidt の正規直交化法と呼ばれる.

演 習 問 題 12.1

以下の問題において 12.1.21 以外では $\mathbb{C}^n$ における Hermite 内積は, 12.1.4 で述べた標準 Hermite 内積とする.

12.1.16 次の vectors の norm を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2-3\boldsymbol{i} \\ 1-2\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ (2) $\begin{bmatrix} 3-\boldsymbol{i} \\ 1-2\boldsymbol{i} \\ 3\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$

12.1.17 次の vectors の組の内積を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2-3\boldsymbol{i} \\ 1-2\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1+\boldsymbol{i} \\ 2-\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ (2) $\begin{bmatrix} 3-\boldsymbol{i} \\ 1-2\boldsymbol{i} \\ 3\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2-\boldsymbol{i} \\ 1-\boldsymbol{i} \\ 1+\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$

12.1.18 次の vectors は直交することを示せ : $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2+\boldsymbol{i} \\ 3+\boldsymbol{i} \\ 1-2\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -4-5\boldsymbol{i} \\ 1+2\boldsymbol{i} \\ 2-3\boldsymbol{i} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$.

12.1.19 $\mathbb{C}^2$ において, 一般に, $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ に対し

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_1 y_1 + 2\, x_2 y_2$$

と定めれば, これは $\mathbb{C}^2$ の Hermite 内積を与えることを示せ.

12.1.20 次の vectors が $\mathbb{C}^3$ の正規直交基であることを確認せよ :

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -14+6\boldsymbol{i} \\ -2-20\boldsymbol{i} \\ -2+12\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} -14-4\boldsymbol{i} \\ -15+11\boldsymbol{i} \\ -15-\boldsymbol{i} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{28}\begin{bmatrix} 18+4\boldsymbol{i} \\ -3-5\boldsymbol{i} \\ -19+7\boldsymbol{i} \end{bmatrix}.$$

12.1.21 $\mathbb{C}$ に係数を持つ n 次以下の x の多項式全体 $\mathbb{C}[x]_n$ を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とみなすとき,

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad (\, f,\ g \in \mathbb{C}[x]\,)$$

は, この空間において Hermite 内積を与えることを示せ.

12.2 直交補空間

部分空間とその直交補空間の間に次の事が成り立つ.

命題 12.2.1 V の部分空間 W, W_1, W_2 について, 次の 4 つが成り立つ.
(1) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, $V = W \oplus W^{\perp}$.
(2) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$.
(3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
(4) $W_1 \subset W_2 \iff {W_1}^{\perp} \supset {W_2}^{\perp}$.

証明 (1) $\boldsymbol{u} \in W \cap W^{\perp}$ ならば, 定義により, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$, 即ち $\|\boldsymbol{u}\|^2 = 0$. よつて $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
次に $\dim(W) = r$ とし, W の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ をとる. $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$$

とおく. $\boldsymbol{w} \in W$ であり, 任意の $\boldsymbol{u}_j$ $(1 \leqq j \leqq r)$ に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}_j) &= (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) \\ &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) = 0\end{aligned}$$

となり $\boldsymbol{w}' \in W^{\perp}$. ゆゑに $V = W + W^{\perp}$. これと $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ から主張は示された.
(2) は 10.1.6 を使へば (1) より明かである.
(3) 定義より $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である. (2) を W と $W^{\perp}$ に適用すれば

$$\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V), \quad \dim(W^{\perp}) + \dim((W^{\perp})^{\perp}) = \dim(V)$$

を得るが, この 2 式より $\dim(W) = \dim((W^{\perp})^{\perp})$ ゆゑ, $W = (W^{\perp})^{\perp}$ である.
(4) ($\Rightarrow$). $\boldsymbol{u} \in {W_2}^{\perp}$ ならば, 任意の $\boldsymbol{v} \in W_2$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. 従つて, 任意の $\boldsymbol{v} \in W_1$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. よつて $\boldsymbol{u} \in {W_1}^{\perp}$. ($\Leftarrow$) は (3) を使へばよい. □

定義 12.2.2 W を V の部分空間とせよ. 各 $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{w} \in W$, $\boldsymbol{w}' \in W^{\perp}$ が

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$$

によつて一意的に定まる（12.2.1(1) による）が, $\boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{w}$ により定まる V から W への写像は線形写像であつて, V から W への射影子 (10.5 節の冒頭) の一種である. これを pr_W で表す. 12.2.1(1) の証明の中の記号を使つて次の様に表す:

$$\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, \boldsymbol{u}_i.$$

問 12.2.3 上の 12.2.2 で定義した射影子 pr_W は線形写像であることを示せ.

