

2017年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
1/3	有	なし	80分	代数学 5		A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9桁)		氏名	
なし	理工学部	数学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。

注意 3. 試験場の静粛を保つために、退場は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 4. **7a** **7b** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

1 (15点) K は標数 p の体とする。任意の元 $a, b \in K$ に対し、次を示せ。

- (1) $(a + b)^p = a^p + b^p$.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.

2 (15点) $f(x) = x^3 + x + 1$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である。この根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ。このとき、 $\alpha^2 + 3$ の逆数を α の 2 次以下の多項式で表せ。

3 (15点) 体の L の部分体 M_1, M_2 について、
 $[L : M_1] = m_1, [L : M_2] = m_2, \gcd(m_1, m_2) = 1$
 であるとせよ。このとき $M_1 M_2 = L$ であることを示せ。

4 (15点) k を体、 t を不定元、 $L = k(t), K = k(t^5), \alpha = t^2 + t$ とせよ。

- (1) $[L : K]$ はいくつか。
- (2) $\text{irr}(t, k(\alpha), x)$ を記せ。 $[L : k(\alpha)]$ はいくつか。
- (3) $K(\alpha) = L$ であることを示せ。(Hint: **3**)
- (4) t を t^5 と α の有理式で具体的に書け。
 (Hint: $t\alpha, \alpha^2, \alpha^3, t^5$ の間のうまい 1 次関係を考へよ。)

2017年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
2/3	有	なし	80分	代数学 5 <small>月曜1時限, 教科書: Original</small>		A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9桁)		氏名	
なし	理工学部	数学科	年				

5 (15点) 代数的拡大 L/K に対し, $L \supset R \supset K$ なる環 R は体であることを示せ.

7a (15点) 代数的拡大 L/K とその2つの部分体 M_1, M_2 で次の様な例を挙げよ.

(1) $[M_1M_2 : M_1] < [M_2 : K]$ で $[M_1M_2 : M_1] = [M_2 : M_1 \cap M_2]$.

(2) $[M_1M_2 : M_1] < [M_2 : M_1 \cap M_2]$.

7b (15点) \mathbb{Q} の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ は集合として可算濃度であることを示せ.

(Hint : 各多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ ($a_0 \geq 1$) に対し $n + a_0 + |a_1| + \dots + |a_n|$ を考へて, これをもとに $\overline{\mathbb{Q}}$ の元を数へればよい.)

6 (10点) 次のそれぞれの2つの体の合成体と \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}i)$ (i は虚数単位) (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

2017 年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
3/3	有	なし	80分	代数学 5		A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9桁)		氏名	
なし	理工学部	数学科	年				

8 (10点) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ の自己同型写像は恒等写像しかないことを示せ.

10 (15点) 拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \text{irr}(\alpha, K, x)$, $g(x) = \text{irr}(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上可約ならば $g(x)$ は $K(\alpha)$ 上可約であることを示せ.

(Hint : $[K(\alpha, \beta) : K]$ を考へよ.)

9 (10点) 次の各多項式の \mathbb{C} における因数分解, および \mathbb{Q} 上の最小分解体とその \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ.

(1) $x^3 - 2$

(2) $x^4 + 5x^2 + 6$

学籍番号	氏名