代　数　学　1

2022 年度版

はじめに

この講義の第 1 の目的は通常の整数環

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

と Gauss 整数環と呼ばれる

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + bi \,|\, a,\ b \in \mathbb{Z} \,\}$$

が類似してゐることを解説することにある. 特に, $\mathbb{Z}$ における素数の概念は $\mathbb{Z}[i]$ においても有効であり, 後者の素数がどの様なものであるかを詳述する. その上で, 素因数分解の一意性が $\mathbb{Z}[i]$ でも成り立つことを証明する.

もう 1 つの目的は, この講義のあとに続く代数学の講義に登場する概念の具体例を与へることであり, それらの講義を受講する際に助けとなる様な内容を盛り込むことである. その概念とは, 群, 部分群, 巡回群, 剰余類分解, 環, 体, 剰余環, ideal などである.

André Weil の教科書 [W] はこの講義の内容に近い. [W] には多くの演習問題が収録されてゐるので, 講義の進度に合はせて, それらの問題を解いていくことをお勧めする.

この講義 note は 2015 年度前期の 代数学 1 の講義を進めながら執筆したものであるが, 2016 年度の数学科受講生からは講義中に多くの指摘を受け, ほぼ完備なものになつたと思ふ. ここに, その学生のみなさんに御礼申し上げる.

この note では, 定理, 命題, 補題, 例, 例題, 練習, 演習問題等のすべてを通し番号にしてゐる. また, 演習問題のうち番号に * が付いてゐるものはやや難しい問題である.

記号の約束 $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体, $\mathbb{C}$ は複素数全体をそれぞれ表すものとする. また $A := B$ は, A を B でもつて定義することを示す記号である.

目 次

索 引

1. 対称群

次節以降で群の抽象的な説明をするに先立ち, 群のひとつの重要な例として対称群と呼ばれるものを学ぶ. 自然数 n を固定する. n 個の要素からなる集合をひとつ用意する. わかり易くするため $\{1,2,\cdots,n\}$ とする. このとき

$$S_n = \left\{ \sigma \;\middle|\; \sigma : \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\} \text{ は全単射} \right\}$$

とおく. $\sigma \in S_n$ について $\sigma(1) = k_1$, $\sigma(2) = k_2$, $\cdots$, $\sigma(n) = k_n$ であることを

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と表す. さらに S_n において写像の合成により演算を考へる. $\sigma, \tau \in S_n$ のときこれらの写像の合成 $\sigma \circ \tau$ を普通は $\sigma\tau$ と書いて σ と τ の積と呼ぶ. この積といふ演算について, 結合法則は成り立つが, 交換法則は成り立たない（確認せよ）.

例 1.2. 上の記号で $n = 5$ として, $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 4$, $\sigma(5) = 1$ のとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

と書く. また $\tau(1) = 5$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$, $\tau(4) = 2$, $\tau(5) = 4$ のとき

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

である. このとき $\sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(5) = 1$ であり, 同様に $\sigma\tau(2) = 3$, $\sigma\tau(3) = 5$, $\sigma\tau(4) = 2$, $\sigma\tau(5) = 4$ であるから,

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

まづ, $\sigma \in S_n$ について (1.1) の記法において $\sigma(j) = j$ である様な列は省いて良いことにする. また, (1.1) において, 第 1 列の数字のすぐ下にそれが写る数字がありさへすれば, 左右の並び順は問はないものとする.

例 1.3. 1.2 の σ について

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

集合 S_n の要素を n 次の置換と呼ぶ. S_n の要素のうち, 1, 2, $\cdots$, n の全てをそれ自身に写す置換は, 恒等置換と呼ばれ, 通常 ε と表示される :

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

任意の $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$ が成り立つ.

また

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

とおき, これを σ の逆置換と呼ぶ. ここで, 等式

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$$

が成り立つ.

例 1.4. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ならば,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

定義 1.5. 上の集合 S_n を演算も考慮に入れた上で n 次対称群と呼ぶ.

問 1.6. S_n の要素の個数は $n!$ であることを示せ.

洗練された記号へ より使ひ易い記号を導入する. 定義域 $\{1,2,\cdots,n\}$ の m 個の要素からなる部分集合 $\{k_1,\cdots,k_m\}$ について, 上の記法で

$$\rho = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_m \\ k_2 & k_3 & k_4 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}$$

の様に隣に順繰りに写す写像 ρ はm 次の巡回置換であると言はれて, 略記号で

$$\rho = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_m \\ k_2 & k_3 & k_4 & \cdots & k_1 \end{pmatrix} = (k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_m) \tag{1.7}$$

と書かれる. 2 次の巡回置換は互換と呼ばれる.

例 1.8. これらの例として

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (4\ \ 3\ \ 5\ \ 7), \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (4\ \ 3)$$

はどちらも巡回置換である. 特に, 後者の $(4\ \ 3)$ は互換である.

いくつかの n 次置換 σ_1 σ_2, $\cdots$, σ_ℓ について, 真(しん)に動く数字 (自身に写る数字以外の数字) に共通なものがないとき, これらは互ひに素な置換であるといふ. 互ひに素な置換の積はその順序に依らない (可換であるといふ).

補題 1.9. どんな置換も, 互ひに素な巡回置換の積で表せる.

これは例で説明した方がわかり易い.

例 1.10. 置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

で写る数字を順次観察すると $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 1$, $2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 2$ と写つてゐて, これで全ての数字を尽してゐるから

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7)(2\ \ 4\ \ 6) = (2\ \ 4\ \ 6)(1\ \ 3\ \ 5\ \ 7).$$

かう見てみると (1.7) の記法は返つて元の記号よりわかり易くなつたことに気付くであらう.

補題 1.11. いかなる巡回置換も互換のみの積で表せる.

これも例で説明した方がわかり易いが, 練習問題として取り上げる.

問 1.12. (1) 次の等式を確かめよ :

$$(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6) = (1\ \ 6)(1\ \ 5)(1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2).$$

(2) 一般に, 次の式が成り立つことを示せ :

$$(k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ \cdots\ \ k_m) = (k_1\ \ k_m)(k_1\ \ k_{m-1})\cdots(k_1\ \ k_3)(k_1\ \ k_2).$$

1.9 と 1.11 より次がわかる.

命題 1.13. いかなる置換も互換のみの積として表せる.

問 1.14. 次の置換を互換のみの積で表せ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

演習問題

1.15. ひとつの置換を互換の積で表す仕方は何通りもあり, その積に現れる互換の個数も様々であることを例をあげて示せ.

以下の 1.16 から 1.19 は一続きの問題である.

1.16. n 個の文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用意する. これらの文字からなる (係数がすべて, 例へば $\mathbb{Q}$ に属する) 多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\sigma \in S_n$ について, 新たな多項式 σf を

$$(\sigma f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

で定める. このとき, 以下のそれぞれについて σf を求めよ.
(1) $f = x_1 x_3 + 2{x_1}^2 + x_3 + x_4$, $\sigma = (1\ 2\ 4)$.
(2) $f = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$, $\sigma = (1\ 2)$.
(3) $f = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$, $\sigma = (1\ 2\ 3)$.

1.17. 任意の $\tau, \sigma \in S_n$ と任意の多項式 f について $(\tau\sigma)f = \tau(\sigma f)$ が成り立つことを示せ.

1.18. いま,

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

とおく[1)]. このとき, 任意の互換 σ について $\sigma\Delta = -\Delta$ となることを証明せよ.

1.19. 任意の置換 σ について, σ を互換のみの積として, どう表しても使用する互換の個数の偶奇は σ のみで定まり, 表し方に依らないことを証明せよ.
(ここでの方法以外にも非常に多くの証明が知られてゐるので, 調べてみると良い.)

1.20. 1.19 によつて, 符号と呼ばれる写像

$$\mathrm{sgn} : S_n \to \{1, -1\}$$

を, 置換 $\sigma \in S_n$ が m 個の互換で表されるとき $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ と定めることで定義できる (m の値に依存しないで σ だけで決まる). このとき $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$ となることを示せ. また, 置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

を互換の積で表し, 符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を求めよ.

1.21. $\sigma \in S_n$ について, $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ を示せ.

[1)] 例へば $n = 4$ なら $\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)$
$\cdot(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)$
$\cdot(x_3 - x_4)$.

1.22. 1 から n までの自然数が与へられてゐる. これを並べた順列 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ において, $i<j$ かつ $k_i>k_j$ となる（大小関係が逆転してゐる）組 (k_i, k_j) を転倒した組といふ. 転倒した組の個数をこの順列の転倒数といふ. 例へば $n=7$ で

$$5,\ 1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 4,\ 3$$

の転倒した組は

$$(5,1),\ (5,2),\ (5,4),\ (5,3),\quad (6,4),\ (6,3),\quad (7,4),\ (7,3),\quad (4,3)$$

の 9 組なので, 転倒数は 9 である. 1 から 8 までの自然数の順列

$$8,\ 3,\ 7,\ 4,\ 5,\ 1,\ 6,\ 2$$

の転倒した組をすべて挙げ, 転倒数を求めよ.

1.23. n 次の置換 σ に対して, それの第 1 行の数を小さい順に並べた表示

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

の第 2 行 $(k_1,\ k_2,\ \cdots\ k_n)$ を順列とみなし, それの転倒数を置換 σ の転倒数と呼んで, $r(\sigma)$ と書く. また $(a\ \ a{+}1)$ の形の互換を隣接互換と呼ぶ. 置換 σ と隣接互換との積 $\sigma(a\ \ a{+}1)$ の転倒数 $r\big(\sigma(a\ \ a{+}1)\big)$ は $r(\sigma)+1$ か $r(\sigma)-1$ に等しいことを示せ.

1.24. 任意の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

は隣接互換だけの積で表され, しかもその際に必要な隣接互換の最小数は, σ の転倒数に一致することを証明せよ. （Hint : $k_a<k_{a+1}$ なる a があれば, 積 $\sigma(a\ \ a+1)$ の転倒数が σ のそれと比較してどうなるかを考へよ. ）

1.25. 1.23 の記号を使ひ, 置換 σ について, $\overline{\mathrm{sgn}}(\sigma)=(-1)^{r(\sigma)}$ と定める. 1.20 で定めた符号について

$$\overline{\mathrm{sgn}}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma)$$

となることを示せ.

2. 群

例へば, 整数の全体 $\mathbb{Z}$ の加法といふ演算は, $(a,b)\mapsto a+b$ で定められた写像 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ のことに他ならない. 一般に, 集合 G に関して, ある写像 $G\times G\to G$ が定義されてゐるとき, G に演算が定義されてゐるといふ.

定義 2.1. 集合 G が群であるとは, 次の 4 つが全て成り立つときをいふ:
G0. 演算 $G\times G\to G$, $(a,b)\mapsto ab$ が定義されてゐる. この演算について以下が成立:
G1. 結合法則: G の任意の元 a, b, c について $(ab)c=a(bc)$.
G2. 単位元の存在: ある元 $1_G\in G$ が存在して任意の $a\in G$ について $1_G a=a1_G=a$ が成り立つ. 1_G は単位元と呼ばれる. (特に $G\neq\varnothing$ である.)
G3. 逆元の存在: 任意の元 $a\in G$ に対し, $ax=xa=1_G$ を満たす元 $x\in G$ が存在する. その様な x を a の逆元と呼ぶ. 一般的な状況では, その様な x を a^{-1} と記す.
以降では, 混乱を招かない限り, 1_G を単に 1 と記す.

また, G が群であつて（つまり **G0**, **G1**, **G2**, **G3** を満たし）しかも

G4 交換法則: 任意の a, $b\in G$ に対して $ab=ba$

も満たすならば, G は Abel 群または可換群であると言はれる. 可換群でない群を非可換群と呼ぶ. G が群のとき, 各 $a\in G$ ごとにその逆元は唯一つだけ存在する. 実際, もし x と y がともに a の逆元であれば, $xa=ax=1$, $ya=ay=1$ であるから

$$y=y1=y(ax)=(ya)x=1x=x$$

となるからである. 同様に, 単位元も唯 1 つだけ存在する (確かめよ). 群 G に対して, その要素の個数を G の位数といひ, 記号 $|G|$ または $\#G$ で表す. 要素の個数が無限個の場合は, 位数は無限大であるといひ, $|G|=\infty$, $\#G=\infty$ と記す.

例 2.2. 群に近いが, 群ではない例をいくつか挙げる.
(1) 自然数の集合 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ について加法をその演算と見たとき, **G0**, **G1** は成り立つが, **G2** と **G3** は成立しない. (**G4** も成立してゐる)
(2) 自然数の集合 $\mathbb{N}$ について乗法をその演算と見たとき, **G0**, **G1**, **G2** は成り立つが, **G3** は成立しない. (**G4** も成立してゐる)

例 2.3. 群の例をいくつか挙げる.
(1) 加法を演算として, 整数の全体 $\mathbb{Z}$ は群をなす. 単位元は 0 で a の逆元は $-a$.
(2) 加法を演算として, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$.
(3) 乗法を演算として, 0 以外の有理数の全体 $\mathbb{Q}^\times$.
(4) 前節で述べた対称群 S_n.
(5) 行列の乗法を演算として, 成分がすべて整数で行列式が 1 である様な 2 次正方行列全体 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. これは $\mathbb{Z}$ 上の 2 次特殊線形群 (the special linear group of degree 2 over $\mathbb{Z}$) と呼ばれる.
(6) 行列の乗法を演算として, 成分がすべて有理数で, 行列式が 0 でない 2 次正方行列全体 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$. これは $\mathbb{Q}$ 上の 2 次一般線形群 (the general linear group of degree 2 over $\mathbb{Q}$) と呼ばれる. また, 実数を成分とする同様な集合 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$.
(7) 後述する対象であるが, 正の整数 n に対し, 法 n による剰余類の全体 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は加法を演算として, 位数 n の Abel 群である.