例題 12.2.4 $V = \mathbb{C}^2$, $W = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{C} \right\}$ とする. V から W への射影子を求めよ.

12.3 随伴変換, 随伴行列

引き続き, V は Hermite 空間とする. 次の概念は数学の至るところに現はれる.

定義 12.3.1 V の線形変換 T に対して, すべての $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について

$$(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, T^*(\boldsymbol{v}))$$

を満たす線形変換 $T^* : V \longrightarrow V$ が一意的に存在する (下の 12.3.2). T^* を T の随伴変換といふ.

問 12.3.2 線形変換 T の随伴変換 T^* について, 次の問に答へよ.

(1) T に対して随伴変換 T^* は一意的に存在することを示せ.

(2) 随伴変換 T^* は線形変換であることを示せ.

問 12.3.3 複素数を成分とする行列 A について, ${}^t\overline{A} = \overline{{}^tA}$ であることを示せ.

定義 12.3.4 正方行列 A に対して $A^* = {}^t\overline{A}$ を A の随伴行列と呼ぶ.
ここで $|A^*| = \overline{|A|}$ に注意されたい.

問 12.3.5 標準 Hermite 内積と随伴行列について次が成り立つことを示せ:

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n,\quad A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})).$$

問 12.3.6 A, $B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ について, 以下の問に答へよ.

(1) $(AB)^* = B^*A^*$ を示せ.

(2) A が正則行列ならば A^* も正則で, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ となることを示せ.

随伴変換と随伴行列の関係は次の通り.

命題 12.3.7 V の正規直交基を 1 組定め, T を V の線形変換とする. この基に関する 線形変換 T の表現行列 を A とせよ. このとき, この基に関する T^* の表現行列は A^* である. また, この基に関して A^* を表現行列とする線形変換 (7.3.3 参照) が T^* に他ならない. 特に $(T_A)^* = T_{A^*}$ である.

証明 $\dim(V) = n$ とする. 1 組定められた V の正規直交基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする. この基に関する T^* の表現行列を $B = [b_{ij}]$ とし, $A = [a_{ij}]$ とおく. このとき

$$\bigl(T(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{u}_j\bigr) = \Bigl(\sum_k a_{ki}\,\boldsymbol{u}_k,\, \boldsymbol{u}_j\Bigr) = a_{ji}, \quad \bigl(\boldsymbol{u}_i, T^*(\boldsymbol{u}_j)\bigr) = \Bigl(\boldsymbol{u}_i,\, \sum_k b_{kj}\,\boldsymbol{u}_k\Bigr) = \overline{b_{ij}}.$$

ゆゑに, すべての i, j について $a_{ij} = \overline{b_{ji}}$ である. つまり $B^* = A$. □

命題 12.3.8 T が V の線形変換であるとき, $(T^*)^* = T$ である.

証明 V の正規直交基を取つて, それに関する表現行列を A とすれば, $(A^*)^* = A$ であるから, 主張は 12.3.7 により正しい. □

命題 12.3.9 T_1 と T_2 が V の線形変換であるとき $(T_1T_2)^* = {T_2}^*{T_1}^*$ である．

証明 12.3.6 (1) と 12.3.7 から直ちにわかる． □

演習問題 12.3

12.3.10 V を Hermite 空間とする．$\mathbb{C}$ 上の線形変換 $T : V \longrightarrow V$ と部分空間 $W \subset V$ について, $T(W) \subset W$ であることと, $T^*(W^\perp) \subset W^\perp$ であることは同値であることを示せ．（補足．7.4.8 の用語を使ふと, 上記の主張は,「W が T に関して不変であれば, $W^\perp$ が T^* に関して不変であることは同値である」と述べられる．）

12.4 Hermite 変換, Unitary 変換, 正規変換

定義 12.4.1 (1) V の線形変換 T が $T^* = T$ を満たすとき, T は Hermite 変換と呼ばれ, $T^* = -T$ を満たすとき, 歪 Hermite 変換と呼ばれる.
(2) また, 正方行列 A が $A^* = A$ を満たすとき, A は Hermite 行列と呼ばれ, $A^* = -A$ を満たすとき, A は歪 Hermite 行列と呼ばれる.

注意 12.4.2 12.3.7(1) により, 線形変換 T が Hermite 変換であることと, 任意の正規直交基に関する T の表現行列が Hermite 行列であることは同値である.

問 12.4.3 A が Hermite 行列でも歪 Hermite 行列でもあるならば $A = O$ であることを示せ.

問 12.4.4 線形変換 T に対して T^*T および TT^* は Hermite 変換であることを示せ. また, 正方行列 A に対して A^*A および AA^* は Hermite 行列であることを示せ.

