

2018年度 後期定期試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
2	有	なし	80分	代数学5 <small>月曜1時限, 教科書: Original</small>		A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号(9桁)		氏名	
なし	理工学部	数学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

1 (10点) p を素数とし, K は標数 p の体とする. 任意の元 $a, b \in K$ に対し, 次が成り立つことを示せ.

- (1) $(a + b)^p = a^p + b^p$.
- (2) 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.

3 (15点) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である. これの根の1つを α とせよ. このとき, $\alpha^2 + 1$ の逆数を α の2次以下の多項式で表せ.

2 (10点) 体の L の部分体 M_1, M_2 について,
 $[L : M_1] = m_1, [L : M_2] = m_2, \gcd(m_1, m_2) = 1$
 であるとせよ. このとき $M_1 M_2 = L$ であることを示せ.

4 (10点) 代数的拡大 L/K に対し, $L \supset R \supset K$ なる環 R は体であることを示せ.

学籍番号 (9桁)	氏名

学籍番号 (9桁)	氏名

5 (15点) 次の多項式について, それぞれの体の最小分解体を求め, これら全てと \mathbb{Q} について, 包含関係を問題番号を用いてわかり易く記せ.

① $x^2 - 2x - 1$

② $x^2 - 5$

③ $x^4 - 7x^2 + 10$

④ $x^4 - 14x^2 + 9$

また, ④ の体の \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ.

7 (10点) 次の問に答へよ.

(1) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ の自己同型は 2 つしか存在しないことを示せ.

(2) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ から \mathbb{C} への中への同型をすべて求めよ.

8 (10点) K を体, α, β を K 上代数的な元とする. このとき, $\text{irr}(\alpha, K, x) = \text{irr}(\alpha, K(\beta), x) \iff \text{irr}(\beta, K, x) = \text{irr}(\beta, K(\alpha), x)$ であることを示せ.

6 (10点) 代数的拡大 L/K とその 2 つの真の部分体 M_1, M_2 で次の様な例を挙げよ. $[M_1 M_2 : M_1] < [M_2 : M_1 \cap M_2]$.

9 (10点) p を素数とする. \mathbb{F}_p から \mathbb{Q} への環準同型写像は 0 写像 (すべての元を 0 に移す写像) に限ることを示せ.

学籍番号 (9桁)	氏名

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

- (1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を 体の拡大 L/K と記す.
- (2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.
- (3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を 代数的拡大 と呼ぶ.
- (4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを 有限次拡大 と呼ぶ.
- (5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の 中間体 と呼ぶ.
- (6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の 単純拡大 であるといはれる.
- (8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを 素体 と呼ぶ. 素体は有理数体 \mathbb{Q} か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.
- (9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の 標数 といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\text{char } K$ と記す. 前者の場合は素体が \mathbb{F}_p であり, 後者の場合の素体は \mathbb{Q} である.
- (10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯一つ存在し, それを α の 最小多項式 と呼んで $\text{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.
- (11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を $M_1 M_2$ または $M_2 M_1$ と書いて, M_1 と M_2 の 合成体 と呼ぶ. また, 拡大 $M_1 M_2 / M_1$ を拡大 M_2 / K の M_1 による 持ち上げ と呼ぶ.
- (12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は 代数的閉体 といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の 代数的閉包 といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に \bar{K} と記す.
- (13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の 最小分解体 といふ.
- (14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみ積に分解する, という性質を持つとき, L/K は 正規拡大 であるといはれる. 体 K に, 1 つの多項式 $f(x) \in K[x]$ の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大 である.
- (15) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は 分離的 であるといはれる.
- (16) 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上 分離的 であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を 分離的拡大 と称する.
- (17) 代数的拡大 $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/K$ が分離的であるためには $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ がすべて K 上分離的であることが必要十分である.
- (18) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は 完全体 であると呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.
- (19) 代数的拡大 L/K について, L から \bar{K} への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. $\text{char } K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.
- (20) 分離的拡大は単純拡大である.
- (21) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.
- (22) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \text{Gal}(L/K)$ について, $\mathcal{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathcal{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathcal{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \sigma \in H)\}$, 各 $M \in \mathcal{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \mid \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \text{Gal}(L/M)$ である.
- (23) Galois の基本定理 1
 (22) の状況下で, $\varphi: H \mapsto L^H$ は $\mathcal{G}(G)$ から $\mathcal{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与えられる.
- (24) Galois の基本定理 2
 有限次 Galois 拡大 L/K とその中間体 M について次が成り立つ.
 (a) $\tau \in \text{Gal}(L/K)$ に対し, $\tau \text{Gal}(L/M)\tau^{-1} = \text{Gal}(L/M^\tau)$.
 (b) M は K の Galois 拡大 $\iff \text{Gal}(L/M) \triangleleft \text{Gal}(L/K)$.
 (c) (b) の同側が成り立つとき, $\text{Gal}(M/K) \simeq \text{Gal}(L/K) / \text{Gal}(L/M)$ (群としての同型).