演習問題

2.4. 次の表は S_3 における演算の結果を表にしたものであり, 一般に演算表と呼ばれる. 一箇所だけ記入されてゐるのは $(12)(13)=(132)$ を意味する. この表を完成させよ.

左＼右	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
ε						
(12)			(132)			
(13)						
(23)						
(123)						
(132)						

2.5. すべての成分が整数であり行列式が 0 でない 2 次正方行列のすべてからなる集合 M に演算として行列の積を込めて考へる. このとき, **G0**, **G1**, **G2** は成り立つが **G3** と **G4** が成り立たないことを示せ.

2.6. G を群とする. $a\in G$ を固定する. 次の写像は全単射であることを証明せよ.
(1) $\iota : G\to G,\ \ x\mapsto x^{-1}$.
(2) $\lambda_a : G\to G,\ \ x\mapsto ax$.
(3) $\rho_a : G\to G,\ \ x\mapsto xa$.

2.7. 群 G の 4 つの要素 a_1, a_2, a_3, a_4 について

$$\big((a_1a_2)a_3\big)a_4,\ \big(a_1(a_2a_3)\big)a_4,\ a_1\big((a_2a_3)a_4\big),\ a_1\big(a_2(a_3a_4)\big),\ (a_1a_2)(a_3a_4)$$

はすべて相等しい. このことを示せ.

上のことは 5 つ以上の要素の演算についても同様であつて, どこから計算しても同一の結果を得る. これより, いくつかの要素の演算を $a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n$ と書いても誤解は生じない.

2.8. 群 G の任意の元 a, b について $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ であることを示せ. 一般に G の n 個の元 $a_i\in G\ \ (i=1,\cdots,n)$ について, $(a_1a_2\cdots a_n)^{-1}={a_n}^{-1}\cdots{a_2}^{-1}{a_1}^{-1}$ となることを示せ.

2.9. 群 G の任意の要素 a は $a^2(=aa)=1$ を満たすとする. このとき, G は Abel 群であることを示せ.

2.10. 対称群 S_n における逆元について, 次を示せ.
(1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & \ell\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_\ell\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_\ell\\ 1 & 2 & \cdots & \ell\end{pmatrix}$
(2) $\big((j_1\ \ j_2)(j_3\ \ j_4)\cdots(j_{m-1}\ \ j_m)\big)^{-1}=(j_{m-1}\ \ j_m)\cdots(j_3\ \ j_4)(j_1\ \ j_2)$

2.11. $n\geqq 3$ のとき S_n は Abel 群ではない. これを示せ. (Hint : まづは S_3 が Abel 群でないことを確認せよ.)

2.12. S_4 の $\{\varepsilon\}$ 以外の真の部分集合で可換な群になつてゐるものと非可換な群になつてゐるもの (次節で学ぶ部分群) をそれぞれ 2 つづつ挙げよ.

3. 部分群

群 G の部分集合 H が G の演算で群になつてゐるとき, H は G の部分群であるといはれ, $H<G$ あるいは $G>H$ と記す. この場合, 条件 **G0** は G の演算が H で閉ぢてゐること[2)]を意味する. 部分群は空集合ではない. 単位元のみからなる $\{1\}$ や G 自身は部分群である.

例 3.1. 加法に関する群 $\mathbb{Z}$ と 1 つの $m\in\mathbb{Z}$ について, m の倍数の全体 $m\mathbb{Z}$ は部分群である.

例 3.2. 0 以外の有理数全体のなす乗法に関する群 $\mathbb{Q}^\times$ と, $m\in\mathbb{Q}^\times$ について,

$$m^{\mathbb{Z}}=\{m^k\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$$

は $\mathbb{Q}^\times$ の部分群である: $m^{\mathbb{Z}}<\mathbb{Q}^\times$.

例 3.3. 4 次対称群 S_4 のすべての元を書けば

$$\begin{aligned}S_4=\{&\varepsilon,\ (12),\ (13),\ (14),\ (23),\ (24),\ (34),\\ &(123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243),\\ &(1234),\ (1243),\ (1324),\ (1342),\ (1423),\ (1432),\\ &(12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}\end{aligned}$$

この中で

$$\begin{aligned}S_3&=\{\varepsilon,(12),\ (13),\ (23),\ (123),\ (132)\},\\ V&=\{\varepsilon,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}\end{aligned}$$

はどちらも S_4 の部分群である. V は Klein の 4 元群とよばれる.

問 3.4. 上記, 3.3 で $V<S_4$ であることを確かめよ.

例 3.5. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ は $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の部分群である. 他に,

$$T=\left\{\begin{bmatrix}a&\\&a\end{bmatrix}\,\middle|\,a\in\mathbb{R}^\times\right\},\qquad A=\left\{\begin{bmatrix}a&\\&c\end{bmatrix}\,\middle|\,a,\ c\in\mathbb{R}^\times\right\},$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\&c\end{bmatrix}\,\middle|\,a,\ c\in\mathbb{R}^\times,\ b\in\mathbb{R}\right\},\quad C=\left\{\begin{bmatrix}1&b\\&1\end{bmatrix}\,\middle|\,b\in\mathbb{R}\right\}$$

なども $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ の部分群である[3)]. 但し, 成分が 0 である場合は空欄としてゐる.

例 3.6. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ は多種多様な部分群を多く含む. (一例が 3.17 にある.)

問 3.7. 3.5 の言明をすべて確認せよ.

例 3.8. 次が成り立つ:

$$\left.\begin{matrix}\{1,\ -1\}\\ \{z\,|\,z\in\mathbb{C},\ z^3=1\}\end{matrix}\right\}<\{z\,|\,z\in\mathbb{C},\ z^6=1\}<\{z\,|\,z\in\mathbb{C},\ z^{12}=1\}<\{z\,\big|\,|z|=1\}<\mathbb{C}^\times$$

問 3.9. G が群で $H<G$, $K<G$ のとき, $H\cap K<G$ であることを示せ.

[2)] つまり G の演算 $G\times G\to G$ を $H\times H$ に制限することで $H\times H\to H$ が得られること.

[3)] $\mathbb{R}^\times$ は 0 を除いた実数全体を表す.

演習問題

3.10. 3.3 で述べた Klein の四元群 V ($<S_4$) について, 下記の演算表を完成させよ.

左＼右	ε	$(12)(34)$	$(13)(24)$	$(14)(23)$
ε				
$(12)(34)$				
$(13)(24)$				
$(14)(23)$				

3.11. 群 G の部分集合 H が部分群であるためには,
S1. $a, b \in H$ ならば $ab \in H$,
S2. $a \in H$ ならば $a^{-1} \in H$
の 2 つが共に成り立つことが必要十分である. これを示せ.

3.12. G を群とする.

$$Z(G) = \{\, g \in G \mid gx = xg \ \ (\forall x \in G) \,\}$$

とおくとき, $Z(G) < G$ を示せ. $Z(G)$ は G の<u>中心</u>と呼ばれる.

3.13. G を群とし, $H < G$ とする. また $c \in G$ を取り固定する. このとき

$$c^{-1}Hc = \{c^{-1}hc \,|\, h \in H\} < G$$

であることを示せ. これを H の (1 つの) <u>共役部分群</u>と呼ぶ.

3.14. 対称群 S_n の部分集合 $A_n = \{\sigma \in S_n \,|\, \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ は S_n の部分群であることを示せ. さらに, その位数は $n=1$ なら 1, $n \geqslant 2$ なら $n!/2$ であることを示せ. A_n は n 次<u>交代群</u>と呼ばれる. また $\{\sigma \in S_n \,|\, \mathrm{sgn}(\sigma) = -1\}$ は部分群でないことを示せ.

3.15. 3 次対称群 S_3 の部分群を全て挙げよ. (ちなみに S_4 の全ての部分群を 12.13 で求める.)

3.16. 4 次対称群 S_4 の部分集合 $H = \{\varepsilon, (13)\}$, $K = \{\varepsilon, (124), (142)\}$ は S_4 の部分群であることを確認せよ. また $H \cup K$ および $HK = \{hk \,|\, h \in H,\ k \in K\}$ は S_4 の部分群ではないことを示せ.

3.17. 自然数 N に対し,

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \;\middle|\; a-1,\, d-1,\, b,\, c \text{ は } N \text{ の倍数} \right\}$$

とおく. $\Gamma(N) < \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ であることを示せ.

4. 巡回群

群 G の元 a に対して, $aa=a^2$, $(aa)a=a(aa)=a^3$ 等と記す. また a の逆元 a^{-1} に対して $a^{-1}a^{-1}=a^{-2}$, $a^{-1}a^{-1}a^{-1}=a^{-3}$ などと記す. これにより, "指数法則"

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (m,\ n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

問 4.1. 次の問に答へよ.

(1) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$ について, S_5 の部分集合 $\{\sigma^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ の元をすべて列記せよ. またこれが S_5 の部分群であることを確かめよ.

(2) より一般に, G を群として $a \in G$ を一つ取り固定するとき, G の部分集合 $\{a^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ は G の部分群であることを示せ.

定義 4.2. 群 G に対し, 元 $a \in G$ が存在して

$$G = \{a^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

と表せるとき, G を巡回群と呼ぶ. この場合 a を G の生成元と呼び, G は a で生成されるといふ. この状況を $G = \langle a \rangle$ と表す.

一般に, 群 G と $a \in G$ について, $a^k = 1$ となる最小の正の整数 k を a の位数といひ $\operatorname{ord} a$ と書く. $\langle a \rangle = G$ のとき G の位数は a の位数と一致する. なぜなら, 元 a の位数が n (つまり $\operatorname{ord} a = n$) のとき

$$1, a, a^2, \cdots, a^{n-1}$$

は互ひに異なる元である $(*)$ からである. 位数が有限な巡回群は有限巡回群と呼ばれる.

また どの a^k $(k \neq 0)$ も単位元 1 と異なるとき, a は位数無限の元であるといはれ $\operatorname{ord} a = \infty$ と書かれる. 下の 4.4 (1) における元 1 と 例 (2) における元 3 は位数無限である. 位数が無限の巡回群は無限巡回群と呼ばれる. 無限巡回群においては, $a^k = a^{k'} \Longleftrightarrow k = k'$ が成り立つ $(**)$.

問 4.3. 上記の波線部 $(*)$ と $(**)$ を証明せよ.

例 4.4. 巡回群の例を挙げる.

(1) 加法に関して $\mathbb{Z}$ は 1 で生成される巡回群である.

(2) 乗法に関して $3^{\mathbb{Z}} = \{3^k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ は 3 で生成される巡回群である.

(3) 複素数体の中で 1 の 3 乗根の全体 $\{z \,|\, z^3 = 1\}$ は乗法に関して巡回群である.

(4) 同じく, 1 の 4 乗根の全体 $\{z \,|\, z^4 = 1\} = \{1, i, -1, -i\}$ は巡回群である.

(5) 同じく, 1 の 5 乗根の全体 $\{z \,|\, z^5 = 1\} = \{\cos\frac{2\pi k}{5} + i \sin\frac{2\pi k}{5} \,|\, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ は巡回群.

(6) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とおく. このとき, 集合 $\{I, A, A^2, A^3\}$ は行列の積に関して A で生成される巡回群である. ただし I は単位行列. ($A^4 = I$ となることを確かめよ.)

問 4.5. 巡回群は Abel 群である. これを示せ.

例題 4.6. 次のことを証明せよ.
(1) 巡回群の部分群はどれも巡回群である.
(2) 位数 n の有限巡回群 $\langle a\rangle$ の部分群はどれも, n の約数 m により $\langle a^m\rangle$ と書かれる.
(3) 無限位数の巡回群 $\langle a\rangle$ について, 次の (3a), (3b), (3c) が成り立つ.
(3a) $\{1\}$ 以外の部分群は, どれも, $m\in\mathbb{N}$ により $\langle a^m\rangle$ と書ける.
(3b) $m_1, m_2\in\mathbb{N}$ に対し, $m_1\neq m_2$ ならば $\langle a^{m_1}\rangle\neq\langle a^{m_2}\rangle$ である.
(3c) $\{1\}$ 以外のどの部分群も無限位数の巡回群である.

解答 (1) H を $\langle a\rangle$ の任意の部分群とせよ. もちろん H の元はどれも a^k の形に書ける. もしも $H=\{1\}$ ならば, 証明は済んでゐるから, $H\neq\{1\}$ とし, $a^k\in H$ となる k の中で正で最小なものを m とおく. その様な m は存在する. なぜなら $a^k\in H$ となる整数 $k(\neq 0)$ があるが, $a^k\in H$ ならば $a^{-k}\in H$ であるから. さて, 任意に $a^k\in H$ を取る. このとき $k=mq+r$ $(0\leqq r<m)$ となる整数 q と r が存在する. しかるに $a^r=a^{k-mq}=a^k(a^m)^{-q}$ であり H は部分群であるから, $a^r\in H$ が導かれる. m の選び方から $r=0$ でなければならない. つまり $k=mq$. よつて H の任意の元は $a^{mq}=(a^m)^q$ の形に書かれる. つまり $H=\langle a^m\rangle$.
(2) $\{1\}=\langle a^n\rangle$ と書けるから (1) の証明と合はせて, $\langle a\rangle$ の任意の部分群は, ともかく正で最小な m により $\langle a^m\rangle$ と書かれる. いま, $n=m\ell+s$ $(0\leqq s<m)$ となる整数 ℓ と s を取れば, $a^s=a^na^{-m\ell}=(a^m)^{-\ell}\in H$ なので $s=0$ を得る. つまり m は n の約数である.
(3) 上の (1) の証明から, $\langle a\rangle$ の $\{1\}$ 以外の部分群 H は, $H=\langle a^m\rangle$ (m は $a^k\in H$ なる $k>0$ の最小値) と書けるから (3a) は正しい. (3b) $m_1<m_2$ であるとせよ. このとき, $0<k<m_2$ なる k について a^k は $\langle a^{m_2}\rangle$ には含まれないから, $\langle a^{m_1}\rangle\neq\langle a^{m_2}\rangle$ である. $m_1>m_2$ であつても同様である. (3c) は $\langle a^m\rangle$ の元 $\cdots, a^{-m}, 1, a^m, a^{2m}, \cdots$ が互ひに異なることからわかる.