問 12.4.5 T が Hermite 変換であるとき, 任意の自然数 n に対し T^n も Hermite 変換であることを示せ. さらに T が正則な Hermite 変換であるとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し T^n は Hermite 変換であることを示せ.

問 12.4.6 A が Hermite 行列であるとき ${}^tA$ も Hermite 行列であることを示せ.

定理 12.4.7 Hermite 変換, Hermite 行列の固有値はすべて実数である.

証明 V の Hermite 変換 T が固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ を持つとき, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{u} \in V$ が存在して $T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ となる. このとき

$$(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = (\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \lambda (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \lambda \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

一方, T は Hermite 変換だから

$$(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, T(\boldsymbol{u})) = (\boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{u}) = \overline{\lambda} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

従つて $\lambda \|\boldsymbol{u}\|^2 = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{u}\|^2$ であるが, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ ゆゑ $\lambda = \overline{\lambda}$ で $\lambda \in \mathbb{R}$.
Hermite 行列に関しては問 (次の 12.4.8) とする. □

問 12.4.8 Hermite 行列の固有値はすべて実数であることを示せ.

問 12.4.9 歪 Hermite 行列の固有値はすべて純虚数であることを示せ.

定義 12.4.10 すべての固有値が正である Hermite 行列を正定値 Hermite 行列といふ.

定義 12.4.11　V の線形変換 T が Hermite 内積の値を変へないとき, 即ち, 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について次式が成り立つとき, T は unitary 変換と呼ばれる :

$$\big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

注意 12.4.12　T が V の unitary 変換であるためには, V の 1 つの基（正規直交基でなくてもよい）$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について次式がが成り立つこととが必要十分である :

$$\big(T(\boldsymbol{u}_i), T(\boldsymbol{u}_j)\big) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j).$$

命題 12.4.13　Hermite 空間 V の線形変換 T について, 以下は同値である.
(1) T は unitary 変換である.
(2) $T^*T = I_V$.
(3) $TT^* = I_V$.

証明　(1) $\Rightarrow$ (2). 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = \big(\boldsymbol{u}, T^*T(\boldsymbol{v})\big)$ ゆゑ, $T^*T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ であるから (2) が成り立つ. (2) $\Rightarrow$ (1) は上の議論を逆に辿ればよい.
(2) $\Rightarrow$ (3). V の基をとり, それに関する T の表現行列を A とすれば, 仮定から $A^*A = I$. 3.5.12 より $A^* = A^{-1}$ であり $AA^* = I$ が成り立つ. つまり $TT^* = I_V$.
(3) $\Leftarrow$ (2) は上の議論を逆に辿ればよい. □

定義 12.4.14　正方行列 U が $U^*U = I$ を満たすとき, U は unitary 行列であると言はれる.

問 12.4.15　U を unitary 行列とする. ${}^tU\overline{U} = I$, $\overline{U}{}^tU = I$ が成り立つことを示せ.

問 12.4.16　U を unitary 行列とする. ${}^tU$ や $\overline{U}$ も unitary 行列であることを示せ.

問 12.4.17　Unitary 行列の行列式の絶対値は 1 であることを示せ.

注意 12.4.18　Unitary 行列は絶対値 1 の複素数 $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の類似である.

例題 12.4.19　V の正規直交基を固定する. T が V の unitary 変換であるためには, この基に関する表現行列が unitary 行列であることが必要十分であることを示せ.

証明　$\dim(V) = n$ として, 与へられた正規直交基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とし, T の表現行列を $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ とせよ. このとき

$$\big(T(\boldsymbol{u}_i), T(\boldsymbol{u}_j)\big) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{u}_k, \ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{u}_k\right) = {}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j}.$$

T が unitary 変換であることは $\big(T(\boldsymbol{u}_i), T(\boldsymbol{u}_j)\big) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ であることに他ならず, それは

$${}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j} = \delta_{ij},$$

即ち ${}^tA\overline{A} = I$ であることと同値である. 従つて A は unitary 行列である. □

注意 12.4.20 次の様な類似があると考へればわかり易いかも知れない：

複素数を成分に持つ行列	$\longleftrightarrow$	複素数
随伴行列	$\longleftrightarrow$	複素共役
Hermite 行列	$\longleftrightarrow$	実数
正定値 Hermite 行列	$\longleftrightarrow$	正の数
歪 Hermite 行列	$\longleftrightarrow$	純虚数
Unitary 行列	$\longleftrightarrow$	絶対値 1 の複素数.

命題 12.4.21 n 次正方行列 $U = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ について, 次の 3 条件は同値である.
(1) U は unitary 行列.
(2) 線形変換 $T_U : \boldsymbol{u} \longmapsto U\boldsymbol{u}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関して unitary 変換である.
(3) $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関して正規直交基である.

