

2015 年度 後期 定期試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代数学 6 <small>月曜 2 時限, 教科書: 荒川/伊吹山/金子 著「ベルヌーイ数とゼータ関数」</small>		A, B	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)		氏 名	
なし	理工学部	数学科	4 年				

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

(**3** の hint 追加 : $\cot x = 2i \cdot \frac{e^{2ix}}{e^{2ix} - 1} - i$)

1 (20 点) $B_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ は

$$\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される。これに基づき $\mathbb{Q}((t))$ における等式

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \quad \dots\dots\dots (1)$$

を証明せよ。

2 (10 点) $\mathbb{Q}[[t]]$ において $1 - t + t^2 + t^3$ の乗法に関する逆元を t^3 の項まで求めよ。

3 (15 点) $\cot x$ の $x = 0$ の周りでの Laurent 展開は

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

で与えられることを示せ。(hint: **1** の (1). $B_1 = \frac{1}{2}$ 以外は $B_{\text{奇数}} = 0$)

4 (15 点) $n > 0, m > 0$ を整数とするとき, 第 2 種 Stirling 数 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$ は共通文字のない m 個の空でない部分集合に分ける仕方の数である. $\left\{ \begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ を, 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ について直接計算し求めよ。

5 (20 点) $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, $(x)_0 = 1$ とする.

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} x^m$$

を証明せよ. ただし $\binom{n}{m}$ は漸化式

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + n \binom{n}{m}$$

と, 初期値 $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = \binom{0}{m} = 0$ ($n, m \neq 0$) で定められる数である.

6 (15 点) p を素数とする. Wilson の定理

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

を証明せよ.

7 (5 点) $\mathbb{Q}[[t]]$ の元 $f(t)$ は任意の $k = 1, 2, \dots$ について $f^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ であり, $f(0) = 1$ であるとする. $f(t)$ の乗法に関する逆元を $g(t)$ と書く. このとき $g(0) = 1$ かつ, 任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して $g^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ であることを証明せよ. (Hint: $g(0)$ の値は容易. 以下, Leibniz rule $(f(t)g(t))^{(k)} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} f^{(k-r)}(t)g^{(r)}(t)$ を使って帰納的に $g^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$ が示せる.)