問 4.7. (1) 成分がすべて整数である 5 次の正方行列を使つて, 行列の積を演算とする位数 5 の巡回群を構成せよ. また, その生成元も述べよ.
(2) 前問と同じく, 成分がすべて整数である 5 次の正方行列を使つて, 位数 6の巡回群を構成し, その生成元を述べよ.
(3) さらに, 成分がすべて整数である 2 次の正方行列で, 積に関して, 位数 6の巡回群を構成し, その生成元を述べよ.

問 4.8. 群 G の元 a について $a^n=1$ ならば $\mathrm{ord}\,a$ は n の約数であることを示せ.
(Hint : $m=\mathrm{ord}\,a$, $n=mq+r$ $(0\leqq r<m)$ とおくとき a^r を調べよ.)

演習問題

4.9. 3.2 で登場した群 $\mathbb{Q}^\times$ は巡回群でない. これを証明せよ.
また 正の有理数全体は乗法を演算として群をなすが, これも巡回群でないことを証明せよ.

4.10. 4 つの 2 次正方行列の集合 $\left\{\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&\\&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}&-1\\-1&\end{bmatrix}\right\}$ は行列の積に関して群になることを確かめよ. さらに, この群が巡回群でないことを説明せよ.

4.11. n を自然数とする. 成分が全て実数である 2 次の正方行列だけからなり, 演算を行列の積とする位数 n の巡回群を構成せよ. (Hint : 三角函数を使ふ.)

5. Euler の函数 $n \mapsto \varphi(n)$

定義 5.1. 自然数 m と n に対して, その正の最大公約数を $\gcd(m,n)$ と表す[4].

定義 5.2. 自然数 m と n に対して, $\gcd(m,n)=1$ であるとき, m と n は互ひに素, m は n と互ひに素, あるいは, m は n と素であるなどといふ.

まづ, 次の問題から始める.

問 5.3. 位数 30 の元 a を生成元とする巡回群 $\langle a\rangle$ の生成元を全て書き上げよ.

定義 5.4. 自然数 n に対して, 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ の中で n と素なものの個数を $\varphi(n)$ で表し, 函数

$$n \mapsto \varphi(n)$$

を Euler の $\overset{ファイ}{\varphi}$ 函数といふ. $\varphi(1)=1$ に注意せよ.

例へば, 素数[5] p に対しては $\varphi(p)=p-1$ であり, また, 素数 p の累乗について

$$\varphi(p^r)=p^r-p^{r-1} \tag{5.5}$$

であることは容易にわかる. さらに, 自然数 m と n に対して,

$$\gcd(m,n)=1 \implies \varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n) \tag{5.6}$$

が成り立つことをあとで (9.9) で証明する.

問 5.7. (1) 上記の (5.5) が成り立つ理由を述べよ.
(2) $\varphi(9)$, $\varphi(5)$, $\varphi(45)$ を別々に計算し, この場合に (5.6) が成立してゐることを確認せよ.

巡回群の生成元について

命題 5.8. G を巡回群とする.
(1) G の位数 n が有限のときは, 生成元の個数は $\varphi(n)$ 個であり, 1 つの生成元を a とすれば, 生成元の全体は $\{\,a^m \mid \gcd(m,n)=1\,\}$ である.
(2) G の位数が無限大のときは, 生成元は 2 つしかなく, その 1 方を a とすれば, 他方は a^{-1} である.

証明 (1) もし $\langle a\rangle=\langle a^m\rangle$ であれば, ある j について $a^{mj}=a$ だから $mj-1$ は n の倍数である (これを $mj\equiv 1 \bmod n$ と書く). ゆゑに $\gcd(m,n)=1$. 逆に, $\gcd(m,n)=1$ とすると, $cm+dn=1$ となる整数 c, d が存在する. このとき, $(a^m)^c=a^{cm}=a^{cm}(a^n)^d=a^{cm+dn}=a$ なので, $\langle a\rangle=\langle a^m\rangle$ を得る.
(2) については, すでに 4.6(3) で示されてゐる. □

[4] 最大公約数 (greatest common divisor)
[5] 1 とそれ自身しか約数に持たない様な 2 以上の自然数を素数と呼ぶ (後の 7.11 にも記してある).

注意 5.9. (**Euclid の互除法**) 2 つの整数 a, b に対し, $ax+by=\gcd(a,b)$ を満たす整数 x, y が存在することは Euclid の互除法を使つて証明できる. そのことを 5.8 (1) の証明で使つた. 例へば $a=893$, $b=237$ ならば

$$
\begin{aligned}
893 &= 237\times 3 + 182, \ (711)\\
237 &= 182\times 1 + 55, \ (182)\\
182 &= 55\times 3 + 17, \ (165)\\
55 &= 17\times 3 + 4, \ (51)\\
17 &= 4\times 4 + 1, \ (16)\\
4 &= 1\times 4 + 0, \ (4)
\end{aligned}
$$

3	893	237	1
	711	182	
3	182	55	3
	165	51	
4	17	4	4
	16	4	
	1	0	

この計算を下から順に使つて,

$$
\begin{aligned}
1 &= 17 - 4\times 4\\
&= 17 - 4\times(55 - 17\times 3)\\
&= 13\times 17 - 4\times 55\\
&= 13\times(182 - 55\times 3) - 4\times 55\\
&= 13\times 182 - 43\times 55\\
&= 13\times 182 - 43\times(237 - 182\times 1)\\
&= 56\times 182 - 43\times 237\\
&= 56\times(893 - 237\times 3) - 43\times 237\\
&= 56\times 893 - 211\times 237
\end{aligned}
$$

で $x=56$, $y=-211$ が見付かるといふ具合である.

問 5.10. $a=9841$, $b=1234$ とする. $\gcd(a,b)=1$ を確かめよ. $ax+by=1$ となる整数 x と y を 1 組求めよ.

問 5.11. 位数 9841 の元 a から生成される巡回群 G がある. このとき, a^{1234} は G の生成元であるか. もし, さうならば $(a^{1234})^m = a$ となる整数 m が存在する筈である. その様な m で $0 \leqq m < 9841$ なるものを求めよ.

演習問題

5.12. $13x+7y+11z=1$ を満たす整数の組 (x,y,z) のすべてを求めよ (つまり, 解のすべてを簡明な仕方で記述せよ).

6. 可換環と体

群はただ 1 つの演算を有するのであつたが, 加法, 減法, 乗法を備へた整数, 有理数, 実数などの様に複数の演算を有する集合を包摂する概念として, 環といふものがある.

定義 6.1. 集合 R が以下の **R0** から **R5** のすべてを満たすとき, R は<u>可換環</u>であるといはれる. 但し, a, b, c は R の任意の元を表す.

R0. 加法と呼ばれる演算 $(a,b)\mapsto a+b$ と, 乗法と呼ばれる演算 $(a,b)\mapsto ab$ が定義されてゐる. これらについて以下の全てが成立する.

R1. R は加法に関して可換群である (単位元は通常 0 で表す).

R2. 乗法の結合法則 : $(ab)c=a(bc)$.

R3. 左右の分配法則[6]: $a(b+c)=ab+ac,\ \ (b+c)a=ba+ca$.

R4. 乗法に関する単位元の存在 : 加法の単位元 $0\,(=0_R)$ とは異なるある元 $1\,(=1_R)\in R$ が存在して, R の任意の元 x に対して $1x=x1=x$ が満たされる.

R5. 乗法の交換法則 : $ab=ba$

例 6.2. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ はどれも可換環である.

定義 6.3. 可換環 R で, 0 以外のどの元も乗法に関する逆元を持つならば, R は<u>体</u>(たい)であるといはれる.

例 6.4. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, 後述する $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (但し p は素数)[7], $\mathbb{Q}[i]=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbb{Q}\}$ はすべて体である.

問 6.5. 上記の $\mathbb{Q}[i]$ と $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ が体であることを示せ.

注意 6.6. 上記の 6.1 において, 5 つの条件のうちの最後の条件 **R5** を課さない場合は R は単に<u>環</u>であるといわれる. さらに, 環 R の加法の単位元以外の元がどれも乗法に関して逆元を持つとき, R は<u>斜体</u>(しゃたい)であるといはれる.
例へば, $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})=$“成分が複素数の 2 次正方行列の全体” は環である. また,

$$\mathbb{H}=\left\{\left[\begin{array}{cc} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{array}\right]\Big|\,a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})\quad(\text{もちろん } i \text{ は虚数単位})$$

とおくとき, 行列の通常の加法と乗法に関して $\mathbb{H}$ は斜体になる (♠). $\mathbb{H}$ は <u>Hamilton の四元数体</u>と呼ばれる.

問 6.7. 上の ♠ を証明せよ.

[6] **R5** を使へば, 一方の分配法則から他方のそれがでる.
[7] これが体であることの証明は 9.6 でなされる.

7. 整数の性質

代数学で後に, 約数, 倍数の概念の一般化を学ぶ. そのために, ideal (イデアル) の概念に触れておく.

定義 7.1. 可換環 R の空でない部分集合 $M \subset R$ は
I1 $a \in M$, $b \in M$ ならば $a+b \in M$,
I2 $a \in M$, $x \in R$ ならば $xa \in M$
が成り立つとき, R の ideal と呼ばれる.

例 7.2. (1) $\{0\}$ は $\mathbb{Z}$ の ideal である. (2) $m\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の ideal である.
(3) $m, n \in \mathbb{Z}$ を固定する. $\{ms+nt \,|\, s, t \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の ideal である.
(4) $m_1, m_2, \cdots, m_r \in \mathbb{Z}$ を固定する. $\{m_1s_1 + m_2s_2 + \cdots + m_rs_r \,|\, s_1, s_2, \cdots, s_r \in \mathbb{Z}\}$ は $\mathbb{Z}$ の ideal である.
(5) $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Q}$ の ideal でない.
(6) 可換環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,] = \{s+\sqrt{-5}t \,|\, s, t \in \mathbb{Z}\}$ を考へる. このとき

$$M = \{2x + (1+\sqrt{-5})y \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}$$

は $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の ideal であり, M は $\{2\xi + (1+\sqrt{-5})\eta \;\big|\; \xi, \eta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\}$ と一致する. これは通常 $(2, 1+\sqrt{-5})$ と略記される[8].

問 7.3. 次の集合は $\mathbb{Z}[i]$ を加法に関する群とみたとき, 部分群であるか. また $\mathbb{Z}[i]$ を可換環とみたとき, この中で ideal であるか否か, 理由を付けて答へよ.
(1) $\mathbb{Z}$. (2) $\{a+bi \,|\, a$ と b はともに偶数かともに奇数$\}$. (3) $\{a+2bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

問 7.4. 7.2 (6) に関して, $M = \{2\xi + (1+\sqrt{-5})\eta \;\big|\; \xi, \eta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\}$ を証明せよ. これを利用して, M が $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ の ideal であることを示せ.

問 7.5. 可換環 $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において $1+\sqrt{-5}$ と 5 をともに含む ideal I は R と一致することを示せ.

定理 7.6. $M \subset \mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ の ideal であるとする. このときある $d \in \mathbb{Z}$ が存在して,

$$M = d\mathbb{Z}$$

となる. ここで, さらに $d \geqq 0$ といふ条件を付ければ, その様な d の存在は一意的である.

証明 $M = \{0\}$ であれば主張は明らかなので, 以下では $M \neq \{0\}$ とする. M の正の要素で最小なものを d とする. その様な d は **I2** より必ず存在する (読者は確認せよ). 以下に示す様に, これが求める d である. 実際, 任意の $k \in M$ に対して, それを d で割つた余りを r とし, $k = dq + r$, $0 \leqq r < d$, と書くと, ideal の定義から $r = k - dq \in M$ となるが, d の最小性から $r = 0$ でなくてはならない. つまり $k = dq \in d\mathbb{Z}$ がわかり, $M \subset d\mathbb{Z}$ である. 逆の包含関係は明らかである. □

[8] 一般に可換環 R といくつかの元 $a_1, \cdots, a_n$ について $\{x_1a_1 + \cdots + x_na_n \,|\, x_1, \cdots, x_n \in R\}$ は R の ideal になる. これは $Ra_1 + \cdots + Ra_n$ と表示すべきものであるが, $(a_1, \cdots, a_n)$ と略記されることが多い.

注意 7.7. 7.6 の $\mathbb{Z}$ を 6.2 にある $\mathbb{Z}[i]$ や $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ で置き換へても, 同様なことが成り立つ (あとで, 16.13 として述べる). しかし $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ などにおいては, さうでない場合が生じる. 例へば, 7.2 (6) の $M=(2,1+\sqrt{-5}\,)$ は $d\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$ (但し $d\in\mathbb{Z}[\sqrt{-5}\,]$) の形には書けない. (複素数平面上での M の配置を考へればわかる).

以下では, 整数 a と b について, a が b の約数であることを

$$a|b$$

で表す[9].