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は 12.4.19 から直ちにわかる. また (1) を仮定すれば $U^*U = I$ であるが, これは, すべての $1 \leqq i, j \leqq n$ について $\overline{{}^t\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, 即ち ${}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j} = \delta_{ij}$ であることと同値であり, これは $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ を意味するから, (3) が結論される. この議論は可逆だから (3) $\Rightarrow$ (1) も示された. □

定理 12.4.22 T を V の線形変換とせよ. T が V の unitary 変換であるためには, 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対し, $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ であることが必要十分である.

証明 (必要性) これは定義より明らか. (十分性) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \overline{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} + \|\boldsymbol{u}\|^2,$$
$$\|T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 = \|(T\boldsymbol{u})\|^2 + (T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) + \overline{(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))} + \|T(\boldsymbol{u})\|^2$$

であることと T についての仮定から

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \overline{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} = (T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) + \overline{(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))}$$

である. ここで実数部分を real, 虚数部分を imag で表せば, 上のことから

$$\mathrm{real}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathrm{real}(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})).$$

一方 $\boldsymbol{u}$ の代りに $i\boldsymbol{u}$ をとると $\mathrm{real}(-i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \mathrm{real}(-i(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})))$, つまり

$$\mathrm{imag}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathrm{imag}(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))$$

が示され, 結局, 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \big(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})\big)$$

となるから T は unitary 変換である. □

演 習 問 題 12.4

12.4.23 一般に 2 つの Hermite 行列の和, 積は Hermite 行列になるか. 理由をつけて答へよ.

12.4.24 任意の正方行列 A は Hermite 行列 H を歪 Hermite 行列 S の和 $A = H + S$ として一意的に表されることを示せ.

12.4.25 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ を任意にとり固定する. このとき, 2 つの集合

$$\mathscr{H} = \{\, X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid X^* A + AX = O,\ \varphi_X(-1) \neq 0 \,\},$$
$$\mathscr{U} = \{\, T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid T^* AT = A,\ \varphi_T(-1) \neq 0 \,\}$$

が Cayley 変換 $T = (I - X)(I + X)^{-1}$ により 1 対 1 に対応することを証明せよ. とくに $A = I$ とすれば unitary 行列のある集合と歪 Hermite 行列のある集合との対応が得られる.

12.5　正規変換

定義 12.5.1　(1) V の線形変換 T は, T^* と可換であるとき正規変換であるといはれる.
(2) 正方行列 A は, A^* と可換であるとき正規行列であるといはれる.

補題 12.5.2　(1) T を V の線形変換とせよ. T が正規変換であるためには, V の正規直交基に関する T の表現行列が正規行列であることが必要十分である.
(2) A を n 次正方行列とせよ. $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積について T_A が正規変換であるためには A が正規行列であることが必要十分である.

証明　(1) V の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関しての T の表現行列を A とすれば, 12.3.7 により T^* の表現行列は A^* になるから.
(2) T_A の標準基に関する表現行列は A に他ならないから (1) によつて主張が従ふ.　□

問 12.5.3　次の主張を証明せよ.
(1) 正規行列の scalar 倍は正規行列である.
(2) Hermite 行列, 歪 Hermite 行列は正規行列である.
(3) Unitary 行列は正規行列である. （Hint：12.4.13 を利用せよ.）

命題 12.5.4　$\dim(V) = n$ とする. T_1 と T_2 を互ひに可換な V の線形変換とせよ. 従つて両者は全射である. このとき, V の部分空間 $W_0, W_1, \cdots, W_n$ で
(1) $T_1(W_k) = T_2(W_k) = W_k \quad (0 \leqq k \leqq n)$,
(2) $W_0 = \{\boldsymbol{0}\} \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n = V$,
(3) $\dim(W_k) = k \quad (0 \leqq k \leqq n)$
を全て満すものが存在する.

