実施：2016 年 7 月 14 日 (木) 10:50-12:20, H-401 室

2016 年度 前期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代数学 I 木曜 2 時限, 教科書：Original	A	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **2a** **2b**, **5a** **5b** は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) G を群, $H < G$, $c \in G$ とする. このとき $c^{-1}Hc < G$ を示せ.

2a (15 点) S_4 の部分群で, 巡回群でない有限 Abel 群の例を挙げよ. なぜ, 巡回群でないとわかるのかも述べること.

2b (15 点) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ が行列の積に関して生成する巡回群の位数を求めよ.

3 (10 点) 位数 45375 ($= 3\cdot 5^3\cdot 11^2$) の巡回群の生成元はいくつあるか.

4 (15 点) 位数 41 の元 a から生成される巡回群 G がある. このとき, a^{13} は G の生成元であるか. もし, そうならば $(a^{13})^m = a$ となる整数 m が存在する筈である. その様な m で $0 \leqq m < 41$ なるものを求めよ.

5a (15 点) $d = \gcd(m, n)$ とする．連立方程式 $x \equiv a \bmod m$, $x \equiv b \bmod n$ が解を持つためには, $a \equiv b \bmod d$ であることが必要十分であることを示せ.

5b (15 点) 素数 p に対し, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を成分とする行列の集合

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ ad - bc \neq \overline{0} \right\}$$

を考える．演算は通常の行列の積を $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ で行うものとする．このとき, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ ($\underline{p=5}$) において, $\begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{4} \end{bmatrix}$ の逆元を求めよ.

6 (10 点) 3 は法 31 の原始根である．法 31 のすべての原始根を求めよ.

7 (10 点) $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$ において, $f(x) = x^3 + x^2 + \overline{3}x + \overline{2}$ を因数分解せよ．1 次式だけの積になるとは限らない.

8 (5 点) 位数が素数の群は巡回群であることを示せ.
(Hint : Lagrange の定理)

9 (5 点) p は奇素数であつて, $a^{2^n} + 1$ の約数であるとせよ．このとき $p \equiv 1 \bmod 2^{n+1}$ であることを示せ.
(Hint : a の $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times}$ における位数がわかれば, この巡回群の位数を考へると証明できる．)

ここより下に記入しないで下さい.