実施：2017 年 12 月 5 日 (火) 14:50-16:20, 4-203 室

2017 年度 **後期　中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
1/3	有	なし	80 分	代 数 学 5	月曜 1 時限, 教科書：Original	A, B	大 西 良 博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)		氏　名	
なし	理工学部	数学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **7a** **7b**, は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) K は標数 p の体とする. 任意の元 $a, b \in K$ に対し, 次を示せ.
(1) $(a+b)^p = a^p + b^p$.
(2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$. **3.3**

解説 (1) $r = 1, \cdots, p-1$ について $\binom{p}{r} = \dfrac{p!}{(p-r)!\,r!}$ は組み合せの個数ゆゑ, 整数である. 一方, 分母 $p!$ の約数 p は, 分子 $(p-r)!\,r!$ の約数ではないので, p は約分されないで分子に残る. それゆゑ $p \mid \binom{p}{r}$ でなければならない. 従つて

$$
\begin{aligned}
(a+b)^p &= \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} a^{p-r} b^r = a^p + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} a^{p-r} b^r + b^p \\
&= a^p + 0 + b^p = a^p + b^p.
\end{aligned}
$$

(2) n に関する数学的帰納法で示す. $n = 1$ のときは (1) により正しい. n まで正しいとすれば,

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{p^{n+1}} &= \left((a+b)^{p^n}\right)^p \\
&= \left(a^{p^n} + b^{p^n}\right)^p \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= (a^{p^n})^p + (b^{p^n})^p \quad (\because (1)) \\
&= a^{p^{n+1}} + b^{p^{n+1}}
\end{aligned}
$$

となり $n+1$ のときも正しい.

2 (15 点) $f(x) = x^3 + x + 1$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である. これの根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ. このとき, $\alpha^2 + 3$ の逆数を α の 2 次以下の多項式で表せ. **4.13**

解説 互除法を使つて計算すると

$$f(x)(4x+2) + (x^2+3)(x^2+3x+3) = 1$$

を得る. x に α を代入すれば

$$
\begin{aligned}
1 &= f(\alpha)(4\alpha+2) + (\alpha^2+3)(\alpha^2+3\alpha+3) \\
&= 0 + (\alpha^2+3)(\alpha^2+3\alpha+3) \\
&= (\alpha^2+3)(\alpha^2+3\alpha+3).
\end{aligned}
$$

よつて

$$\frac{1}{\alpha^2+3} = \alpha^2 + 3\alpha + 3 \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

3 (15 点) 体の L の部分体 M_1, M_2 について,

$$[\,L : M_1\,] = m_1, \ [\,L : M_2\,] = m_2, \ \gcd(m_1, m_2) = 1$$

であるとせよ. このとき $M_1 M_2 = L$ であることを示せ.

解説 拡大次数の関係から

$$
\begin{aligned}
m_1 &= [L : M_1] = [L : M_1M_2][M_1M_2 : M_1], \\
m_2 &= [L : M_1] = [L : M_1M_2][M_1M_2 : M_1].
\end{aligned}
$$

ゆゑに $[L : M_1M_2] \mid \gcd(m_1, m_2) = 1$ である. よつて

$$[L : M_1M_2] = 1$$

でなければならない. つまり $L = M_1M_2$.

4 (15 点) k を体, t を不定元, $L = k(t)$, $K = k(t^5)$, $\alpha = t^2 + t$ とせよ.
(1) $[L : K]$ はいくつか.
(2) $\mathrm{irr}\,(t, k(\alpha), x)$ を記せ. $[\,L : k(\alpha)\,]$ はいくつか.
(3) $K(\alpha) = L$ であることを示せ. (Hint : **3**)
(4) t を t^5 と α の有理式で具体的に書け. **6.6**
(Hint : $t\alpha$, α^2, α^3, t^5 の間のうまい 1 次関係を考へよ.)

解説 (1) L/K の基底として $1, t, t^2, t^3, t^4$ が取れるので $[L : K] = \underline{5}$.
(2) $\mathrm{irr}\,(t, k(\alpha), x) = \underline{x^2 + x - \alpha}$. これは既約だから $[L : k(\alpha)] = \underline{2}$.
(3) $[L : K] = 5$ と $[L : k(\alpha)] = 2$ は互ひに素だから, **3** より

$$L = Kk(\alpha) = K(\alpha).$$

(4) まづ (3) より $K(\alpha) = L = k(t) = k(\alpha, t)$ で, $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ の 1 次関係を探つてみる. そのために, それらを t の式で書いてみると

$$
\begin{aligned}
\alpha &= t^2 + t \\
\alpha^2 &= t^4 + 2t^3 + t^2 \cdots\cdots ① \\
\alpha^3 &= t^6 + 3t^5 + 3t^4 + t^3 = t^5(t+3) + 3t^4 + t^3 \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

次の α^4 を計算するのは大変だから, 少し観察してみると, α を $t\alpha$ で置き換へてみるのが楽だといふことに気付く:

$$t\alpha = t^3 + t^2 = t^3 + \alpha - t \cdots\cdots ③.$$

①, ②, ③ から t^4, t^3 を消去すると

$$
\begin{aligned}
\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5t\alpha &= t^5 t + 3t^5 + 2t^2 \\
&= t^5 t + 3t^5 + 2(\alpha - t).
\end{aligned}
$$

これを t について解けば

$$t = \frac{-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha + 3t^5}{5\alpha - t^5 + 2} \ \cdots\cdots\ \text{Ans.}$$

を得る.