証明　n に関する帰納法で証明する. $n = 1$ のときは明かである.
空間 V の次元が $n-1$ までの場合は正しいとし, $\dim(V) = n$ の場合を証明する. T_1 と T_2 の随伴変換 ${T_1}^*$ と ${T_2}^*$ は可換である. 実際,
$$ {T_1}^*{T_2}^* = (T_2T_1)^* = (T_1T_2)^* = {T_2}^*{T_1}^*. $$
従つて 10.4.2 により ${T_1}^*$ と ${T_2}^*$ に共通の固有 vector が存在する. その 1 つを $\boldsymbol{u}$ とし, ${T_1}^*\boldsymbol{u} = \overline{\lambda_1}\,\boldsymbol{u}$, ${T_2}^*\boldsymbol{u} = \overline{\lambda_2}\,\boldsymbol{u}$ とする. $W_{n-1} = \{\boldsymbol{u}\}^\perp$ とおくと 12.2.1(2) より $\dim(W_{n-1}) = n-1$. また, T_1 も T_2 も W_{n-1} の変換を与へる. 実際, $\boldsymbol{v} \in W_{n-1}$ ならば
$$ (\boldsymbol{u}, T_i(\boldsymbol{v})) = ({T_i}^*(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\overline{\lambda_i}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 $$
より $T_i(\boldsymbol{v}) \in W_{n-1}$ である. W_{n-1} に対して帰納法の仮定を用ゐれば
(1) $T_1(W_k) = T_2(W_k) = W_k \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$,
(2) $\{\boldsymbol{0}\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-2} \subset W_{n-1}$,
(3) $\dim(W_k) = k \quad (0 \leqq k \leqq n-1)$
を満たす部分空間 $W_0, W_1, \cdots, W_{n-2}$ が得られる. これで, 主張は証明された.　□

定理 12.5.5 T_1 と T_2 を互ひに可換な V の線形変換とせよ. T_1 と T_2 の表現行列が同時に上三角行列となる様な V の正規直交基が存在する.

証明 12.5.4 の記号を用ゐる. 12.5.4 と Gram-Schmidt の正規直交化 12.1.14 により, V の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\boldsymbol{u}_k \in W_k$ かつ $\boldsymbol{u}_k \notin W_{k-1}$ なる様に選べば, この基に関する T_1 と T_2 の表現行列は上三角行列になる. □

定理 12.5.6 V の線形変換 T に関して, 次の 3 条件は同値である.
(1) T は正規変換である.
(2) T の表現行列が対角行列になる様な正規直交基が存在する.
(3) T の固有 vectors からなる正規直交基が存在する.

証明 (1)⇒(2). T が正規変換なので T と T^* は可換. そこで, これらに 12.5.5 を適用すると V の正規直交基が存在して T の表現行列 A と T^* の表現行列 A^* はともに上三角行列になる. このとき $A^* = {}^t\overline{A}$ であるから ${}^t\overline{A}$ が上三角行列ならば A は下三角行列になる. よつて A も A^* も対角行列でなければならない. (2)⇒(3) はほぼ明らかであらう.
(3)⇒(1). 正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について $T(\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とせよ. このとき

$$T^*(\boldsymbol{u}_i) = \overline{\lambda_i}\boldsymbol{u}_i \quad (1 \leqq i \leqq n) \tag{12.5.7}$$

となる. 実際, 任意の i, j について

$$(\boldsymbol{u}_i, T^*(\boldsymbol{u}_j)) = (T(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{u}_j) = \lambda_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \lambda_i\delta_{ij} = \lambda_j\delta_{ij} = (\boldsymbol{u}_i, \overline{\lambda_j}\boldsymbol{u}_j)$$

ゆゑ, 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ について $(\boldsymbol{u}, T^*(\boldsymbol{u}_j)) = (\boldsymbol{u}, \overline{\lambda_j}\boldsymbol{u}_j)$ となり, 12.1.7 より, $T^*(\boldsymbol{u}_j) = \overline{\lambda_j}\boldsymbol{u}_j$ でなければならない. このとき

$$\begin{aligned}
T^*T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) &= T^*\left((\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\right) \\
&= T^*(\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 T^*(\boldsymbol{u}_1), \cdots, \lambda_n T^*(\boldsymbol{u}_n)) \\
&= (\lambda_1 T^*(\boldsymbol{u}_1), \cdots, \lambda_n T^*(\boldsymbol{u}_n)) = T^*(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
&= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

TT^* の変換も同じ結果を与へるから T と T^* は可換であり, T は正規行列である. □

行列 A から定まる線形変換 T_A に関して 12.5.6 を適用すれば, 次が示される.

定理 12.5.8（Toeplitz の定理）A を正方行列とする. 次の 3 条件は同値である.
(1) A は正規行列である.
(2) Unitary 行列 U が存在して $U^{-1}AU$ が対角行列になる.
(3) A の適当な固有 vectors（列 vectors）を並べると unitary 行列になる.

問 12.5.9 12.5.8 の (2) ⇒ (3) を, 線形変換を経由しないで直接に証明せよ.

命題 12.5.10 T を V の正規変換とし, その相異なる固有値の全体を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ とする. このとき, 次が成り立つ.
(1) 固有空間 $W(\lambda_i, T)$ は互ひに直交する.
(2) 12.5.8(2) と 7.7.12 より, 直和分解

$$V = W(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r, T)$$

が得られる. いま V から $W(\lambda_i, T)$ への射影子を I_i と書くと, これに応じて,

$$T = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r$$

となる. これを T の spectrum 分解と称する（分解 (10.5.10) と比較されたい).

