2014 年度 **後期 模擬定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/2	有	なし	80 分	代数学 6 月曜 2 時限, 教科書：荒川/伊吹山/金子 著「ベルヌーイ数とゼータ関数」	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	3 年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

1 (15 点) B_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定義される．これに基き $\mathbb{Q}((t))$ における等式

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

を証明せよ．

2 (10 点) $\mathbb{Q}[[t]]$ において $1 - t + t^2$ の乗法に関する逆元を t^5 の項まで求めよ．

3 (15 点) **1** で証明した B_n の母函数表示を用いて $\tan x$ の $x = 0$ の周りでの冪級数展開を求めよ．

4 (15 点) $n > 0, m > 0$ を整数とするとき第 2 種 Stiring 数 $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ は n 元集合を m 個の空でない部分集合に分ける仕方の数であり, 第 1 種 Stirng 数 $\left[\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right]$ は共通文字のない m 個の巡回置換の積で表される n 次置換の個数である．Stirling 数 $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\}$ と $\left[\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right]$ を, 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ について直接計算し求めよ．

$\boxed{\textbf{5}}$ (15 点) $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, $(x)_0 = 1$ とする.

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m$$

を証明せよ. ただし $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ は漸化式

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

と, 初期値 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ $(n{,}m \neq 0)$ で定められる数である.

$\boxed{\textbf{6}}$ (15 点) Wilson の定理 $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ を示せ.

$\boxed{\textbf{7}}$ (15 点) 奇素数 p と $0 \leqq \ell \leqq p-1$ に対して, $\binom{p-1}{\ell} \equiv (-1)^{\ell} \mod p$ を証明せよ.

ここより下に記入しないで下さい.