問 7.8. 7.2 (4) の $M=\{\,a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{Z}\}$ について $M=d\mathbb{Z}$ となる $d\in\mathbb{Z}$ $(d\geqq 0)$ は a_1, a_2, $\cdots$, a_n のすべてを割り切る非負整数の中で最大のものであることを示せ. (最大公約数の存在性の証明) (Hint : d' が a_1, $\cdots$, a_n の任意の公約数であるとき $d'|d$ となることと, d 自身は a_1, $\cdots$, a_n の公約数であることを示せばよい.)

定義 7.9. (最大公約数) 7.8 の d を

$$\gcd(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

と書く. この記法は 5.1 の記法と矛盾しない.

命題 7.10. (1) $\gcd(a,b)=1$ かつ $a|bc$ ならば $a|c$.
(2) $\gcd(a,x)=\gcd(a,y)=1$ のとき, $\gcd(a,xy)=1$.
(3) $\gcd(a,x_1)=\gcd(a,x_2)=\cdots=\gcd(a,x_n)=1$ のとき, $\gcd(a,x_1x_2\cdots x_n)=1$.

証明 (1) $\gcd(a,b)=1$ ならば $ax+by=1$ となる整数 x, y が存在する. これを c 倍すると $c=acx+bcy$ なので, 仮定 $a|bc$ より, $a|c$ がわかる.
(2) 仮定から $ap+xq=1$, $ar+ys=1$ となる整数 p, q, r, s が存在する. この 2 式の辺々を掛けて $a(apr+pys+rxq)+xy(qs)=1$ を得るから, $\gcd(a,xy)=1$ である.
(3) これは (2) を繰り返し使へば示される. □

ここで, 素数の定義を思ひ出さう.

定義 7.11. 1 でない $p\in\mathbb{N}$ が 1 と p 以外に約数を持たないとき, 即ち, $n\in\mathbb{N}$ について,

$$n\,|\,p \implies n=1 \text{ または } n=p \text{ である}$$

が成り立つとき, p を素数と呼ぶ[10].

命題 7.12. p を素数とし, a, $b\in\mathbb{Z}$ とする. このとき, $p\,|\,ab$ ならば $p\,|\,a$ または $p\,|\,b$ である[11].

証明 一般に $n\in\mathbb{Z}$ について $\gcd(p,n)\,|\,p$ より $\gcd(p,n)=1$ または $\gcd(p,n)=p$ である. 後者は $p|n$ と同値である. 従つて, 主張の対偶

$$\gcd(p,a)=\gcd(p,b)=1 \text{ ならば } \gcd(p,ab)=1$$

を示せばよいが, これは 7.10(2) からわかる. □

[9] この note では, 任意の整数 a について, $a|0$ 等も正しい用法であるとする.
[10] 次節の 8.4 によれば, 素数とは $\mathbb{Z}$ の正の既約元のことに他ならない.
[11] 次節の 8.4 の意味で素数が $\mathbb{Z}$ の素元であることを意味する.

8. 素因数分解の一意性

ここで, すでにお馴染みの素因数分解の一意性について述べる.

定理 8.1. (素因数分解とその一意性) 任意に整数 $n \neq 0$ が与へられたとせよ. このとき n は, 相異なる有限個の (正の) 素数 $p_1, p_2, \cdots, p_g$ により,

$$n = \pm \prod_{j=1}^{g} {p_j}^{e_j} \quad (e_j \text{ は自然数})$$

の形に素因数分解される[12]. またその様な分解は一意的である. 先頭の符号は n の正負による.

注意 8.2. 読者は, 上記の定理をよくご存知だと思ふ. それをわざわざ定理として述べるのは, これが成り立たない可換環の例が身近にあつて (下の 8.7), そのことが近代の整数論の研究の動機の一部になつたからである.

証明 $n > 0$ のときに示せば十分であらう. n に関する帰納法で示す. $n = 1$ に対して定理の主張は明らかに正しい. いま p を n の 1 つの素因数とせよ. このとき, $n = p$ であれば証明は済んでゐる. でなければ, $\frac{n}{p} > 1$ は整数であるが, n より小さいので, 帰納法の仮定により $\frac{n}{p}$ は素因数分解される. よつて n 自身も素因数分解される. 次に一意性を示す. いま $p_1, p_2, \cdots, p_r$ および $q_1, q_2, \cdots, q_s$ を素数 (同じものをいくつも含んでゐるかも知れない) として, n が

$$(n =)\ p_1 p_2 \cdots p_r = q_1 q_2 \cdots q_s$$

と 2 通りに素因数分解されてゐたとする. ここで $r \leqq s$ としてよい. 左辺は p_1 で割れるから 7.12 を繰り返して使ふことにより, 右辺の素因数のどれかが p_1 でなくてはならない (7.11 も必要). そこで, 両辺から p_1 を落す. 同じ議論を $p_2, \cdots$ に対して行つていく. もし $r < s$ ならば $1 = q_{r+1} q_{r+2} \cdots q_s$ となつてしまふ. よつて $r = s$ であり, 最後は $1 = 1$ なる等式に至る. 以上により, 両辺に現れる素因数 $p_1, p_2, \cdots$ と $q_1, q_2, \cdots$ は順序を無視すれば同一である. □

定義 8.3. 一般に, 零因子[13]を含まない可換環 R の 2 つの元 a, b について, ある $c \in R$ により, $b = ac$ と書けるとき, a は b の約元であるといひ, b は a の倍元であるといふ. また a は b を割り切る, b は a で割り切れる, などどいふ. これも記号で $a|b$ と表す. これの否定を $a \nmid b$ と書く. $a|1$ なる $a \in R$ を単元[14]といふ.

定義 8.4. 零因子を含まない可換環 R と $q \nmid 1$ なる 0 でない元 $q \in R$ について, 「任意の $a \in R$, $b \in R$ に対し, $q|ab$ ならば $q|a$ または $q|b$ である」が成り立つとき, q は R の素元であるといふ. また, $q = ab$ $(a, b \in R$ で $a \nmid 1, b \nmid 1)$ と書けないとき, q を R の既約元と呼ぶ.

注意 8.5. $\mathbb{Z}$ においては素元と既約元の概念は一致する. 零因子を持たない可換環 R において, 素元は既約元である. 実際, q が R の素元で, $q = ab$ $(a \nmid 1, b \nmid 1)$ と書けたなら, $q \,|\, a$ または $q \,|\, b$ となるが, もし $q|a$ ならば, $q = a'bq$ 即ち $q(1 - a'b) = 0$ と書けるので $1 = a'b$, 即ち $b|1$ となつて矛盾である. $q|b$ の場合も同様. しかし, 既約元は素元とは限らない (次の 8.6).

---

[12] $n = \pm 1$ の場合は $g = 0$ と考へる.

[13] $ab = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき, a, b は零因子と呼ばれる. $\{\begin{bmatrix} x & y \\ x & \end{bmatrix} \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ は零因子を含む可換環の例である. 実際 $\begin{bmatrix} & y \\ & \end{bmatrix}$ $(y \neq 0)$ は零因子である.

[14] 単元と単位元を混同しない事. 単位元 1 は単元であるが, 例へば $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ の単元の全体は $\pm\left(1 + \sqrt{2}\right)^{\mathbb{Z}}$ であり, 無限に存在する.

例 8.6. $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において, $3\,|\,(2+\sqrt{-5})(2-\sqrt{-5})=9$ であるが, $3\nmid(2+\sqrt{-5})$ かつ $3\nmid(2-\sqrt{-5})$ なので (絶対値を考察すればわかる), 3 は素元ではない. ちなみに 3 はこの R の既約元である.

注意 8.7. $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において, 21 は

$$21=3\cdot7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5})$$

と 3 通りに既約元の積に分解される.

問 8.8. 8.6 と 8.7 に関して, 3, 7, $4+\sqrt{-5}$, $4-\sqrt{-5}$ のいづれも $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約元であることを示せ.

演習問題

8.9. n を自然数, p を素数とせよ. このとき, p^N が $n!$ を割り切るやうな最大の整数 N は

$$N=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+\cdots$$

で与へられることを示せ. (この和は実質的には有限の和である.)

8.10. a, m, n はすべて自然数で, $m\neq n$ とする. このとき $a^{2^m}+1$ と $a^{2^n}+1$ の最大公約数は a の偶奇に応じて, 1 または 2 であることを示せ. (Hint : $n>m$ のとき $(a^{2^m}+1)\,|\,(a^{2^n}-1)$ であることを示して利用する.) このことから, 無限に多く素数が存在することを証明せよ.

8.11. $\gcd(a,b)=1$ で a^2-b^2 が 0 でない平方数[15]であるとき $\gcd(a-b,a+b)$ は 1 か 2 であることを示せ. さらにこのとき $a+b$, $a-b$ はともに平方数であるかどちらも平方数の 2 倍であることを示せ.

8.12. 自然数 $n\geqq2$ について, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ は整数ではないことを証明せよ.

8.13. p を素数とする. 自然数 n を p 進法で表示したときに, すべての桁の数の和を $S_p(n)$ とする[16]. このとき, 8.9 の N について,

$$N=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$$

であることを証明せよ.

[15] 平方数 とは整数の平方である整数のこと. 完全平方数 とも称される. 0, 1, 4, 9, 16, $\cdots$ など.
[16] 例へば 516 を 5 進法表示すると $4031_{(5)}$ なので $S_5(516)=4+0+3+1=8$.

9. 剰余類の演算

整数 x, y と自然数 n について, $n|(x-y)$ となることを

$$x \equiv y \mod n$$

とも表し, x と y は法 n に関して合同であるといふ. この式は, x と y を n で割つたときの余りが相等しいといふ意味でもある. これは $\mathbb{Z}$ における同値関係になつてゐる (確認せよ).

命題 9.1. 整数 x_1, x_2, y_1, y_2 と自然数 n について, $x_1 \equiv y_1 \mod n$, $x_2 \equiv y_2 \mod n$ ならば

$$x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2 \mod n, \quad x_1 x_2 \equiv y_1 y_2 \mod n.$$

問 9.2. 9.1 を証明せよ.

そこで, 整数 j について, $\mathbb{Z}$ の部分集合

$$\begin{aligned} j + n\mathbb{Z} &= \{\cdots, -n+j,\ j,\ j+n,\ j+2n, \cdots\} \\ &= \text{“}n \text{ で割つたときに余りが } j \text{ のそれと同じになる整数の全体”} \end{aligned} \tag{9.3}$$

をそれぞれ $(j \bmod n)$ または簡単に $\overline{j}$ などと記し, これらを法 n に関する剰余類と呼ぶ:

$$\overline{j} = (j \bmod n) = j + n\mathbb{Z} = \{\cdots, -n+j,\ j,\ j+n,\ j+2n, \cdots\}.$$

この記法では, 例へば $(2 \bmod 7) = (9 \bmod 7) = (-5 \bmod 7)$ 等が成り立つことに注意せよ. このとき,

$$(x \bmod n) + (y \bmod n) := (x + y \bmod n),$$
$$(x \bmod n)(y \bmod n) := (xy \bmod n)$$

と定義すれば, 上の (9.1) より, (9.3) の形の集合を元とする集合, つまり

$$\{(0 \bmod n), (1 \bmod n), (2 \bmod n), \cdots, (n-1 \bmod n)\} \tag{9.4}$$

が自然に環の構造を持つことがわかる.

定義 9.5. 上の (9.4) の集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と記し, n を法とする剰余類環と呼ぶ.

問 9.6. 次が成り立つことを示せ:
(1) $\gcd(a,n) = 1$ ならば, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ において, $\overline{a}\,\overline{x} = \overline{1}$ となる元 $\overline{x}$ が唯 1 つ存在する.
(Hint: $\gcd(a,n) = 1$ ならば, 7.6 より, $ax + ny = 1$ となる整数 x, y が存在する.)
(2) p を素数とするとき, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は体である.
(3) n が合成数[17]ならば $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は体ではない.
(Hint: $\ell | n$ $(1<\ell<n)$ のとき, $(\ell \bmod n)(x \bmod n) = (1 \bmod n)$ となる x は存在しない.)

以上をまとめておく:

定理 9.7. n を自然数とする. 法 n に関する剰余類の全体 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は (単位元を持つ) 可換環をなす. また, n と素な剰余類の全体 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ は積に関して群 (既約剰余類群) をなす. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体になるのは n が素数のときであり, そのときに限る.

問 9.8. x, y, z は整数とする. $x^2 + y^2 = z^2$ ならば, $xyz \equiv 0 \bmod 60$ であることを示せ.

[17] ± 1 でも 0 でも素数の ± 1 倍でもない数のこと.

次に, 留保してきた (5.6) を証明する :

定理 9.9. 自然数 m と n について, $\gcd(m,n)=1$ ならば $\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$ である.

証明 $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ から $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ への写像 f を,

$$f:(x \bmod mn)\longmapsto((x \bmod m),\ (x \bmod n))$$

で定める. 各 $(x \bmod mn)$ の f による像は集合 $(x \bmod mn)$ のみによつて決まり, x の選び方には依らない. また $\gcd(x,mn)=1$ だから $\gcd(x,m)=\gcd(x,n)=1$ であることにも注意せよ. つまり, f は矛盾なく定義される (well-defined). また, この写像には逆写像が存在する. それは $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の任意の元 $\big((a \bmod m),(b \bmod n)\big)$ に対して $x\equiv a \bmod m,\ x\equiv b \bmod n$ を満たす $x\in(\mathbb{Z}/mn\,\mathbb{Z})^\times$ を対応させるものであるが, まづ, この様な x は存在する. なぜなら $tm+sn=1$ なる t, s に対して $x=asn+btm$ とすれば

$$x\equiv asn\equiv a(1-tm)\equiv a \bmod m,\quad x\equiv btm\equiv b(1-sn)\equiv b \bmod n$$

となるから. さらに $\gcd(x,m)=\gcd(a,m)=1$ かつ $\gcd(x,n)=\gcd(b,n)=1$ ゆゑ 7.10 (2) より $\gcd(x,mn)=1$. よつて $x\in(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ である. しかも, この様な x は法 mn で一意的である. 実際, もし 2 つの解 x と x' があると, $m|(x-a)$, $m|(x'-a)$, $n|(x-b)$, $n|(x'-b)$ であるが, これらから $m|(x-x')$, $n|(x-x')$ ゆゑ, $mn|(x-x')$ となるから. つまり, この逆写像は問題なく定義される. しかるに, $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times$ と $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の元の個数はそれぞれ $\varphi(mn)$ と $\varphi(m)\varphi(n)$ であるから, 所望の等式が成り立つ. □

問 9.10. 上の写像 f により $(x \bmod mn)\mapsto((a \bmod m),(b \bmod n))$, $(x' \bmod mn)\mapsto((a' \bmod m),(b' \bmod n))$ であるとき, $(xx' \bmod mn)\mapsto((aa' \bmod m),(bb' \bmod n))$ であることを示せ.