証明 (1) 以下の様に 8.5.12 と同じ方法で証明できる. λ と μ を T の異なる固有値とし, 任意に $\boldsymbol{u} \in W(\lambda, T)$, $\boldsymbol{v} \in W(\mu, T)$ を取れば,

$$\lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \big(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\big) = \big(\boldsymbol{u}, T^*(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \overline{\mu}\boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

なので $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ でなくてはならない.
(2) 12.5.6 により T は適当な基に関して対角行列で表はれる. 一方 11.2.12 により, 左辺と右辺の差は冪零変換であるから, その表現行列は冪零行列である. この 2 つのことから, その差の表現行列は零行列である. よつて T について所望の分解が得られる. □

注意 12.5.11 Spectrum 分解は函数解析学においてもとても重要かつ基本的な事項である. 10.5.9 に述べたこととも合はせて
　竹之内 脩 著, 函数解析, 朝倉書店 （初版は 1963 年）
の第 3 章を覗いて見られたい.

演習問題 12.5

12.5.12 行列 $A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 10+i & -4+2i & -12i \\ -10 & 5 & -2+4i \\ 8i & -10i & 10-i \end{bmatrix}$ について以下の問に答へよ.

(1) A が Hermite 行列ではないが正規行列であることを確かめよ.
(2) A^2 は Hermite 行列であることを確かめよ.
(3) Unitary 行列 P を求めて $P^{-1}AP = B$ を対角行列とせよ.

12.5.13 $A,\ B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ について $A,\ A^*,\ B,\ B^*$ のどの 2 つも交換可能であるためには, unitary 行列 U があつて, $U^{-1}AU$ と $U^{-1}BU$ がともに対角行列になることが必要十分である. これを証明せよ.

12.5.14 次の 2 つは同値であることを示せ. (Hint : 12.5.8 (Toeplitz の定理) の証明.)
(1) $2s$ 個の行列 $A_1,\ {A_1}^*,\ \cdots,\ A_s,\ {A_s}^*$ のどの 2 つも交換可能である.
(特に $A_1, \cdots, A_s$ は正規行列である)
(2) Unitary 行列 P が存在して $P^{-1}A_1P, \cdots, P^{-1}A_sP$ がすべて対角行列となる [49].

[49] 8.5.20 と同様に, この状況を $A_1, \cdots, A_s$ は unitary 行列で 同時対角化 されるといふ.

12.6 正定値 Hermite 行列

定義 12.6.1 Hermite 変換 $T : V \to V$ の固有値がすべて正のとき, T は正定値 Hermite 変換と呼ばれる. また, T の固有値がすべて非負であるとき, T は半正定値 Hermite 変換と呼ばれる.

問 12.6.2 上の記号で T が正定値 Hermite 変換であるためには, 写像

$$V \times V \to \mathbb{C}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto (T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$$

が Hermite 内積になることが必要十分である. これを示せ.

定義 12.6.3 Hermite 行列 A の固有値がすべて正のとき, A は正定値 Hermite 行列と呼ばれる. A の固有値がすべて非負であるとき, A は半正定値 Hermite 行列と呼ばれる.

注意 12.6.4 12.6.2 により, A が Hermite 正定値行列であるためには, 写像

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{v}$$

が Hermite 内積になることが必要十分である.

命題 12.6.5 V の Hermite 変換 T について, 次が成り立つ.
(1) T が正定値 Hermite 変換 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ について $(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) > 0$.
(2) T が半正定値 Hermite 変換 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ について $(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) \geqq 0$.

証明 (1) Hermite 変換は正規変換であつたから, 12.5.6 により, V には T の固有 vectors からなる正規直交基が存在する. それを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ とし, それぞれの固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする. 任意に $\boldsymbol{u} \in V$ をとり, $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$ と書けば,

$$\big(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\big) = (a_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\lambda_n\boldsymbol{u}_n, a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n) = \lambda_1|a_1|^2 + \cdots + \lambda_n|a_n|^2.$$

これにより, すべての λ_j が正であることと $\big(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\big) > 0$ $(\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0})$ が同値である.
(2) の証明は (1) と同様であるから省略する. □

命題 12.6.6 T が正定値（半正定値）Hermite 変換であるためには, $T = S^2$ を満たす正定値（半正定値）Hermite 変換 S が存在することが必要十分である. またこのとき, S は一意的に存在する.

