実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/10	有	なし	90 分	代 数 学 5　月曜 1 時限, 教科書：Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 教科書はもちろん, 本問題用紙以外のものを見てはいけない.
注意 3. 裏面は使用してはならない. 各問題用紙の表面に収まる様に答案を作成せよ.
注意 4. あなた 1 人だけの静寂な環境で解答を作成すること.
注意 5. その他, “Class room” に記した注意を守ること.

1 (10 点) p を素数とし, K は標数 p の体とする. 任意の元 $a, b \in K$ に対し, 次が成り立つことを示せ.

(1) $(a+b)^p = a^p + b^p$.

(2) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ について $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.

実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

2 (10 点) 体の拡大 L/K があり, $\alpha, \beta \in L$ とせよ.
$[K(\alpha):K] = m$, $[K(\beta):K] = n$, $\gcd(m,n) = 1$ ならば, $[K(\alpha,\beta):K] = mn$ であることを示せ.

実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
3/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{3}}$ (10 点) $f(x) = x^3 + x^2 + 2$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である. これの根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ. このとき, $\alpha^2 + 3$ の逆数を α の 2 次以下の多項式で表せ.

実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
4/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

4 (10 点) 代数的拡大 L/K に対し, $L \supset R \supset K$ なる環 R は体であることを示せ.
但し, R の演算は L で定義されてゐる演算によるものとする.

実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
5/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 次の体の間の包含関係を Hasse 図で示せ.

$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i)$ （最後の括弧内は $\sqrt[3]{2}$ と $\sqrt{3}$ と i の積）.

また, 隣接する体の間の拡大次数も求め書き入れよ.

但し i は虚数単位で $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

実施 : 2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
6/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書 : Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

6 (15 点) 代数的拡大 L/K とその 2 つの真の部分体 M_1, M_2 で, 次の (1) と (2) をともに満たす様な例を挙げよ :

(1) M_1 と M_2 には互ひに包含関係がない;

(2) $[\,M_1M_2 : M_1\,] < [\,M_2 : M_1 \cap M_2\,]$.

実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前 期 中 間 試 験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試 験 科 目 名	出 題 者
7/10	有	なし	90 分	代 数 学 5 月曜 1 時限, 教科書： Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) 体の同型について, 以下の問に答へよ.

(1) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)$ の自己同型をすべて求めよ.

(2) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)$ から $\mathbb{C}$ への中への同型をすべて求めよ.

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
8/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

8 (10 点) α, β を体 K 上代数的な元であるとし, $f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K, x)$ とおく. いま

$$f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x)$$

が成り立つてゐると仮定する. また, $\deg f(x) = m$, $\deg g(x) = n$ とする. このとき $[K(\alpha, \beta) : K] = mn$ であるといへるか, 理由を付けて答へよ.

実施：2020 年 12 月 14 日 (月) 7:00 配信開始, 12:30 までに提出, 試験場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
9/10	有	なし	90 分	代数学 5 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

9 (10 点) 体の拡大 L/K があり, M をその中間体とせよ. $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとせよ. このとき $[\,M(\alpha) : M\,] \leq [\,K(\alpha) : K\,]$ であることを示せ.

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の<u>部分体</u>, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を<u>体の拡大</u> L/K と記す.

(2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.

(3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を<u>代数的拡大</u>と呼ぶ.

(4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを<u>有限次拡大</u>と呼ぶ.

(5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の<u>中間体</u>と呼ぶ.

(6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.

(7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の<u>単純拡大</u>であるといはれる.

(8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを<u>素体</u>と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.

(9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の<u>標数</u>といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\mathrm{char}\, K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.

(10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の<u>最小多項式</u>と呼んで $\mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$ で表す.

(11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の<u>合成体</u>と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による<u>持ち上げ</u>と呼ぶ.

(12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は<u>代数的閉体</u>といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の<u>代数的閉包</u>といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.