

2018年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
2	有	なし	80分	代数学5 <small>月曜1時限, 教科書: Original</small>		A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号(9桁)		氏名	
なし	理工学部	数学科	年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。  
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

1 (10点)  $p$  を素数とし,  $K$  は標数  $p$  の体とする. 任意の元  $a, b \in K$  に対し, 次が成り立つことを示せ.

- (1)  $(a + b)^p = a^p + b^p$ .
- (2) 任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ .

3 (15点)  $f(x) = x^3 + x + 1$  は  $\mathbb{F}_5[x]$  の既約多項式である. これの根の1つを  $\alpha$  とし  $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$  とせよ. このとき,  $\alpha^2 + 2$  の逆数を  $\alpha$  の2次以下の多項式で表せ.

2 (10点) 体の  $L$  の部分体  $M_1, M_2$  について,  
 $[L : M_1] = m_1, [L : M_2] = m_2, \gcd(m_1, m_2) = 1$   
 であるとせよ. このとき  $M_1 M_2 = L$  であることを示せ.

4 (10点) 代数的拡大  $L/K$  に対し,  $L \supset R \supset K$  なる環  $R$  は体であることを示せ.

学籍番号 (9桁)	氏名

学籍番号 (9桁)	氏名

5 (15点) 次の多項式について, それぞれの体の最小分解体を求め, これら全てと  $\mathbb{Q}$  について, 包含関係を問題番号を用いてわかり易く記せ.

①  $x^2 - 2x - 1$

②  $x^2 - 3$

③  $x^4 - 5x^2 + 6$

④  $x^4 - 10x^2 + 1$

また, ④ の体の  $\mathbb{Q}$  上の拡大次数を求めよ.

7 (10点) 次の問に答へよ.

(1) 体  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  の自己同型は恒等写像しか存在しないことを示せ.

(2) 体  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  から  $\mathbb{C}$  への中への同型をすべて求めよ.

8 (10点)  $K$  を体,  $\alpha, \beta$  を  $K$  上代数的な元とする. このとき,  $\text{irr}(\alpha, K, x) = \text{irr}(\alpha, K(\beta), x) \iff \text{irr}(\beta, K, x) = \text{irr}(\beta, K(\alpha), x)$  であることを示せ.

6 (10点) 代数的拡大  $L/K$  とその 2 つの真の部分体  $M_1, M_2$  で次の様な例を挙げよ.  $[M_1 M_2 : M_1] < [M_2 : M_1 \cap M_2]$ .

9 (10点)  $p$  を素数とする.  $\mathbb{Q}$  から  $\mathbb{F}_p$  への環準同型写像は 0 写像 (すべての元を 0 に移す写像) に限ることを示せ.

学籍番号 (9桁)	氏名

## 記号

$\mathbb{N}$  … 自然数全体,  $\mathbb{Z}$  … 整数全体のなす環,  $\mathbb{Q}$  … 有理数全体のなす体,  
 $\mathbb{R}$  … 実数全体のなす体,  $\mathbb{C}$  … 複素数全体のなす体.  $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ .

