実施：2018 年 1 月 22 日 (月) 9:10-10:40, H-401 室

2017 年度　後期　定期試験　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
1/3	有	なし	80 分	代 数 学 5　月曜 1 時限, 教科書：Original	A, B	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

注意 4. **3a** **3b** および **7a** **7b** は選択問題である．それぞれから 1 問だけ選んで解答せよ．

1 (15 点)　K は標数 p の体とする．任意の元 $a, b \in K$ に対し, 次を示せ．

(1)　$(a+b)^p = a^p + b^p$.

(2)　任意の $n \in \mathbb{N}$ について　$(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.

2 (15 点)　$f(x) = x^3 + x + 1$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である．これの根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ．このとき, $\alpha^2 + 2$ の逆数を α の 2 次以下の多項式で表せ．

3a (15 点)　体の拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 があつて,

$$[\,M_1, K\,] = m_1,\ \ [\,M_2, K\,] = m_2,\ \gcd(m_1, m_2) = 1$$

であるとせよ．このとき $M_1 \cap M_2 = K$ であることを示せ．

3b (15 点)　体の L の部分体 M_1, M_2 について,

$$[\,L : M_1\,] = m_1,\ \ [\,L : M_2\,] = m_2,\ \ \gcd(m_1, m_2) = 1$$

であるとせよ．このとき $M_1M_2 = L$ であることを示せ．

4 (15 点)　k を体, t を不定元, $L = k(t)$, $K = k(t^5)$, $\alpha = t^2 - t$ とせよ．

(1)　$[L : K]$ を記せ．

(2)　$\mathrm{irr}\,(t, k(\alpha), x)$ と $[\,L : k(\alpha)\,]$ を記せ．

(3)　$K(\alpha) = L$ であることを示せ．(Hint : **3b**)

(4)　t を t^5 と α の有理式で具体的に書け．

(Hint : $t\alpha$, α^2, α^3, t^5 の間のうまい 1 次関係を考へよ．)

実施：2018 年 1 月 22 日 (月) 9:10-10:40, H-401 室

2017 年度 **後期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/3	有	なし	80 分	代数学 5　月曜 1 時限, 教科書：Original	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

5 (15 点) 代数的拡大 L/K に対し, $L \supset R \supset K$ なる環 R は体であることを示せ.

6 (10 点) 次のそれぞれの 2 つの体の合成体を簡潔な形で表し, それの $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,i)$ (i は虚数単位)　　(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

7a (15 点) 代数的拡大 L/K とその 2 つの部分体 M_1, M_2 で次の様な例を挙げよ. 但し, M_1 と M_2 の間に包含関係のないものに限る.

(1) $[\,M_1M_2 : M_1\,] < [\,M_2 : K\,]$ で $[\,M_1M_2 : M_1\,] = [\,M_2 : M_1 \cap M_2\,]$.

(2) $[\,M_1M_2 : M_1\,] < [\,M_2 : M_1 \cap M_2\,]$.

7b (15 点) $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ は集合として可算濃度であることを示せ.
(Hint : 各多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ ($a_0 \geq 1$) に対し $n + a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n|$ を考へて, これをもとに $\overline{\mathbb{Q}}$ の元を数へればよい.)

実施：2018 年 1 月 22 日 (月) 9:10-10:40, H-401 室

開講学部	評点小計
理工学部	

2017 年度 **後期 定期試験** (問題 兼 解答用紙)

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
3/3	有	なし	80 分	代 数 学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	A, B	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

8 (10 点) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$ の自己同型写像は恒等写像しかないことを示せ.

9 (10 点) 次の各多項式の $\mathbb{C}$ における因数分解, および $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体をできるだけ簡潔な形で与へ, その $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.

(1) $x^3 - 5$ (2) $x^4 + 3x^2 - 10$

10 (15 点) 拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上可約ならば $g(x)$ は $K(\alpha)$ 上可約であることを示せ.

(Hint : $[\,K(\alpha,\beta) : K\,]$ を考へよ.)

学 籍 番 号	氏 名