問 9.11. m, $n\in\mathbb{Z}$ とし, $d=\gcd(m,n)$ とせよ. x の連立合同式

$$\begin{cases} x\equiv a \bmod m \\ x\equiv b \bmod n \end{cases}$$

が解を持つためには, $a\equiv b \bmod d$ であることが必要十分であることを示せ. また, m と n の最小公倍数を ℓ とすれば, 解を持つ場合, 解は $\bmod\ell$ でみれば唯 1 つである事を示せ.

問 9.12. 整数 $n>0$ の素因数分解を $n=\prod_{j=1}^{g}{p_j}^{e_j}$ とする. 但し, p_1, $\cdots$, p_g は相異なる素数で, e_1, $\cdots$, e_g は自然数である. このとき, 次の式が成り立つことを示せ.

$$\varphi(n)=\prod_{j=1}^{g}({p_j}^{e_j}-{p_j}^{e_j-1})=n\prod_{j=1}^{g}\Big(1-\frac{1}{p_j}\Big).$$

問 9.13. p を素数とする. 2 次正方行列の成分に $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の元を並べて

$$G=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\middle|\ a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\ ad-bc\neq\overline{0}\right\}\quad(\text{これは, 通常 } \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \text{ と書かれる.})$$

なる集合を考へる. このとき, G に属する任意の 2 元について通常の行列の積の仕方で演算が定義できることを示し, さらに, その演算で G が群になることを証明せよ.

10. Fermat の小定理, Euler の定理

次の定理は 13.2 の証明で使用される.

定理 10.1. n を正の整数とする. このとき

$$\sum_{\substack{k|n\\ k>0}} \varphi(k) = n.$$

証明 いま整数 $d>0$ を 1 つ決めて,

$$1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

の中に $\gcd(x,n)=d$ である x がいくつあるか数へる. もちろん, d が n の約数でなければ, 答は 0 個である. そこで $d|n$ として, $x=dx'$, $n=dn'$ とおけば, $\gcd(x,n)=d$ は $\gcd(x',n')=1$ と同じことである. その様な x' の個数は $\varphi(n')=\varphi(n/d)$ である. ここで $x=1,2,\cdots,n$ を $\gcd(x,n)$ の値 d で分類すれば, $d=1$ に対応するものが $\varphi(n)$ 個, $d=d_1$ に対応するものが $\varphi(n/d_1)$ 個, $d=d_2$ に対応するものが $\varphi(n/d_2)$ 個, 等であり, 最後に $d=n$ に対応するものが $\varphi(1)=1$ 個ある. これらは重複がなく上のすべての数を尽くすから

$$\varphi(n)+\varphi\Big(\frac{n}{d_1}\Big)+\varphi\Big(\frac{n}{d_2}\Big)+\cdots+\varphi(1)=n.$$

ここで $\dfrac{n}{d_j}$ は n のすべての正の約数 k を走るから, これが与式に他ならない. □

注意 10.2. 上の 10.1 の証明の内容を $n=42=2\cdot3\cdot7$ の場合に表にしておく.

d	$\gcd(x,42)=d$ となる $1\leqq x\leqq 42$	$\varphi(\frac{42}{d})$
1	1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41	12
2	2, 4, 8, 10, 16, 20, 22, 26, 32, 34, 38, 40	12
3	3, 9, 15, 27, 33, 39	6
6	6, 12, 18, 24, 30, 36	6
7	7, 35	2
14	14, 28	2
21	21	1
42	42	1
計	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42	42

ここで有名な定理を 1 つ証明しておく：

定理 10.3. (Fermat の小定理) p を素数とせよ. $\gcd(a,p)=1$ のとき

$$a^{p-1}\equiv 1 \bmod p.$$

証明 まづ,

$$1,\ 2,\ \cdots,\ p-1 \tag{10.4}$$

が 0 を除く $\bmod p$ の剰余の全体である. このとき

$$1a,\ 2a,\ \cdots,\ (p-1)a \tag{10.5}$$

も 0 を除く $\bmod p$ の剰余の全体である. 実際, もし $ka\equiv \ell a \bmod p$ ならば $(k-\ell)a\equiv 0 \bmod p$ なので $k-\ell\equiv 0 \bmod p$ でなければならず, それゆゑ $k\equiv \ell \bmod p$ となるが, 並べた元の個数が $p-1$ 個であるから, (10.5) は (10.4) の全体に一致せざるを得ない. このことより

$$1\cdot 2\cdots(p-1)\equiv 1a\cdot 2a\cdots(p-1)a\equiv a^{p-1}\cdot 1\cdot 2\cdots(p-1) \bmod p.$$

よつて

$$(a^{p-1}-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(p-1)\equiv 0 \bmod p$$

となり

$$a^{p-1}-1\equiv 0 \bmod p$$

を得る. □

10.3 を自然に一般化したものが次の Euler の定理である：

定理 10.6. (Euler の定理) n を正の整数とせよ. $\gcd(a,n)=1$ のとき

$$a^{\varphi(n)}\equiv 1 \bmod n$$

が成り立つ.

証明 まづ $\bmod n$ の既約剰余類を並べて, 10.3 の証明と同様にそれら全体の a 倍 (の剰余類) を並べれば, それらは再び既約剰余類となり, 順序を無視すればすべての既約剰余類を並べたものに一致する. よつてそれらの積は一致する. この 2 つの積の違ひは $a^{\varphi(n)}$ 倍なので

$$a^{\varphi(n)}-1\equiv 0 \mod n$$

を得る. □

問 10.7. 10.6 の証明を $n=15$, $a=2$ について辿(たど)れ.

11. 多項式の基本的性質

ここでは後に述べる 13.5 の証明のための準備をする.
x を文字 (不定元と呼ばれる) とする. x の多項式で係数がすべて体 K に属するもの全体を

$$K[x]$$

と表す. これは自然な加法と乗法について可換環になることが容易に確かめられる.

命題 11.1. x を文字とする. $f(x), g(x) \in K[x]$ のとき, 多項式 $q(x), r(x) \in K[x]$ で, $\deg r(x) < \deg g(x)$ または $r(x) = 0$, かつ $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ となるものが一意的に存在する. 但し, $\deg h(x)$ は $h(x)$ の次数である.

証明 これは $K = \mathbb{Q}$ や $K = \mathbb{R}$ のときに, 高校で学んだものと全く同様である. 即ち, $f(x)$ を $g(x)$ で除したとき (筆算などで求められる) の商が $q(x)$ で余りが $r(x)$ である. □

系 11.2. $c \in K$ のとき, $q(x) \in K[x]$ が存在して, $f(x) = (x-c)q(x) + f(c)$ となる.

系 11.3. 体 K 上の多項式 $f(x) \in K[x]$ について, $\deg f(x) = n$ ならば $f(x) = 0$ は K の中に高々 n 個の相異なる根を持つ.

証明 $\alpha_1 \in K$ が根であれば, 11.2 より $f(x) = (x-\alpha_1)f_1(x)$, $\deg f_1(x) = n-1$ となる. α_2 が根であれば, それは $f_1(x)$ の根であるから, 再び, 11.2 より, $f_1(x) = (x-\alpha_2)f_2(x)$ となる. これを繰り返すとき, 根の個数が $n+1$ 個以上であつたならば, 0 次式が根を持つことになるので, 矛盾である. □

問 11.4. $K[x] = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$ において, $f(x) = x^3 + \overline{2}x^2 + \overline{3}x + \overline{1}$, $g(x) = \overline{2}x^2 + \overline{2}x + \overline{3}$ のときに, 11.1 に述べられてゐる $q(x)$ と $r(x)$ を求めよ.

問 11.5. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$ において, $f(x) = \overline{2}x^3 + \overline{4}x^2 + \overline{3}x + \overline{1}$ のとき, $f(x) = 0$ の根をすべて見つけ, $f(x)$ を因数分解せよ.

問 11.6. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$ において, $x^4 + \overline{1}$ を可能な限り因数分解せよ.
(Hint : 1 次式を約元に持つとは限らない.)

演習問題

11.7. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$ における等式

$$(\overline{3}x^2 + \overline{2}x + \overline{1})\, f(x) + (\overline{2}x^3 + x + \overline{4})\, g(x) = \overline{1}$$

を満たす多項式 $f(x)$, $g(x)$ ($\in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[x]$) を一組求めよ.
(Hint : 11.1 を使つて多項式で “互除法” を行ふ.)

12. Lagrange の定理

目標の 13.2 を証明するために, Lagrange の定理と呼ばれる有名な定理を証明したい.
群 G の元 x と部分集合 $A \subset G$ について $xA = \{xa \,|\, a \in A\}$ と記す. 勿論 $1A = A$ である.

問 12.1. 群 G, 部分集合 $A \subset G$ 及び $x, y \in G$ について, $xG = G$, $x(yA) = (xy)A$ を示せ.

問 12.2. 群 G, 部分集合 $A \subset G$ 及び $x, y \in G$ について, $y \in xA \iff x^{-1}y \in A$ であることを示せ.

補題 12.3. 群 G, $H < G$ 及び $x, y \in G$ について, $xH \cap yH = \varnothing$, さもなくば $xH = yH$ である.

証明 もし $xH \cap yH \neq \varnothing$ ならば, 左辺に元 $xh = yh'$ $(h, h' \in H)$ があるが, これより $x = yh'h^{-1}$ で $h'h^{-1} \in H$ なので, 12.1 により, $xH = y(h'h^{-1})H = yH$ である. □

この 12.3 により, G は xH の形の部分集合 (G の H による左剰余類[18] と呼ばれる) の和に分割できる. いま, その個数が有限だとして[19], g 個とし, それらの部分集合のすべてを

$$\{x_1H, x_2H, \cdots, x_gH\} \qquad (\text{これを } G/H \text{ と略記する}) \tag{12.4}$$

と書くことにすれば

$$G = \bigcup_{j=1}^{g} x_jH, \quad (\text{但し } i \neq j \text{ ならば } x_iH \neq x_jH)$$

となる. この様に互ひに共通部分がない部分集合の和集合であることを, 手短かに

$$G = \bigsqcup_{j=1}^{g} x_jH \quad \text{または} \quad G = x_1H \sqcup x_2H \sqcup \cdots \sqcup x_gH$$

と記す. この様な分解を左剰余類分解または単に左分解と呼ぶ. ここで (12.4) は一意的に定まるけれども, $\{x_1, x_2, \cdots, x_g\}$ は一意的には定まらないことに注意されたい. この状況で $\{x_1, x_2, \cdots, x_g\}$ をこの左剰余類分解の完全代表系と呼ぶ.

例 12.5. 上の G として, 加法を演算とした $\mathbb{Z}$ を考へると, 9.5 の $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は, 部分群 $H = m\mathbb{Z}$ による左剰余類の全体に他ならない :

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \cdots, (m-1) + m\mathbb{Z}\},$$
$$\mathbb{Z} = \bigsqcup_{j=0}^{m-1} (j + m\mathbb{Z}).$$

記号. 一般に, 集合 A の要素の個数 (濃度) も記号 $|A|$ または $\#A$ で表す[20].

問 12.6. 有限群 G とその部分群 H を考へる. 任意の $x, y \in G$ について $|xH| = |yH|$ であることを証明せよ. (Hint: 各 $z \in G$ に対して, 写像 $H \to zH$, $h \mapsto zh$ が全単射であることを示せ. これより $|H| = |xH|$, $|H| = |yH|$ がわかり $|xH| = |yH|$ を得る.)

[18] 文献によつては右剰余類と定義されてゐる場合がある.
[19] 例へば G が有限群ならさうなる.
[20] この記号は §2 で群の位数を表すのに導入したもの.

以上のことから G が同じ個数の要素を持ち, 互ひに共通部分を持たない部分集合 (12.4) の和集合で表されることがわかつた. これは顕著なことである. このことから次のことがわかる.

定理 12.7. (Lagrange の定理) 有限群 G の部分群 H の位数 $|H|$ は $|G|$ の約数である.

系 12.8. G を有限群とする. G のどの元の位数も $|G|$ の約数である.

証明 $x \in G$ の位数は部分群 $\langle x \rangle < G$ の位数に他ならないが, それは Lagrange の定理より $|G|$ の約数である. □

系 12.9. G を位数 n の有限群とし, $x \in G$ とする. このとき $x^n = 1$.

証明 12.8 より, x の位数 (ℓ とする) は n の約数である. ゆゑに $x^n = (x^\ell)^{n/\ell} = 1^{n/\ell} = 1$ である. □

問 12.10. 3.3 について, 次の問に答へよ.
(1) S_4 とその部分群 S_3, V について, Lagrange の定理が成立してゐることを確認せよ.
(2) S_4 を S_3 に関して左剰余類に分解し, 各左剰余類を要素を列記して記述せよ.
(3) S_4 を V に関して左剰余類に分解し, 各左剰余類を要素を列記して記述せよ.