証明 半正定値の場合も正定値の場合と同様に示されるから, 正定値の場合のみ示す.
（必要性） T を 12.5.10 に従つて spectrum 分解し, それを

$$T = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r, \quad (\lambda_i > 0)$$

と記す. ここで $I_i : V \longrightarrow W(\lambda_i, V) \, (\subset V)$ は射影子である. このとき,

$$S = \sqrt{\lambda_1} I_1 \oplus \cdots \oplus \sqrt{\lambda_r} I_r$$

とおくと, $T = S^2$ で

(12.6.7) $$W(\lambda_i, T) = W(\sqrt{\lambda_i}, S) \quad (1 \leqq i \leqq r)$$

であることが確かめられる（問 12.6.8）．よつて S も正定値 Hermite 変換である．
次に S の存在の一意性を示す．いま，S' も Hermite 変換で $T = S'^2$ を満たすとせよ．S' の異なる固有値のすべてを $\mu_1, \cdots, \mu_s$ とし，各 $1 \leqq i \leqq s$ について I'_i を V から $W(\mu_i, S')$ への射影子とすれば，S' は

$$S' = \mu_1 I'_1 \oplus \cdots \oplus \mu_s I'_s$$

と spectrum 分解される．このとき，$S'^2 = T$ であるから $s = r$ で，番号を付け替へれば $\mu_1{}^2 = \lambda_1, \cdots, \mu_r{}^2 = \lambda_r$ となることがわかる．このことから容易に $S' = S$ がわかる．
（十分性） これは明らかである． □

問 12.6.8 (12.6.7) を導く過程を詳しく述べよ．

12.6.6 を行列の言葉で述べておく．

命題 12.6.9 正方行列 A が（半）正定値 Hermite 行列であるためには，A が Hermite 行列で $A = B^2$ となる（半）正定値 Hermite 行列 B が存在することが必要十分である．

定義 12.6.10 （半）正定値 Hermite 変換 T に対して $T = S^2$ となる唯一の（半）正定値 Hermite 変換 S を $\sqrt{T}$ で表す．同様に，（半）正定値 Hermite 行列 A に対して $A = B^2$ となる唯一の（半）正定値 Hermite 行列 B を $\sqrt{A}$ で表す．

補題 12.6.11 対角化可能な線形変換 H，その固有値 α，自然数 ℓ に対して，

$$W(\alpha, H) = W(\alpha^\ell, H^\ell).$$

証明 基を定めておき，H の表現行列を A とすれば正則行列 P と H の固有値を対角成分に持つ行列 B が存在して，$A = PBP^{-1}$ と書ける．このとき $A^2 = PB^2P^{-1}$ となるから，P の任意の列 vector は A のある固有値 α に関する固有 vector であり，同時に A^2 の固有値 α^2 に関する固有 vector でもある．具体的に書けば次の様になる．A の固有値のすべてを，重複も込めて $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と書き，$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix}$ とおいて，$P = [\,\boldsymbol{p}_1 \cdots, \boldsymbol{p}_n\,]$ によつて $B = P^{-1}AP$ となつてゐるものとする．このとき A^2 の固有値の全体は，重複も込めて $\alpha_1{}^2, \cdots, \alpha_n{}^2$ であり，$P^{-1}A^2P = B^2$ となつてゐる．つまり $A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{p}_i$, $A^2\boldsymbol{p}_i = \alpha_i{}^2 \boldsymbol{p}_i$ である．それゆゑ $W(\alpha_i, A) \subset W(\alpha_i{}^2, A^2)$ であるが，7.7.9 と合はせると

$$n = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{C}} W(\alpha_i, A) \leqq \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{C}} W(\alpha_i{}^2, A^2) = n.$$

よつて $W(\alpha_i, A) = W(\alpha_i{}^2, A^2)$．$\ell > 2$ の場合も同様に示される． □

定理 12.6.12 (1) Hermite 空間 V について, V を単なる $\mathbb{C}$ 上の vector 空間として見たときの任意の同型変換 T は, Hermite 空間としての V のある正定値 Hermite 変換 H とある unitary 変換 U の積として $T = HU$ の形に一意的に書かれる. このとき $HU = UH$ であるためには T が正規変換であることが必要十分である.
(2) 任意の正則行列 A は, ある正定値 Hermite 行列 B とある unitary 行列 C の積として $A = BC$ の形に一意的に書かれる. このとき $BC = CB$ であるためには A が正規行列であることが必要十分である.

