実施：2024 年 1 月 15 日 (月) 9:10-10:40, E-601 室

2023 年度　**後 期　定 期 試 験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評　点
/120

集計後に満点を 100 点に換算

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試 験 科 目 名	クラス	出 題 者
2	有	なし	80 分	代 数 学 5　月曜 1 時限, 教科書：Original　(§§1 − 11)	A, B	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.　**注意** 2. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 3. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.　**注意** 4. **8** は選択問題である. **8a** **8b** のどちらかを選んで解答せよ.
注意 5. i は虚数単位を表し, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ である. これらの記号は自由に使ってよい.

1 (10 点)　K は標数 $p>0$ の体とする. (従って p は素数である.)
任意の元 $a,\, b,\, c \in K$ に対し, 次が成り立つことを示せ.　**3.3**(3)

(1)　$(a+b)^p = a^p + b^p$.

(2)　$(a+b+c)^p = a^p + b^p + c^p$.

2 (10 点)　$f(x) = x^3 + 4x^2 + 3$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である. これの根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ. このとき, K における α^2+3 の逆数を α の $\mathbb{F}_5$ 上の 2 次以下の多項式で表せ.　**4.13 の類題**

3 (10 点)　次の体の間の包含関係を Hasse 図で示せ.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$,　$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2},\, i)$,　$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}\,i\,)$,　$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,)$,
$\mathbb{Q}$,　$\mathbb{Q}(i+\sqrt{2}\,)$,　$\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,i\,)$.

さらに, 隣接する体の間の拡大次数も書き入れよ.
説明も可能な限り記入せよ.　**2.9**, **5.20** の類題

4 (10 点)　体の拡大 L/K があり, M をその中間体とせよ. $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとせよ. このとき $[\,M(\alpha) : M\,] \leqq [\,K(\alpha) : K\,]$ であることを示せ.　**5.21**

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

5 (10 点)　体の拡大 L/K と $\alpha,\ \beta \in L$ について, $[\,K(\alpha):K\,] = m$, $[\,K(\beta):K\,] = n$, $\gcd(m,\,n) = 1$ とせよ. このとき

$$[\,K(\alpha,\,\beta):K\,] = mn$$

であることを示せ. **5.23, 7.6**

6 (10 点) 次の体の合成体をできるだけ簡単な形で求め, その $\mathbb{Q}$ 上の基底と $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}\,)$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}\,)$　　(2) $\mathbb{Q}(i)$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\,i\,)$ **7.3** の類題

7 (10 点) 代数的拡大 L/K とそれの互ひに包含関係がない 2 つの真の部分体 $M_1,\,M_2$ で次の様な例を挙げよ. 説明も付けること. **7.5**

(1) $[\,M_1M_2:M_1\,] < [\,M_2:K\,]$ かつ $[\,M_1M_2:M_1\,] = [\,M_2:M_1\cap M_2\,]$

(2) $[\,M_1M_2:M_1\,] < [\,M_2:M_1\cap M_2\,]$.

8a (10 点)　体の同型について, 以下の問に答へよ. **9.1**(3)(4)(5) の類題

(1) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\,)$ の自己同型をすべて求めよ.

(2) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}\,)$ から $\mathbb{C}$ への中への同型をすべて求めよ.

8b (10 点)　t を不定元とする. $\varphi:\mathbb{F}_3(t)\longrightarrow\mathbb{F}_3(t)$, $\varphi(\alpha)=\alpha^3$ は中への同型であることを示せ. また, この写像の像の体を記せ. **9.10** の類題

学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名

9 (10 点) 体の拡大 L/K があり, $\alpha, \beta \in L$ は K 上代数的とせよ.
$\mathrm{irr}\,(\alpha, K, x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K(\beta), x) \iff \mathrm{irr}\,(\beta, K, x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K(\alpha), x)$
を示せ.

9.11(1)

10 (10 点) 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について, $f(x)$ の最小分解体とその $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ. 最小分解体はできるだけ簡潔な表示を求む.