## 既習事項のまとめ

- (1) 体  $L$  の部分集合  $K$  が  $L$  の演算に関して体であるとき,  $K$  を  $L$  の部分体, あるいは  $L$  は  $K$  の拡大といひ, この状況を 体の拡大  $L/K$  と記す.
  - (2) 体の拡大  $L/K$  に対して  $K$  上の vector 空間としての  $L$  の次元を  $L/K$  の拡大次数と呼び  $[L:K]$  で表す. 3つの体  $K \subset M \subset L$  について  $[L:K] = [L:M][M:K]$ .
  - (3) 体の拡大  $L/K$  について, 任意の  $\alpha \in L$  がある  $f(x) \in K[x]$  の根であるとき,  $L/K$  を 代数的拡大 と呼ぶ.
  - (4) 体の拡大  $L/K$  について,  $[L:K] < \infty$  のとき, これを 有限次拡大 と呼ぶ.
  - (5) 体  $K$  が体  $M$  の部分体で,  $M$  が体  $L$  の部分体であるとき,  $M$  を  $L/K$  の 中間体 と呼ぶ.
  - (6) 体  $L$  とその部分体  $K$  および  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  に対し,  $K$  のすべての元と  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  をすべてを含む最小の体を  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  と記す. これは  $K$  に係数をもつ様な  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  の有理式の全体に他ならない.
  - (7) ある体  $L$  がその部分体  $K$  と  $\alpha \in L$  によつて, 上の記法で  $L = K(\alpha)$  と書けるとき,  $L$  は  $K$  の 単純拡大 であるといはれる.
  - (8) 2つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体  $K$  についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを 素体 と呼ぶ. 素体は有理数体  $\mathbb{Q}$  か  $p$  元体  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $p$  は素数) に同型である.
  - (9) 体  $K$  の體に関する単位元  $1$  をいくつか加へて  $0$  になるとき, その最小の個数は  $K$  の 標数 といはれ, それは素数である.  $1$  をいくつ加へても  $0$  にならない場合は, 標数は  $0$  であるといふ.  $K$  標数を  $\text{char } K$  と記す. 前者の場合は素体が  $\mathbb{F}_p$  であり, 後者の場合の素体は  $\mathbb{Q}$  である.
  - (10) 拡大  $L/K$  と  $\alpha \in L$  について,  $\alpha$  を根とし, 最高次係数が  $1$  であり, 次数が最小な多項式  $f(x) \in K[x]$  が唯一つ存在し, それを  $\alpha$  の 最小多項式 と呼んで  $\text{irr}(\alpha, K, x)$  で表す.
  - (11) 拡大  $L/K$  と中間体  $M_1, M_2$  について,  $M_1$  と  $M_2$  を含む最小の部分体を  $M_1 M_2$  または  $M_2 M_1$  と書いて,  $M_1$  と  $M_2$  の 合成体 と呼ぶ. また, 拡大  $M_1 M_2 / M_1$  を拡大  $M_2 / K$  の  $M_1$  による 持ち上げ と呼ぶ.
  - (12) 体  $K$  を含む体  $\Omega$  上に代数的拡大が存在しないとき,  $\Omega$  は 代数的閉体 といはれ, さらに  $\Omega/K$  が代数的拡大であるならば  $\Omega$  は  $K$  の 代数的閉包 といはれる. 任意の体  $K$  に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に  $\bar{K}$  と記す.
  - (13) 多項式  $f(x) \in K[x]$  のすべての根で  $K$  上される様な体を  $f(x)$  の 最小分解体 といふ.
  - (14) 拡大  $L/K$  が, どんな既約多項式  $f(x) \in K[x]$  も  $L$  内に1つ根を持てば,  $f(x)$  が  $L$  上1次式のみ積に分解する, といふ性質を持つとき,  $L/K$  は 正規拡大 であるといはれる.
  - (15) 多項式  $f(x) \in K[x]$  が重根を持たないとき,  $f(x)$  は 分離的 であるといはれる. 拡大  $L/K$  において,  $\alpha \in L$  が  $K$  上の分離的多項式の根であるとき  $\alpha$  は  $K$  上分離的であるといはれ, さらに, すべての  $\alpha \in L$  が  $K$  上分離的であるとき,  $L/K$  を 分離的拡大 と称する.
  - (16) あらゆる代数的拡大  $L/K$  が分離的である様な体  $K$  は 完全体 であると呼ばれる. 標数が  $0$  である体や有限体は完全体である.
  - (17) 代数的拡大  $L/K$  について,  $L$  から  $\bar{K}$  への中への  $K$  上の同型の個数を  $[L:K]_s$  と記す.  $\text{char } K = p > 0$  のとき, これは  $p$  の冪になる.
  - (18) 分離的拡大は単純拡大である.
  - (19) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.
  - (20) 有限次 Galois 拡大  $L/K$  とその Galois 群  $G = \text{Gal}(L/K)$  について,  $\mathcal{H}(L/K)$  を  $L/K$  の中間体の全体,  $\mathcal{G}(G)$  を  $G$  の部分群の全体とせよ. 各  $H \in \mathcal{G}(G)$  に対し  $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^g = \alpha (\forall g \in H)\}$ , 各  $M \in \mathcal{H}(L/K)$  に対し  $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^g = \alpha (\forall \alpha \in M)\}$  と記す. このとき  $G^M = \text{Gal}(L/M)$  である.
  - (21) Galois の基本定理 1
- (20) の状況下で,  $\varphi: H \rightarrow L^H$  は  $\mathcal{G}(G)$  から  $\mathcal{H}(L/K)$  への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は  $\varphi^{-1}(M) = G^M$  で与へられる.