実施：2015 年 1 月 19 日 (月) 10:50 – 12:20, 4-410 室

開講学部	評点
理工学部	

2014 年度　後期　定期試験 (問題 兼 解答用紙)

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/2	有	なし	80 分	代数学 6 月曜 2 時限, 教科書：荒川/伊吹山/金子 著「ベルヌーイ数とゼータ関数」	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	4 年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

$\left(\boxed{3} \right.$ の hint 追加：$\cot x = 2i \cdot \dfrac{e^{2ix}}{e^{2ix}-1} - i \left.\right)$

$\boxed{1}$ (15 点) B_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定義される. これに基き $\mathbb{Q}((t))$ における等式

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \qquad \cdots\cdots\cdot \ (1)$$

を証明せよ.

$\boxed{2}$ (10 点) $\mathbb{Q}[[t]]$ において $1 - t + t^2 + t^3$ の乗法に関する逆元を t^3 の項まで求めよ.

$\boxed{3}$ (15 点) $\cot x$ の $x = 0$ の周りでの Laurent 展開は

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

で与えられることを示せ. (hint : $\boxed{1}$ の (1). $B_1 = \frac{1}{2}$ 以外は $B_{奇数} = 0$)

$\boxed{4}$ (15 点) $n > 0, m > 0$ を整数とするとき, 第 2 種 Stiring 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ は共通文字のない m 個の空でない部分集合に分ける仕方の数である. $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$ を, 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ について直接計算し求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, $(x)_0 = 1$ とする.

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m$$

を証明せよ. ただし $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ は漸化式

$$\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ m \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ m-1 \end{smallmatrix}\right] + n\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$$

と, 初期値 $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 1$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ m \end{smallmatrix}\right] = 0$ $(n, m \neq 0)$ で定められる数である.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (15 点) p を素数とする. Wilson の定理

$$(p-1)! \equiv -1 \mod p$$

を証明せよ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ (15 点) 自然数 n に対して, 和 $S_j(n) = 1^j + 2^j + \cdots + n^j$ を考える. $S_4(n)$ を n の多項式で表せ. ただし,

$$S_2(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ S_3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

等は使ってよい.

(Hint : $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + \cdots + 1$ を k=1 から n まで足し上げよ.)

ここより下に記入しないで下さい.