実施：2017 年 12 月 5 日 (火) 14:50-16:20, 4-203 室

2017 年度　**後期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/3	有	なし	80 分	代 数 学 5　月曜 1 時限, 教科書：Original	A, B	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

5 (15 点) 代数的拡大 L/K に対し, $L \supset R \supset K$ なる環 R は体であることを示せ.　**5.22**

解説 (1) 任意に $\alpha \in R, \neq 0$ を取れ. $1/\alpha \in R$ が示されればよい.
いま $K[\alpha]$ を考へる. R は環だから

$$K[\alpha] \subset R.$$

一方 α は K 上の代数的な元だから

$$K[\alpha] = K(\alpha) \quad \text{（教科書の 5.8(1) を見よ.）}$$

である. よつて $K(\alpha) \subset R$. 特に $1/\alpha \in R$ であり, 主張は示された.

6 (10 点) 次のそれぞれの 2 つの体の合成体と $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.
(1) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,i)$ (i は虚数単位)　(2) $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$　**7.2**

解説 (1) $(\sqrt[3]{2}\,i)^3 = -2i$ であるから $i \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,i)$.
ゆゑに, 合成体は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,i) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i)$. これの $\mathbb{Q}$ 上の基底として

$$1,\ i,\ \sqrt[3]{2},\ \ \sqrt[3]{2}\,i,\ \ (\sqrt[3]{2}\,i)^2 = -\sqrt[3]{2}^{\,2},\ \ \sqrt[3]{2}^{\,2}\,i$$

が取れるので

$$[\,\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i) : \mathbb{Q}\,] = 6.$$

(2) $\left(\sqrt{6} = \big((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5\big)/2\right.$ であるから $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.
$1/(\sqrt{2}+\sqrt{3})) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ゆゑ $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. ゆゑに, 合成体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. これの $\mathbb{Q}$ 上の基底として

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \ \sqrt{6}$$

が取れるので

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = 4.$$

7a (15 点) 代数的拡大 L/K とその 2 つの部分体 M_1, M_2 で次の様な例を挙げよ.
(1) $[\,M_1M_2 : M_1\,] < [\,M_2 : K\,]$ で $[\,M_1M_2 : M_1\,] = [\,M_2 : M_1 \cap M_2\,]$.
(2) $[\,M_1M_2 : M_1\,] < [\,M_2 : M_1 \cap M_2\,]$.　**7.4**

解説 (1) $M_1 = L$, $K \neq M_2 \neq L$ なる M_1, M_2 を取れば, $M_1M_2 = M_1$, $M_2 \subset M_1$ ゆゑ,

$$[M_1M_2 : M_1] = 1, \qquad [M_2 : K] > 1.$$

一方

$$[M_2 : M_1 \cap M_2] = [M_2 : M_2] = 1$$

であるから, これは所望の例になる.
こんな自明な例はつまらないので, 別の例を挙げる.

$$K = \mathbb{Q},\ \ L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}),\ \ M_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}),\ \ M_2 = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$$

とすると, $M_1M_2 = L$ になり,

$$[M_1M_2 : M_1] = 2, \qquad [M_2 : K] = 4.$$

一方

$$[M_2 : M_1 \cap M_2] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 2$$

であるから, これも所望の例になる.
(2)　$K = \mathbb{Q}$,　$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$,　$M_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$,　$M_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega)$
とすると

$$[M_1M_2 : M_1] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2,$$
$$[M_2 : M_1 \cap M_2] = [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega) : \mathbb{Q}] = 3$$

であるから, これは所望の例である.

7b (15 点) $\mathbb{Q}$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ は集合として可算濃度であることを示せ.
(Hint : 各多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ $(a_0 \geq 1)$ に対し $n + a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n|$ を考へて, これをもとに $\overline{\mathbb{Q}}$ の元を数へればよい.)　**8.10**

解説 分母を払ふことを考へれば

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{Q}} &= \{\,\alpha \,|\, g(\alpha) = 0 \ \text{ for } \ \exists g(x) \in \mathbb{Q}[x]\,\} \\ &= \{\,\alpha \,|\, g(\alpha) = 0 \ \text{ for } \ \exists g(x) \in \mathbb{Z}[x] \ (\text{但し } g(x) \text{ の最高次係数} \geqq 1)\,\}\end{aligned}$$