問 12.11. 位数 15 の元 a で生成された巡回群 $G = \langle a \rangle$ と, その部分群 $H = \langle a^3 \rangle$ について, 左剰余類分解を記述せよ. また完全代表系を 1 つ挙げよ.

演習問題

12.12. 位数が素数の群は巡回群に限ることを示せ.

12.13. Lagrange の定理を前提にして, S_4 の部分群を全て求めよ.

12.14. G を群とし, $H < G$ とする. $x, y \in G$ に対して $x^{-1}y \in H$ で関係 $x \sim y$ を定めるとき, この関係は同値関係であることを確かめよ. 即ち, 次を示せ.
任意の $x, y, z \in G$ に対して, 次の 3 つが成り立つ :
(i) $x \sim x$,
(ii) $x \sim y \implies y \sim x$,
(iii) $x \sim y$ かつ $y \sim z \implies x \sim z$.

13. 原始根

問 13.1. 位数 n の有限巡回群 $G=\langle a\rangle$ において, $n=d\ell$ とするとき, $\{x\in G\,|\,x^d=1\}=\langle a^\ell\rangle$ で, その元の個数は d に等しいことを示せ.

次の定理は有用である.

定理 13.2. G を有限群とする. G が巡回群であるためには, 任意の自然数 m について

$$\#\{x\in G\,|\,x^m=1\}\leqq m$$

であることが必要十分である.

証明 G の位数を n とする.
(必要性) $G=\langle a\rangle$ と書ける. $\gcd(n,m)=d$ と書くと, $x^m=1\Longleftrightarrow x^d=1$ であるから[21] 13.1 より, $\#\{x\in G\,|\,x^m=1\}=\#\{x\in G\,|\,x^d=1\}=d\leqq m$ である.
(十分性) G の位数 m の元の集合を G_m と書くことにする. まづ $|G_m|\neq 0$, 即ち $G_m\neq\varnothing$ とする. このとき G_m の元から位数 m の部分群が生成されるのだから, Lagrange の定理により, $m|n$ である. ゆゑに,

$$n=|G|=\sum_{m|n}|G_m|. \tag{13.3}$$

いま $m|n$ なる m をとり, $|G_m|>0$ とする. このとき $b\in G_m$ について

$$\langle b\rangle=\{1,b,b^2,\cdots,b^{m-1}\}$$

の元はどれも $x^m=1$ の解であるから, 仮定により $\langle b\rangle=\{x\in G\,|\,x^m=1\}$ でなければならない. 特に $G_m\subset\langle b\rangle$. つまり G_m は $\langle b\rangle$ 内の位数 m の元の全体になつてゐる. よつて $|G_m|=\varphi(m)$. 以上から $|G_m|=0$ または $|G_m|=\varphi(m)$ である. このことを念頭において, (13.3) と 10.1 とを比較すれば, すべての $m|n$ について $|G_m|=\varphi(m)$ でなければならない. 特に $|G_n|=\varphi(n)\neq 0$ であるから, G は位数 n の元を持つ. その 1 つを a とすれば, $G=\langle a\rangle$ となる. □

問 13.4. 巡回群ではない有限Abel 群の例を 1 つ挙げ, それが 13.2 の条件を満たさないことを具体的に示せ. (Hint : 3.3 の中からその様な例を見出せ.)

定理 13.5. K を体とする.
(1) $n\in\mathbb{N}$ について $\{x\in K\,|\,x^n=1\}$ は n の約数を位数とする巡回群をなす.
(2) 体 K の乗法群 $K^\times$ のどんな有限部分群も巡回群である.
従つて, 有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) の乗法群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は巡回群である.

証明 (1) 集合 $G=\{x\in K\,|\,x^n=1\}$ が群であることは容易に確認できる. 任意の $m\in\mathbb{N}$ について, x の m 次方程式 $x^m=1$ は K の中で高々 m 個しか相異なる根を持たない (11.3). ゆゑに, $\#\{x\in G\,|\,x^m=1\}\leqq\#\{x\in K\,|\,x^m=1\}\leqq m$. このことと 13.2 より, 群 $\{x\in K\,|\,x^n=1\}$ は巡回群である. いま, $a\in G$ を 1 つの生成元とする. $a^n=1$ であるから 12.8 により a の位数は n の約数でなければならない.
(2) 有限部分群 $G(<K^\times)$ の位数を n とすれば, 12.9 より $G\subset\{x\in G\,|\,x^n=1\}$ でなければならないが, 右側は n 個以下の元から成るので, この 2 つは一致せねばならない. □

[21] ($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) $d=sn+tm$ と書くと 12.9 と仮定から $x^d=(x^n)^s(x^m)^t=1$.

定理 13.6. p を素数とする. このとき, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ は巡回群である. その生成元 (の代表元) を法 p の 原始根と呼ぶ. 即ち, 次の様な整数 g が存在する : $1, g, g^2, \cdots, g^{p-2}$ を並び替へれば, 法 p に関して, $1, 2, \cdots, p-1$ に合同である.

証明 これは 13.5 の後半の言ひ替へに過ぎないが, 別の証明を記しておく. Fermat の小定理 10.3 と 11.3 より $\{\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{p-1}\}$ が丁度 $x^{p-1}=1$ の根である. 13.5(1) により, これらは巡回群をなす. □

例 13.7. 3 は法 7 の原始根である. つまり,

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times = \langle\overline{3}\rangle = \{(3 \bmod 7), (3^2 \bmod 7), \cdots, (3^6 \bmod 7)\}.$$

例 13.8. $p=17$ のとき, 原始根は $g=3$ と採れて下記の表の様になる :

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$(3^j \bmod 17)$	$\overline{3}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$

ちなみに 2 は法 17 の原始根ではない.

問 13.9. 2 は法 11 の原始根であるか. また 2 は法 7 の原始根か.

問 13.10. 有限体 $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ の原始根をすべて求めよ. その 1 つを用ゐて合同式

$$x^4 \equiv 1 \bmod 17$$

を満たす x を $\bmod 17$ ですべて求めよ.

問 13.11. (Wilson の定理) p が素数のとき

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod p$$

であることを証明せよ.

問 13.12. p は奇素数であつて, $a^{2^n}+1$ の約数であるとせよ. このとき

$$p \equiv 1 \bmod 2^{n+1}$$

であることを示せ. (Hint : $(a \bmod p)$ の $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ における位数を求めよ. 4.8 も使ふ.)

問 13.13. n は自然数で, $p=2^n+1$ は素数であるとせよ[22].

(1) $p>5$ ならば 2 は法 p の原始根ではないことを示せ.

(2) (難) $p>3$ ならば 3 は法 p の原始根であることを証明せよ.

(Hint : 法 p で -1 が平方元であることを示せ. もし, 3 が原始根でないのなら平方元であることを示せ. それにより, $-3 \equiv a^2 \bmod p$ なる a が存在する. このとき $2u \equiv -1+a \bmod p$ で定まる u は位数が 3 であることを示せ. これと Fermat の小定理から $3|p-1$ を示し, 矛盾を導け.)

[22] その様な p は Fermat 素数と呼ばれる.

14. 平方剰余

定義 14.1. p を奇素数とする. p と素な整数 a は, 合同式 $x^2 \equiv a \bmod p$ が解を持つか否かによつて, p を法として平方剰余あるいは平方非剰余であるといはれ,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方剰余のとき}), \\ -1 & (a \text{ が } p \text{ を法として平方非剰余のとき}) \end{cases}$$

と定める. さらに $p|a$ の場合は $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ と定める. この記号

$$\left(\frac{a}{p}\right)$$

を平方剰余記号と呼ぶ. もちろん $a \equiv b \bmod p$ ならば $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ である.

定理 14.2. p を奇素数, a を p と素な整数とする. このとき $a^{\frac{p-1}{2}}$ は法 p で 1 または -1 と合同であり, それぞれの場合に応じて a は法 p の平方剰余あるいは平方非剰余である. 即ち,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \bmod p.$$

証明 $b = a^{\frac{p-1}{2}}$ とおくと, Fermat の小定理より $b^2 = a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ なので,

$$(b-1)(b+1) \equiv 0 \bmod p$$

となり, 前半が示される. 法 p の原始根を g として, $a \equiv g^t \bmod p$ $(0 \leqq t \leqq p-2)$ とせよ. $g^{\frac{p-1}{2}t} = a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod p$ は $\frac{p-1}{2}t \equiv 0 \bmod (p-1)$ と同値で, これは $2|t$ を意味するから結論を得る. □

問 14.3. p を奇素数とする. $\gcd(a,p) = 1$ のとき, 整数 x についての方程式 $ax^2 + bx + c \equiv 0 \bmod p$ は $\left(\frac{b^2-4ac}{p}\right) = 1, 0, -1$ に従つて, それぞれ, p を法として, 2 つの解をもつ, 唯 1 つの解をもつ, 解をもたない, となる. これを示せ.

15. 平方剰余の相互法則

自然数 m について左剰余類の全体 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の完全代表系を法 m の剰余系といふ. $p=2n+1$ を奇素数とする. n 個の整数の集合 $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ は, これと $\{0, -r_1, -r_2, \cdots, -r_n\}$ とを合はせた集合が丁度, 法 p の完全代表系になるとき, 法 p の Gauss 代表系であるといはれる.

補題 15.1. (Gauss の補題) $p=2n+1$ を奇素数とし, $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ を法 p の Gauss 代表系とせよ. a を $\gcd(a,p)=1$ なる整数とせよ. 定義より, 各 $i=1, \cdots, n$ について

$$ar_i \equiv e_i r_j \bmod p \tag{15.2}$$

となる $e_j \in \{1, -1\}$ と r_j が一意的に存在する. このとき,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{i=1}^{n} e_i.$$

特に, $\{1, 2, \cdots, n\}$ を Gauss 代表系に取つて, a, $2a$ $\cdots$, na を p で割つた余りが n よりも大きいものの個数を N とすれば

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^N.$$

証明 $i=1$ から n に渡つて (15.2) の積を取る. このとき右辺の r_j も $\bmod p$ の異なる剰余を渡るから (確認せよ),

$$a^n \prod_{i=1}^{n} r_i \equiv \prod_{i=1}^{n} e_i \prod_{j=1}^{n} r_j \mod p$$

となる. ここで r_i はどれも p と素であるから,

$$a^n \equiv \prod_{i=1}^{n} e_i \mod p.$$

14.2 より結論を得る. □

最終目標の 16.15 までは, 以下の平方剰余の相互法則 (15.3 と 15.4) のうち, 15.3 (2) しか使はないので, 15.4 を読み飛ばしても構はない.

定理 15.3. p が奇素数で a と b が $\gcd(ab,p)=1$ なる整数のとき, 次が成り立つ.

(1) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$,

(2) $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ (第 1 補充法則),

(3) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ (第 2 補充法則).

証明 (1) 14.2 より

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (ab)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{ab}{p}\right) \mod p$$

であるが, 最左辺と最右辺は共に ± 1 のどちらかなので, 所望の式が成り立つ ($p>2$ に注意).

(2) Gauss 代表系を $\{1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\}$ にとるとき, 15.1 の e_1, $\cdots$, e_n が全て -1 になるので, 主張は明らか. 14.2 の合同式を $a=-1$ として適用してもよい.
(3) 同じく Gauss 代表系を $\{1,2,\cdots,\frac{p-1}{2}\}$ にとるとき, これらの 2 倍は

$$2,4,6,\cdots,p-1$$

である. この中で 15.1 にいふ $\{e_i\}$ が負になるのは $\frac{p+1}{2}$ 以上のもので, その個数 N は 1 以上 $\frac{p-1}{2}$ 以下の奇数の個数に等しい. N の偶奇はそれらの和 $1+3+5+\cdots$ の偶奇と一致する. しかるに, $\frac{p-1}{2}$ の偶奇に関はらず, この和の偶奇は

$$1+2+3+4+5+\cdots+\frac{p-1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}=\frac{p^2-1}{8}$$

と一致する:

$$N\equiv\frac{p^2-1}{8}\bmod 2.$$

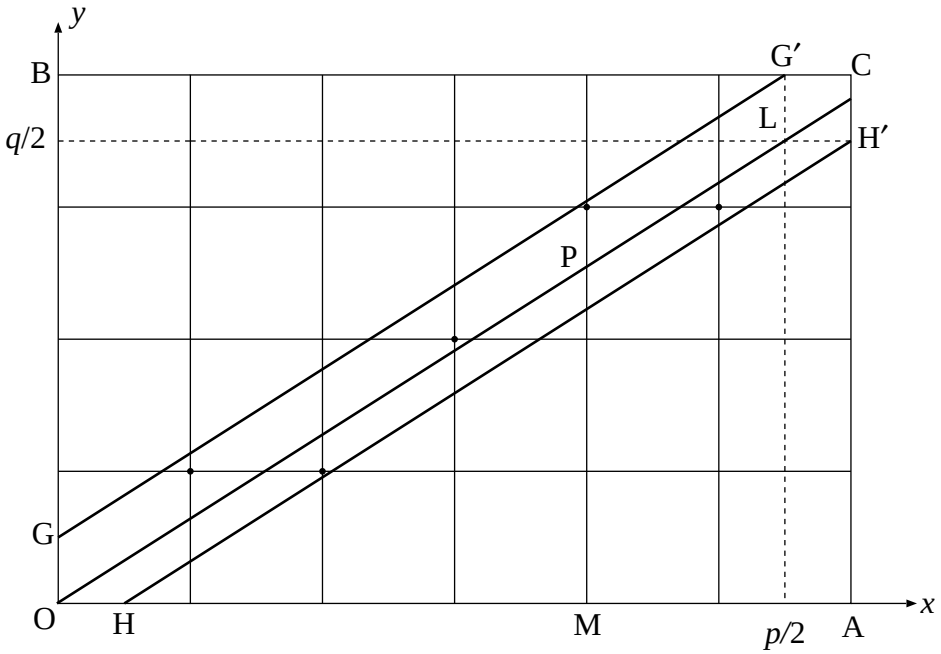
15.1 により, これで (3) が示された. □

定理 15.4. (平方剰余の相互法則) p と q を相異なる奇素数とせよ. このとき

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

が成り立つ.

