

2024年度 後期 中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点
/120

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2	有	なし	80分	代数学5 <small>月曜1時限, 教科書: Original</small> (§§1-11)	A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。

注意 2. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 3. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 4. **8** は選択問題である。**8a** **8b** のどちらかを選んで解答せよ。

注意 5. i は虚数単位を表し、 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である。これらの記号は自由に使うてよい。

1 (10点) K は標数 $p > 0$ の体とする。任意の元 $a, b \in K$ に対し、次が成り立つことを示せ。

(1) $1 \leq r \leq p-1$ のとき、2 項係数 $\binom{r}{p} (= {}_p C_r)$ は p で割り切れる。

(2) $(a+b)^p = a^p + b^p$.

(3) 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ について $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$.

3 (10点) 次の体の間の包含関係を Hasse 図で示せ。

\mathbb{Q} , $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}\sqrt{3}i)$.

但し、最後の 2 つの括弧内は $\sqrt[3]{2}$ や $\sqrt[6]{2}$ と $\sqrt{3}$ と i の積である。

さらに、隣接する体の間の 拡大次数 も書き入れよ。

説明も可能な限り記入せよ。

2 (10点) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 3$ は $\mathbb{F}_5[x]$ の既約多項式である。この根の 1 つを α とし $K = \mathbb{F}_5(\alpha)$ とせよ。このとき、 K において

$$\frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 2}$$

を α の \mathbb{F}_5 上の 2 次以下の多項式で表せ。

4 (10点) 代数的拡大 L/K に対し、 $L \supset R \supset K$ なる環 R は体であることを示せ。但し、 R の演算は L で定義されてゐる演算によるものとする。

学籍番号 (9桁)	氏名

5 (10点) 体の拡大 L/K と $\alpha, \beta \in L$ について,
 $[K(\alpha):K] = m, [K(\beta):K] = n, \gcd(m, n) = 1$
とせよ. このとき

$$[K(\alpha, \beta):K] = mn$$

であることを示せ.

6 (10点) 次の体の合成体の簡潔な表記とその \mathbb{Q} 上の基底, および \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

(2) $\mathbb{Q}(i)$ と $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}i)$

7 (10点) 代数的拡大 L/K とその互いに包含関係がない 2 つの真の部分体 M_1, M_2 で次の様な例を挙げよ. 説明も付けること.

(1) $[M_1M_2:M_1] < [M_2:K]$ かつ $[M_1M_2:M_1] = [M_2:M_1 \cap M_2]$

(2) $[M_1M_2:M_1] < [M_2:M_1 \cap M_2]$.

8a (10点) 体の同型について, 以下の間に答へよ.

(1) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ の自己同型をすべて求めよ.

(2) 体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ から \mathbb{C} への中への同型をすべて求めよ.

8b (10点) t を不定元とする. $\varphi: \mathbb{F}_3(t) \rightarrow \mathbb{F}_3(t), \varphi(\alpha) = \alpha^3$ は中への同型であることを示せ. また, この写像の像の体を記せ.

学籍番号 (9桁)	氏名

9 (10点) 体の拡大 L/K があり, $\alpha, \beta \in L$ は K 上代数的とせよ.
 $\text{irr}(\alpha, K, x) = \text{irr}(\alpha, K(\beta), x) \iff \text{irr}(\beta, K, x) = \text{irr}(\beta, K(\alpha), x)$
を示せ.

10 (10点) 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について, $f(x)$ の最小分解体とその \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めよ. 最小分解体はできるだけ簡潔な表示を求めよ.

- (1) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 10$. (2) $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$.
(3) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 4$.

11 (10点) 次の拡大は正規拡大であるか否か. それぞれ理由を付けて答へよ.

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ (2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})/\mathbb{Q}$

12 (10点) t を不定元とする. 次の拡大は正規拡大であるか否か. それぞれ理由を付けて答へよ. (Hint: $\mathbb{F}_7^\times = \langle 3 \rangle$)

- (1) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^7)$ (2) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^6)$ (3) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^3)$