(1) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 5$. (2) $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - x + 1)$.

(3) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 4$.

10.4 の類題

11 (10 点) 次の拡大は正規拡大であるか否か.
それぞれ理由を付けて答へよ.

11.10 の類題

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$

12 (10 点) t を不定元とする. 次の拡大は正規拡大であるか否か.
それぞれ理由を付けて答へよ. (Hint : ${\mathbb{F}_7}^{\times} = \langle 3 \rangle$)

11.11 の類題

(1) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^7)$ (2) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^6)$ (3) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^4)$

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体.　$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を体の拡大 L/K と記す.

(2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K]=[L:M][M:K]$.

(3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を代数的拡大と呼ぶ.

(4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを有限次拡大と呼ぶ.

(5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の中間体と呼ぶ.

(6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.

(7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の単純拡大であるといはれる.

(8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.

(9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の標数といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\operatorname{char} K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.

(10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の最小多項式と呼んで $\operatorname{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.

(11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の合成体と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.

(12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は代数的閉体といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の代数的閉包といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.

(13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の最小分解体といふ.

(14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, といふ性質を持つとき, L/K は正規拡大であるといはれる.

(15) 正規拡大の " 底上げ "（$L \supset M \supset K$ についての L/K の主張を L/M に乗り換へること）や持ち上げは正規拡大である.
また K 上の 2 つの正規拡大の合成体はまた K 上の正規拡大である.

以上が「代数学 5」の範囲.

(16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は分離的であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上分離的であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を分離的拡大と称する.

(17) 分離的拡大の持ち上げは分離的拡大である. また K 上の 2 つの分離的拡大の合成体はまた K 上の分離的拡大である.

(18) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は完全体と呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.

(19) 代数的拡大 L/K について, L から $\overline{K}(\supset L)$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す.
さらに $[L:K]_i = [L:K]/[L:K]_s$ と記す. $\operatorname{char} K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.

(20) 代数的拡大 L/K について, K 上分離的な L の元の全体は体をなし, それは $K^{s,L}$ と記される.
$[L:K]_s = [K^{s,L}:K]$ が成り立つ.

(21) 分離的拡大は単純拡大である.

(22) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.

(23) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ について, $\mathscr{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathscr{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathscr{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^\sigma = \alpha\ (\forall \sigma \in H)\}$, 各 $M \in \mathscr{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \mid \alpha^\sigma = \alpha\,(\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \operatorname{Gal}(L/M)$ である.

(24) Galois の基本定理 1
(23) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathscr{G}(G)$ から $\mathscr{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.

(25) Galois の基本定理 2
(23) の状況下で, $M \in \mathscr{F}(L/K)$ について次が成り立つ.
(1) $\tau \in \operatorname{Gal}(L/K)$ に対し, $\tau \operatorname{Gal}(L/M)\tau^{-1} = \operatorname{Gal}(L/M^\tau)$.
(2) M は K の Galois 拡大 $\iff$ $\operatorname{Gal}(L/M) \triangleleft \operatorname{Gal}(L/K)$.
(3) (2) の両側が成り立つとき, $\operatorname{Gal}(M/K) \simeq \operatorname{Gal}(L/K)\,/\operatorname{Gal}(L/M)$ (群としての同型).

(26) Galois 群が巡回群である様な拡大は, 巡回拡大と呼ばれる.

(27) Galois 群が Abel 群である様な拡大は, Abel 拡大と呼ばれる.

(28) 体 K 上の Abel 拡大の合成体は K 上の Abel 拡大である.

(29) 拡大 L/K の部分体 M, M' について M/K と M'/K がともに Galois 拡大であれば, MM'/K も Galois 拡大であつて, $\operatorname{Gal}(MM'/K) \simeq \operatorname{Gal}(M/M \cap M')$ が成り立つ. 左辺の σ に対して右辺の $\sigma|_M$ が対応する.