証明 ([高木], pp.78-79 より引用.) 図は xy 座標平面を表してゐる. x 座標と y 座標が共に整数である点を格子点といふ. x 軸上に $\mathrm{OA}=(p+1)/2$ を, また y 軸上に $\mathrm{OB}=(q+1)/2$ を取つて長方形 OACB の内部の格子点を考察する. いま, $\mathrm{L}(p/2,q/2)$ を取り, 原点 O と L を通る直線 $\frac{y}{x}=\frac{q}{p}$ を引く. さらに x 軸上の一般の点 $\mathrm{M}(x,0)$ に対し, $\mathrm{P}(x,qx/p)$ を考へる.



$x=1,\,2,\,3,\,\cdots,\,(p-1)/2$ とするとき, qx を p で割つた剰余が $p/2$ よりも大きいのは, qx/p の分数部分が $1/2$ よりも大きいときで, それは, P を通る縦線上で P から $1/2$ 以内の距離にある格子点が OL の上側にあるときに限る[23]. 故に $\left(\dfrac{q}{p}\right)=(-1)^n$ における n は OL とそれを y 軸の向きに $1/2$ だけ平行移動した GG′ とに挟まれる平行四辺形 OGG′L の内部にある格子点の数である.

同様に $\left(\dfrac{p}{q}\right)=(-1)^m$ における m は OL とそれを x 軸の向きに $1/2$ だけ平行移動した HH′ とに挟まれる平行四辺形 OHH′L の内部になる格子点の数である.

即ち $\left(\dfrac{p}{q}\right)\left(\dfrac{q}{p}\right)=(-1)^{m+n}$ における $m+n$ はこれら 2 つの平行四辺形の内部にある格子点の総数であるが, 図に示す様に格子点 $\mathrm{C}((p+1)/2,(q+1)/2)$ を 1 頂点とする 1 辺が $1/2$ である小正方形 CG′LH′ を付け加へて 6 角形 OGG′CH′H を作れば, その内部における格子点の数はやはり $m+n$ である.

さて OC の中点 $((p+1)/4,(q+1)/4)$ はこの 6 角形の対称の中心で, 格子点はこの点に関して 2 つづつ互ひに対称であることは作図によつて明白である. 故に $m+n$ が奇数であるか, 偶数であるかは中心 $(p+1)/4,(q+1)/4)$ それ自身が格子点であるか, または格子点でないかによつて決定される.

故に $(p+1)/4$, $(q+1)/4$ がともに整数, 即ち p, q がともに $4j-1$ の形の素数であるときに限つて, $m+n$ は奇数, つまり

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=-1$$

である. 即ち, 定理の主張は証明された.

あるいは次の様にも説明される. 3 角形 GG′B, HH′A の内部には同数の格子点が含まれるから, それを k とすれば, 長方形 OACB の内部の格子点の総数は $m+n+2k$ である. しかるに長方形の内部には明らかに

$$\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}\ \text{個}$$

の格子点があるから

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{m+n}=(-1)^{m+n+2k}=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

となる. □

例 15.5. ここまでで学んだ性質を使つて $\left(\dfrac{365}{1847}\right)$ を求めてみる.

$$\left(\frac{365}{1847}\right)=\left(\frac{5}{1847}\right)\left(\frac{73}{1847}\right)=\left(\frac{1847}{5}\right)\left(\frac{1847}{73}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{73}\right)\left(\frac{11}{73}\right)=-\left(\frac{11}{73}\right)$$
$$=-\left(\frac{73}{11}\right)=-\left(\frac{-4}{11}\right)=-\left(\frac{-1}{11}\right)\left(\frac{2^2}{11}\right)=-\left(\frac{-1}{11}\right)=+1$$

問 15.6. $\left(\dfrac{311}{1321}\right)$ の値を求めよ.

[23] つまり, P から, P の直下の格子点までの距離が $\frac{1}{2}$ より大.

16. Gauss 整数

複素数体 $\mathbb{C}$ の定義と四則演算については既知とする.
$z = x + yi \in \mathbb{C}$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ の複素共役とは, $\overline{z} = x - yi$ のことである.
写像 $z \mapsto \overline{z}$ で与へられる写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の四則演算を保存する. つまり $z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$ のとき,

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

が成り立つ. 一般の体 K について, 四則演算を保存する写像 $K \to K$ を K の自己同型といふ.
写像 $z \mapsto \overline{z}$ は $\mathbb{C}$ の自己同型である. もちろん恒等写像も自己同型写像である.

複素数 $z = x + yi \in \mathbb{C}$ $(x,\, y \in \mathbb{R})$ に対して

$$Nz = N(z) = z\overline{z} = x^2 + y^2 \ (\geqq 0)$$

と書いて, これを z の norm と呼ぶ. 通常の絶対値 $|z|$ は norm の平方根である:

$$|z| = \sqrt{Nz}.$$

定義 16.1. 複素数体 $\mathbb{C}$ の部分集合

$$\mathbb{Z}[i] = \{\, a + bi \,|\, a,\ b \in \mathbb{Z} \,\}$$

は可換環であり (確かめよ), Gauss 整数環と呼ばれる. $\mathbb{Z}[i]$ の元を Gauss 整数といふ. また

$$\mathbb{Q}[i] = \{\, a + bi \,|\, a,\ b \in \mathbb{Q} \,\}$$

は体であり (6.5 を参照), Gauss 数体と呼ばれる.

ここで 8.3 や 8.4 を思ひ出す. (約元, 倍元, 割り切る, 割り切れる, 素元, 既約元などの用語.)

問 16.2. $z \in \mathbb{Z}[i]$ ならば $Nz \in \mathbb{Z}$ であることを示せ. また $z_1,\, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ について

$$|z_1| < |z_2| \iff Nz_1 < Nz_2, \tag{16.3}$$

$$\mathbb{Z}[i] \text{ において } z_1 \,|\, z_2 \implies \mathbb{Z} \text{ において } Nz_1 \,|\, Nz_2 \tag{16.4}$$

を証明せよ. また (16.4) の逆は必ずしも成立しないことを反例を挙げて示せ.

注意 16.5. これらの性質は以後よく使はれる. 例へば $N(1+i) = 2$ なので, $1+i$ を割る様な元は $\mathbb{Z}[i]$ には ± 1, $\pm i$, $\pm(1 \pm i)$ 以外には存在しない. 実際, $\alpha = a + bi \,|\, 1 + i$ $(a,\, b \in \mathbb{Z})$ ならば norm を取つて $a^2 + b^2 = N\alpha \leqq 2$ なので $\alpha \in \{1, -1, i, -i, 1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$ である.

定義 16.6. $\mathbb{Z}[i]$ では約元, 倍元のことを $\mathbb{Z}$ の場合と同様に, それぞれ, 約数, 倍数と呼ぶこととする. また, $\mathbb{Z}[i]$ の素元を Gauss 素数と呼ぶ. いはゆる通常の $\mathbb{Z}$ の素数をこれと区別して有理素数と呼ぶことがある. また, $\mathbb{Z}$ の場合と同様に $\mathbb{Z}[i]$ の元 α の約数である Gauss 素数を α の素因子と呼ぶ.

例 16.7. あとで, 詳しく証明を付けるが $1 \pm i$, 3, $1 \pm 2i$, $2 \pm i$, 7 などは Gauss 素数である.

定義 16.8. 可換環 R において, 乗法の単位元 1 の約元を単元といふのであつた (8.3 参照). $\mathbb{Z}[i]$ においては単元は単数と呼ばれ, それらは 1, -1, i, $-i$ の 4 つだけである (確かめよ).

定義 16.9. 可換環 R の 2 つの元 a, b について, 一方が他方の単数倍であるとき, この 2 元は互ひに同伴 (あるいは一方は他方の同伴数) であるといはれる.

例 16.10. $\mathbb{Z}[i]$ においては, $1-i=(-i)(1+i)$, $2-3i=i(-3-2i)$ なので $1-i$ と $1+i$, $2-3i$ と $-3-2i$ は, それぞれ, 互ひに同伴である.

問 16.11. 16.9 で定義した同伴といふ性質は同値関係であることを示せ. また $\mathbb{Z}[i]$ において α と β が同伴であるためには, ideal $\alpha\mathbb{Z}[i]:=\{\alpha z \,|\, z\in\mathbb{Z}[i]\}$ と ideal $\beta\mathbb{Z}[i]$ が一致することが必要十分であることを証明せよ.

$\mathbb{Z}[i]$ の 0 でない元 $\alpha=x+yi$ の同伴数は, これ自身を含めて

$$i\alpha=-y+ix,\quad -\alpha=-x-yi,\quad -i\alpha=y-ix$$

の 4 つである. この中に, 実部が正で虚部が負でないものが唯 1 つ存在する[24].

補題 16.12. a, $b\in\mathbb{Z}[i]$, $b\neq 0$ とせよ. このとき, ある q, $r\in\mathbb{Z}[i]$ が存在して

$$a=bq+r\,,\quad N(r)\leqq\tfrac{1}{2}N(b).$$

証明 集合 $b\mathbb{Z}[i]$ は複素数平面上で 0 と b を結ぶ線分を 1 辺とする 1 つの正方形を基準にして, 全複素数平面を埋め尽くしたときの無数の正方形の頂点の全体 (それは格子を形成するが) と一致する. この格子点のうち a に最も近い点を bq とすれば, 与式が成り立つ. □

定理 16.13. M を $\mathbb{Z}[i]$ の ideal とする. このとき, ある $d\in\mathbb{Z}[i]$ によつて

$$M=d\mathbb{Z}[i]$$

と書かれる. しかも, この様な d はその同伴数を除けば一意的に定まる.

証明 $M-\{0\}$ のうち, 原点に一番近いもの (つまり norm が最小になる点) の一つを d とせよ. 任意に $a\in M$ を取れ. 16.12 により, $N(a-dq)\leqq\frac{1}{2}N(d)$ となる $q\in\mathbb{Z}[i]$ が存在する. しかるに M は ideal だから $a-dq\in M$ なので, $a-dq=0$ でない限り矛盾が生じる. つまり $a=dq\in d\mathbb{Z}[i]$. よつて $M\subset d\mathbb{Z}[i]$ を得る. 逆の包含関係 $M\supset d\mathbb{Z}[i]$ は明らかだから, 主張の前半が証明された. 後半は d と d' がともに主張を満たせば $d'=ud$ $(u\in\mathbb{Z}[i])$ と $d=vd'$ $(v\in\mathbb{Z}[i])$ が成り立ち, $uv=1$ となるので u も v も単数である. □

この 16.13 により, Gauss 整数環においても公約数, 最大公約数, 最小公倍数が (同伴性を無視すれば) 定まる. 即ち, α_1, α_2, $\cdots$, $\alpha_n\in\mathbb{Z}[i]$ のとき,

$$M=\{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{Z}[i]\}$$

が $\mathbb{Z}[i]$ の ideal であることは容易にわかるので, $\delta\mathbb{Z}[i]=M$ となる $\delta\in\mathbb{Z}[i]$ が, 同伴なものを無視すれば, 唯 1 つに定まる. そこで

$$\gcd(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\delta$$

と書いて, これを α_1, α_2, $\cdots$, α_n の最大公約数と呼ぶ. さらに $\delta'\mathbb{Z}[i]\supset\delta\mathbb{Z}[i]$ のとき, δ' は α_1, $\cdots$, α_n の公約数と呼ばれる.

[24] それを正規化された Gauss 整数と呼ぶ.

命題 16.14. $\mathbb{Z}[i]$ においては既約元は素元であり, それゆゑ, 素元と既約元の概念は一致する.

証明 p を $\mathbb{Z}[i]$ の既約元とせよ. $p|ab$ $(a,\, b\in\mathbb{Z}[i])$ であるとする. $d=\gcd(p,a)$ とおく. d は p の約数であるから, d は単数か p と同伴かのいづれかである. d が単数ならば, $1=ps+at$ と書ける. このとき $b=pbs+abt$ なので $p|b$ がわかる. もし d が p と同伴ならば, $p|a$ である. よつて p は素元である. 素元は常に既約元である (8.4 を参照) から後半の主張も正しい. □

定理 16.15. (Gauss 整数環における素因数分解の一意分解性)
0 でないどんな Gauss 整数も, 1 つの単数といくつかの Gauss 素数の積に書かれる. しかも, その様な積に現れる Gauss 素数は, それら Gauss 素数の同伴であることを除けば, 現れる個数を込めて一意的である.

証明 (16.3) と 16.14 により, norm に関する帰納法で, 8.1 の証明と同様に示される. □

命題 16.16. p を奇素数とする. p は Gauss 素数であるか, またはある Gauss 素数 q の norm である. 後者の場合, $p=q\overline{q}$ であり, q と $\overline{q}$ は同伴数ではなく, p は q または $\overline{q}$ とこれらの同伴数のみを素因子に持つ.