証明 (1) 仮定より 0 は T の固有値ではない. また T^* も正則である. よつて $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ のとき, $T^*(\boldsymbol{u}) \neq \mathbf{0}$ であり,

$$(TT^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = (T^*(\boldsymbol{u}), T^*(\boldsymbol{u})) > 0 \quad (\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0})$$

であるから, TT^* は正定値である. 線形変換 TT^* は Hermite 変換なので, 結局 TT^* は正定値 Hermite 変換である. ゆゑに, 12.6.6 により唯一存在する正定値 Hermite 変換 $\sqrt{TT^*}$ を H とおく. H はもちろん正則変換である. さらに $U = H^{-1}T$ とおくと

$$UU^* = (H^{-1}T)(H^{-1}T)^* = H^{-1}TT^*H^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I$$

であり, U が Unitary 変換であることがわかつた. これで, 所望の表示 $T = HU$ が得られた. 次に, この形の表示の一意性を示さう. いま 2 通りに $T = H_1U_1 = H_2U_2$ と表されたとせよ. このとき

$$H_2 = H_1U_1{U_2}^{-1}, \quad H_2 = {H_2}^* = ({U_2}^{-1})^*{U_1}^*{U_1}^* = U_2{U_1}^{-1}H_1$$

であるから,

$${H_2}^2 = (H_1U_1{U_2}^{-1})(U_2{U_1}^{-1}H_1) = {H_1}^2$$

となる. H_1 も H_2 も正定値 Hermite 変換であることから, 再び 12.6.6 を使つて

$$H_1 = \sqrt{{H_1}^2} = \sqrt{{H_2}^2} = H_2.$$

これより $U_1 = U_2$ が従ふ.
次に T を正規変換とする. $T^*T = TT^*$ から $(HU)^*HU = HU(HU)^*$ であるが, これは $H^2U = UH^2$ を意味する. しかるに, 12.6.11 と 10.4.4 により, これは $HU = UH$ と同値である. 逆に, $HU = UH$ ならば T が正規変換になることは, この議論を逆に辿ればよい.
(2) 同型変換の表現行列は正則行列, Hermite 変換の表現行列は Hermite 行列, unitary 変換の表現行列は unitary 行列であつて, 変換の合成の表現行列は表現行列の積であるから, (1) より (2) が従ふ. □

注意 12.6.13 上記 12.6.12(1) において, V が $\mathbb{C}$ 上の 1 次元 vector 空間であれば, V の Hermite 変換 H は正の実数倍であり, それは本質的には, 複素数平面の原点を中心にした拡大写像であつて, U は絶対値 1 の複素数を掛けること, つまり原点中心の回転を表す. 任意の正則変換はこれらの合成であるから, 12.6.12(1) や (2) は, 任意の複素数 z が $z = re^{i\theta}$ と表示されることの“行列の世界”における類似である.

演 習 問 題 12.6

12.6.14 12.6.12 の主張の $T = HU$ を $T = UH$ に変へた場合に, 主張は成立するか.
（Hint：12.4.6, 12.4.16, および ${}^t(HU) = {}^tU\,{}^tH$.）

12.6.15 次の問に答へよ.
(1) $U^2 = -I$ となる 2 次 unitary 行列 U を 2 つ挙げよ. それらの固有値を求めよ.
(2) $U^2 = -I$ となる 3 次 unitary 行列 U を 3 つ挙げよ. それらの固有値を求めよ.
(3) 正則な歪 Hermite 行列 S に対し, SU が正定値 Hermite 行列になり $SU = US$ かつ $U^2 = -I$ となる uniraty 行列 U が一意的に存在することを示せ.

索 引

Greek Alphabet

	大文字	小文字	読み	読み	対応する alphabet
1	A	α	alpha	アルファ	a
2	B	β	beta	ベータ	b
3	Γ	γ	gamma	ガンマ	g
4	Δ	δ	delta	デルタ	d
5	E	ε, ϵ	epsilon	イプシロン	e
6	Z	ζ	zeta	ゼータ	z
7	H	η	eta	エータ	ē
8	Θ	θ, ϑ	theta	テータ, シータ	th
9	I	ι	iota	イオタ	i
10	K	κ	kappa	カッパ	k
11	Λ	λ	lambda	ラムダ	l
12	M	μ	mu	ミュー	m
13	N	ν	nu	ニュー	n
14	Ξ	ξ	xi	クシイ	x
15	O	o	omicron	オミクロン	o
16	Π	π, ϖ	pi	パイ	p
17	P	ρ, ϱ	rho	ロー	r
18	Σ	σ, ς	sigma	シグマ	s
19	T	τ	tau	タウ	t
20	Υ	υ	upsilon	ウプシロン	u
21	Φ	φ, ϕ	phi	ファイ	ph
22	X	χ	chi	カイ	ch
23	Ψ	ψ	psi	プシイ, プサイ	ps
24	Ω	ω	omega	オメガ	ō