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

既習事項のまとめ

- (1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の 部分体、あるいは L は K の 拡大 といひ、この状況を 体 の拡大 L/K と記す.
- (2) 体 L の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間 としての L の次元を L/K の 拡大次数 と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.
- (3) 体 L の拡大 L/K について、任意の $\alpha \in L$ が K の根であるとき、 L/K を 代数的拡大 と呼ぶ.
- (4) 体 L の拡大 L/K について、 $[L:K] < \infty$ のとき、これを 有限次拡大 と呼ぶ.
- (5) 体 K が体 M の部分体で、 M が体 L の部分体であるとき、 M を L/K の 中間体 と呼ぶ.
- (6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ に対し、 K のすべての元と $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ多項式 $a_1x + \dots + a_nx^n$ の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によって、上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき、 L は K の 単純拡大 であるといはれる.
- (8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから、どんな体 K についても、それに含まれる最小の体が存在する. それを 素体 と呼ぶ; 素体は有理数体 \mathbb{Q} か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.
- (9) 体 K の積に関する単位元 1 をいっつか加へて 0 になるとき、その最小の個数は K の 標数 といはれ、それは素数である. 1 をいっつか加へても 0 にならない場合は、標数は 0 であるといふ. K の標数を $\text{char } K$ と記す. 前者の場合は素体が \mathbb{F}_p であり、後者の場合の素体は \mathbb{Q} である.
- (10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について、 α を根とし、最高次係数が 1 であり、次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯一つ存在し、それを α の 最小多項式 と呼んで $\text{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.
- (11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について、 M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて、 M_1 と M_2 の 合成体 と呼ぶ; また、拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.
- (12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき、 Ω は 代数的閉体 といはれ、さらにもし、 Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の 代数的閉包 といはれる. 任意の体 K に対し、その代数的閉包が存在し、すべて同型である. それを一般に \bar{K} と記す.
- (13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の 最小分解体 といふ.
- (14) 拡大 L/K が、どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば、 $f(x)$ が L 上 1 次式のみ積に分解する、といふ性質を持つとき、 L/K は 正則拡大 であるといはれる.
- (15) 正則拡大の“底上げ” ($L \supset M \supset K$ についての L/K の主眼を L/M に乗り換へること) や持ち上げは正則拡大である. また K 上の 2 つの正則拡大の合成体はまた K 上の正則拡大である.

以上が「代数学 5」の範囲.

- (16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき、 $f(x)$ は 分離的 であるといはれる. 拡大 L/K において、 $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上 分離的 であるといはれ、さらに、すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき、 L/K を 分離的拡大 と称する.
- (17) 分離的拡大の持ち上げは分離的拡大である. また K 上の 2 つの分離的拡大の合成体はまた K 上の分離的拡大である.
- (18) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は 完全体 と呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.
- (19) 代数的拡大 L/K について、 L から $\bar{K}(\supset L)$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. さらに $[L:K]_1 = [L:K]/[L:K]_s$ と記す. $\text{char } K = p > 0$ のとき、これは p の冪になる.
- (20) 分離的拡大は単純拡大である.
- (21) 正則かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.
- (22) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \text{Gal}(L/K)$ について、 $\mathcal{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体、 $\mathcal{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathcal{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^g = \alpha \ (\forall g \in H)\}$; 各 $M \in \mathcal{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^g = \alpha \ (\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \text{Gal}(L/M)$ である.
- (23) Galois の基本定理 1
 (22) の状況下で、 $\varphi: H \rightarrow L^H$ は $\mathcal{G}(G)$ から $\mathcal{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり、逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.
- (24) Galois の基本定理 2
 (22) の状況下で、 $M \in \mathcal{F}(L/K)$ について次が成り立つ.
 - (1) $\tau \in \text{Gal}(L/K)$ に対し、 $\tau \text{Gal}(L/M)\tau^{-1} = \text{Gal}(L/M^\tau)$.
 - (2) M は K の Galois 拡大 $\iff \text{Gal}(L/M) \triangleleft \text{Gal}(L/K)$.
 - (3) (2) の両側が成り立つとき、 $\text{Gal}(M/K) \cong \text{Gal}(L/K)/\text{Gal}(L/M)$ (群としての同型).
- (25) Galois 群が巡回群である様な拡大は、巡回拡大 と呼ばれる.
- (26) Galois 群が Abel 群である様な拡大は、Abel 拡大 と呼ばれる.
- (27) 体 K 上の Abel 拡大の合成体は K 上の Abel 拡大である.
- (28) 拡大 L/K の部分体 M, M' について M/K と M'/K がともに Galois 拡大であれば、 MM'/K も Galois 拡大であつて、 $\text{Gal}(MM'/K) \cong \text{Gal}(M'/K) \times \text{Gal}(M/K)$ が成り立つ. 左辺の σ に対して右辺の $\sigma|_M$ が対応する.