証明 p が Gauss 素数でないとせよ. さすれば, $a+bi\,|\,p$ なる Gauss 素数 $a+bi\in\mathbb{Z}[i]$ $(ab\neq 0)$ が存在する. このとき $\gcd(a,b)=1$. さらに複素共役を考へれば $a-bi\,|\,p$ でなくてはならない. しかるに $\gcd(a+bi,a-bi)|\gcd(2a,2b)=2$ であるが p が奇数なので, $\gcd(a+bi,a-bi)=1$ である. よつて $a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)\,|\,p$. ここで, もし $a^2+b^2=p$ でないとすると p が素数であることに反する. 従つて $a^2+b^2=p$ となる. この状況は主張の後半の記号で $q=a+bi$ であり, それも示されてゐる. □

定理 16.17. p を奇素数とする. このとき
$p\equiv 1 \bmod 4$ ならば p は Gauss 素数の norm であり,
$p\equiv 3 \bmod 4$ ならば p は Gauss 素数である.

証明 15.3 より, $p\equiv 1 \bmod 4$ ならば, $x^2\equiv -1 \bmod p$ が解 x を持つ. つまり $x^2+1=py$ となる $y\in\mathbb{Z}$ がある. このとき, $p\,|\,(x+i)(x-i)$ なので, もし p が Gauss 素数なら $p\,|\,(x+i)$ または $p\,|\,(x-i)$ である. しかし, 共役を考へれば, この 2 つは共に成り立つ. しかるに p は奇数なので $p\,|\,x$ でなければならない. これは矛盾である. よつて p は Gauss 素数ではない. 16.16 により, それは Gauss 素数の norm である. 逆に $p=a^2+b^2$ と書けるとき a, b を法 4 で観察すれば, $p\equiv 1 \bmod 4$ であることがわかる. 転換法[25]により残りの方も示される. □

以上と 16.5 をまとめれば次が得られる.

系 16.18. Gauss 素数は以下で尽くされる :

$$\{1{+}i,\ 1{-}i,\ -1{+}i,\ -1{-}i\}\cup\{p,\ -p,\ ip,\ -ip\mid p \text{ は } p\equiv 3 \bmod 4 \text{ なる素数}\}$$
$$\cup\{a+bi\mid a,\, b\in\mathbb{Z} \text{ で } p=a^2+b^2 \text{ は } \equiv 1 \bmod 4 \text{ なる素数}\}.$$

例 16.19. Gauss 整数環における素因数分解の例を与へる :

[25] いくつかの命題 $P_1\Rightarrow Q_1$, $P_2\Rightarrow Q_2$, $\cdots$ があり, それらの命題の仮定があらゆる場合を尽してをり, それらの命題の結論のうち, どの 2 つも両立し得ないとき, それらの命題の逆がすべて成り立つ. これを転換法と呼ぶ.

$17190+43920i$ の素因数分解を得るために, まづ互除法で

$$\gcd(17190, 43920) = 2\cdot 3^2\cdot 5$$

を得ておく. これにより有理整数の因数を見出すことができて

$$17190+43920i = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(191+488i)$$

と分解される. 次に $191+488i$ の分解をする. まづ, これの norm を素因数分解すると

$$N(191+488i) = (191+488i)(191-488i) = 274625 = 5^3\cdot 13^3$$

となるから $191+488i$ は 5 と 13 を割る Gauss 素数を因数に持つことがわかる. そこでまづ $5=(1+2i)(1-2i)$ の素因数 $1\pm 2i$ による除法を試みると

$$(191+488i)/(1+2i) = \frac{1167}{5}+\frac{106}{5}i, \quad (191+488i)/(1-2i) = -157+174i$$

から $1-2i$ のみを因子にもつことがわかる. さらに除法を続ければ

$$(191+488i)/(1-2i)^3 = -9-46i$$

がわかり, これ以上は $1-2i$ では割れない. 今度は $13=(2+3i)(2-3i)$ の素因数 $2\pm 3i$ による除法を試みることにより,

$$(-9-46i)/(2+3i)^3 = i$$

がわかる. 以上をまとめて, 素因数分解は次の通り :

$$\begin{aligned} 17190+43920\,i &= 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot(191+488i) = 2\cdot 3^2\cdot 5(1-2i)^3(-9-46i)\\ &= 2\cdot 3^2\cdot 5(1-2i)^3(2+3i)^3 i\\ &= -i(1+i)^2\cdot 3^2\cdot(1+2i)(1-2i)(1-2i)^3(2+3i)^3 i\\ &= (1+i)^2\cdot 3^2\cdot(1+2i)(1-2i)^4(2+3i)^3. \end{aligned}$$

問 16.20. Gauss 整数 $270578+7475930i$ を Gauss 素数の積に分解せよ. できるだけ, 計算機や computer を使はないでやつてみて欲しい.

これで, この講義の 1 つの目標であつた Gauss 整数環 $\mathbb{Z}[i]$ の基本事項の解説が終はつた.

演習問題

16.21. 等式

$$(17+8i)\,\xi+(7+8i)\,\eta = 1$$

を満たす $\xi, \eta\in\mathbb{Z}[i]$ を 1 組求めよ. (Hint : 16.12 を用ゐて Gauss 整数環で "互除法" を行ふ.)

16.22. 整数 n が 2 つの互ひに素な平方数の和に書けるとき, n のすべての正の約数もさうであることを示せ.

16.23. 自然数を n^2a (但し $a>1$ は平方因数[26]を持たない) と表したとき, a のすべての奇数の素因数 p が $p\equiv 1 \bmod 4$ を満たすとき, かつそのときに限り, n^2a は 2 つの平方数の和（順序は無視する）として表せる. これを証明せよ. また a が r 個の素数の積であるとき, a を 2 つの平方数の和で表す仕方は何通りか.

[26] 平方因数とは平方数である約数のこと.

この後の節では, ここまでの話の補足的な話題を述べる.

17. 剰余類

第 12 節で述べた左剰余類と同様に右剰余類といふものを考へることができる.

定義 17.1. 群 G と $H < G$ について Ha $(a \in G)$ の形の部分集合を G における H の右剰余類とよび, 特に $H1 = 1H = H$ なので H 自身も 1 つの右剰余類である.

問 17.2. 次のことを証明せよ.

$$Ha = Hb \iff ab^{-1} \in H. \tag{17.3}$$

(17.3) が満たされてゐるとき, a と b は右合同であるといふ. それは, a と b が同じ右剰余類に属することに他ならない.

群 G とその部分群 H に対して, G を H に関する右剰余類の和集合に表すこと, つまり

$$G = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Ha_\lambda$$

の形に書くことを G の H による右分解といふ. また, 集合

$$\{\, Ha_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda \,\}$$

を $H\backslash G$ と書く.

例 17.4. G が Abel 群でないとき, 一般に $H < G$ について, H に関する左分解と右分解は一致しない. しかし, Abel でない場合でも右分解と左分解が一致することがある.

例へば 3.3 で説明した S_4 の Klein の 4 元群と呼ばれる部分群

$$V = \{\, \varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \,\}$$

の左剰余類と右剰余類を書いてみる. 左剰余類は

$$\begin{aligned}
\varepsilon V &= \{\, \varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \,\} = V, \\
(12)V &= \{\, (12), (12)(12)(34), (12)(13)(24), (12)(14)(23) \,\} \\
&= \{\, (12), (34), (1324), (1423) \,\}, \\
(13)V &= \{\, (13), (13)(12)(34), (13)(13)(24), (13)(14)(23) \,\} \\
&= \{\, (13), (1234), (24), (1432) \,\}, \\
(14)V &= \{\, (14), (14)(12)(34), (14)(13)(24), (14)(14)(23) \,\} \\
&= \{\, (14), (1243), (1342), (23) \,\} = (23)V, \\
(123)V &= \{\, (123), (123)(12)(34), (123)(13)(24), (123)(14)(23) \,\} \\
&= \{\, (123), (134), (243), (142) \,\}, \\
(132)V &= \{\, (132), (132)(12)(34), (132)(13)(24), (132)(14)(23) \,\} \\
&= \{\, (132), (234), (124), (143) \,\}
\end{aligned}$$

となり

$$S_4 = V \sqcup (12)V \sqcup (13)V \sqcup (14)V \sqcup (123)V \sqcup (132)V.$$

右剰余類は

$$\begin{aligned}
V\varepsilon &= \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} = V,\\
V(12) &= \{(12), (12)(34)(12), (13)(24)(12), (14)(23)(12)\}\\
&= \{(12), (34), (1423), (1324)\},\\
V(13) &= \{(13), (12)(34)(13), (13)(24)(13), (14)(23)(13)\}\\
&= \{(13), (1432), (24), (1234)\},\\
V(14) &= \{(14), (12)(34)(14), (13)(24)(14), (14)(23)(14)\}\\
&= \{(14), (1342), (1243), (23)\} = V(23),\\
V(123) &= \{(123), (12)(34)(123), (13)(24)(123), (14)(23)(123)\}\\
&= \{(123), (243), (142), (134)\},\\
V(132) &= \{(132), (12)(34)(132), (13)(24)(132), (14)(23)(132)\}\\
&= \{(132), (143), (234), (124)\}
\end{aligned}$$

となり

$$S_4 = V \sqcup V(12) \sqcup V(13) \sqcup V(14) \sqcup V(123) \sqcup V(132).$$

このとき, $(12)V = V(12)$, $(13)V = V(13)$ 等, 常に左剰余類と右剰余類が一致してゐる.

問 17.5. 3.3 の様に S_3 を S_4 の部分群と思ふとき, S_4 の S_3 による右分解を 17.4 の様に具体的に記せ. S_4 の S_3 による左分解と右分解は一致するか答へよ.

18. 正規部分群と剰余類群

定義 18.1. 群 G と $H < G$ について, G の H による左分解と右分解が一致するとき, H は G の正規部分群と呼ばれ, $H \lhd G$ と書かれる.

G を群とし, $H \lhd G$ とする. このとき, 右分解と左分解が一致するから $xH = Hx$ $(x \in G)$ であるが, 剰余類の全体 $G/H = H\backslash G = \{x_\lambda H \mid \lambda \in \Lambda\}$ を考へる. このとき,

命題 18.2. 等式 $(xH)(yH) = xyH$ が代表元 $x, y \in G$ の選び方に依らず意味を持つ.

証明 以下 h_j は H の元を表すものとする. $x' = xh_1 \in xH$, $y' = yh_2 \in yH$ のとき, $h_1 y \in Hy = yH$ より $h_1 y = yh_4$ と書けるから, $x'y' = (xh_1)(yh_2) = x(h_1 y)h_2 = x(yh_4)h_2 \in xyH$ である. $(xH)(yH) = (x(Hy))H = (x(yH))H = ((xy)H)H = (xy)(HH) = (xy)H$ と考へてもよい. □

系 18.3. $H \lhd G$ のとき G/H は演算 $(xH)(yH) = xyH$ について群になる.
単位元は $H(=1H)$ で xH の逆元は $x^{-1}H$ である.

注意 18.4. 17.4 に挙げた剰余類 S_4/V $(= V\backslash S_4)$ の代表元をみれば, これが S_3 と "同じ振舞ひ" をする群であることがわかる. この様な状況のとき, 群 S_4/V は S_3 と同型であるといはれる.

19. 中国の剰余定理

ここでは中国の剰余定理 (Chinese Remainder Theorem) と呼ばれる重要な定理を述べる.

定理 19.1. (中国の剰余定理) g 個の整数 $m_1, m_2, \cdots, m_g$ は, どの 2 つも互ひに素であるとする. つまり, すべての i, j $(i \neq j)$ について $\gcd(m_i, m_j) = 1$ とする. さらに g 個の整数 $b_1, b_2, \cdots, b_g$ が与へられたとする. このとき, 方程式

$$x \equiv b_1 \bmod m_1,\ x \equiv b_2 \bmod m_2,\ \cdots,\ x \equiv b_g \bmod m_g$$

を満たす整数 x が存在する. しかも x はすべての m_j の積 $m_1 m_2 \cdots m_g$ を法として一意的に定まる. ($g = 2$ の場合については, 既に, 9.9 の証明で現れてゐる.)

証明 $M = m_1 m_2 \cdots m_g$ とおき, 各 j について $n_j = M/m_j$ とおく. 仮定より $\gcd(m_j, n_j) = 1$ であるから, 7.6 より $t_j m_j + s_j n_j = 1$ となる t_j, s_j が存在する. このとき, $e_j = s_j n_j$ とおくと

$$e_j \equiv \begin{cases} 1 \bmod m_j \\ 0 \bmod m_i \quad (i \neq j) \end{cases} \quad (\because\ m_i \mid n_j\,)$$

が成り立つ. それゆゑ

$$x = \sum_{i=1}^{g} b_i e_i$$

とおけば所望の解がひとつ得られる.
一意性: x' が他の解であれば $m_j | (x - x')$ がすべての j について成り立つから,
仮定 $\gcd(m_i, m_j) = 1$ により, $M | (x - x')$, つまり $x \equiv x' \bmod M$ となることがわかる. □

問 19.2. 次の 3 つの合同式を同時に満たす整数 x を 19.1 の証明に沿つて求めよ.

$$x \equiv 2 \bmod 5,\quad x \equiv 3 \bmod 7,\quad x \equiv 1 \bmod 11.$$

文 献

[高木] 高木 貞治 : 初等整数論講義, 1971, 共立出版

[IR] Irland, K. and Rosen, M. : A Classical Introduction to Modern Number Theory, 2nd ed., Graduate Text in Mathematics 84, 1990, Springer-Verlag

[W] Weil, A. : Number Theory for Beginners, Springer-Verlag, 1979
(邦訳 “初学者のための整数論” (訳 片山他) ちくま学芸文庫)

[永尾] 永尾 汎 : 代数学 (新数学講座 4), 1983, 朝倉書店

[彌永他] 彌永 昌吉, 有馬 哲, 浅枝 陽 : 詳解 代数入門, 1990, 東京図書