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{Z}[x]$ $(a_0 \geq 1)$ に対し,

$$C(f) = n + a_0 + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

とおくと $M \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\{\,g(x) \in \mathbb{Z}[x] \;\big|\; C(g) \leqq M\,\}$$

は有限集合である. しかるに

$$\begin{aligned}&\{\,g(x) \in \mathbb{Z}[x] \;\big|\; g(x) \text{ の最高次係数} \geqq 1\,\} \\ &= \bigcup_{M=1}^{\infty} \{\,g(x) \in \mathbb{Z}[x] \;\big|\; C(g) \leqq M\,\}\end{aligned}$$

ゆゑ, これは可算集合である. ひとつの多項式の根は有限個であるから, $\overline{\mathbb{Q}}$ は可算集合である.

実施：2017 年 12 月 5 日 (火) 14:50-16:20, 4-203 室

2017 年度　**後 期　中 間 試 験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試 験 科 目 名	クラス	出 題 者
3/3	有	なし	80 分	代 数 学 5　月曜 1 時限, 教科書：Original	A, B	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名
なし	理工学部	数学科	年		

8 (10 点) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ の自己同型写像は恒等写像しかないことを示せ.
9.1

解説 その様な準同型 φ は $\varphi(\sqrt[3]{2})$ によつて定まるが,

$$\varphi\big(\sqrt[3]{2}\big)^3 = \varphi\big(\sqrt[3]{2}^3\big) = \varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2$$

ゆゑ $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega^2$ のいづれかである.

しかるに後ろの 2 つは $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ に属さないので題意に適さない.
よつて $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$ であり, φ は恒等写像である.

9 (10 点) 次の各多項式の $\mathbb{C}$ における因数分解, および $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とその $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.

(1) x^3-2　　　(2) x^4+5x^2+6　　　**10.5**

解説 w(1) $x^3-2 = (x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt[3]{2}\omega)(x-\sqrt[3]{2}\omega^2)$.
であるから, この多項式の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ であり, これの $\mathbb{Q}$ 上の基底として $1,\ \omega,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}^2,\ \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}^2\omega$ が取れるので,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega) : \mathbb{Q}] = 6.$$

(2) $x^4+5x^2+6 = (x^2+2)(x^3+3) = (x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$.
であるから, この多項式の最小分解体は $\mathbb{Q}(\sqrt{2}i, \sqrt{3}i)$ であり, これの $\mathbb{Q}$ 上の基底として $1,\ \sqrt{2}i,\ \sqrt{3}i,\ \sqrt{6}$ が取れるので,

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}i, \sqrt{3}i) : \mathbb{Q}] = 4.$$

10 (15 点) 拡大 L/K の 2 元 $\alpha,\ \beta$ は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上可約ならば $g(x)$ は $K(\alpha)$ 上可約であることを示せ.　**10.7**
(Hint : $[\,K(\alpha,\beta) : K\,]$ を考へよ.)

解説 まず,

$$\begin{aligned}[\,K(\alpha,\beta):K\,] &= [\,K(\alpha,\beta):K(\alpha)\,][\,K(\alpha):K\,]\\ &= [\,K(\alpha,\beta):K(\alpha)\,]\ \deg f(x)\\ &= \deg \mathrm{irr}\,(\beta, K(\alpha), x)\ \deg f(x).\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}[\,K(\alpha,\beta):K\,] &= [\,K(\alpha,\beta):K(\beta)\,][\,K(\beta):K\,]\\ &= [\,K(\alpha,\beta):K(\beta)\,]\ \deg g(x)\\ &= \deg \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x)\ \deg g(x)\end{aligned}$$

であるから,

$$\deg \mathrm{irr}\,(\beta, K(\alpha), x)\ \deg f(x) = \deg \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x)\ \deg g(x) \quad \cdots \ ①$$

いま, $g(x)$ が $K(\alpha)$ 上既約であるとする. これは $\mathrm{irr}\,(\beta, K(\alpha), x) = g(x)$ であることは同値であるから, ① は

$$\deg g(x)\ \deg f(x) = \deg \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x)\ \deg g(x)$$

と書ける. つまり

$$\deg f(x) = \deg \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x)$$

となる. $\mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x) \,|\, f(x)$ であるから

$$f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x)$$

でなければならない. つまり $f(x)$ は $K(\beta)$ 上でも既約. これで主張が証明された.

★ 各 page において, 赤字で [ ] で囲んだ番号の付いた教科書の問/演習問題は, 以後, 成績評価に関する report の成果の勘定に入れないので, ご注意下さい.

★ 中間試験の結果が 70 点以上であつた場合は, 期末試験を免除しますが, 受験することをお勧めします. 該当者が期末試験を, 受験した場合は max{ 中間試験の得点, 期末試験の得点 } を評価点とし, 受験しなかつた場合は中間試験の点数を評価点として提出します.

学 籍 番 号	氏 名