

2015 年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代数学 6 <small>火曜 4 時限, 教科書: 荒川/伊吹山/金子 著「ベルヌーイ数とゼータ関数」</small>	A, B	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	数学科	4 年			

- 注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。  
 注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。  
 注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退場は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

( [3] の hint 追加 :  $\cot x = 2i \cdot \frac{e^{2ix}}{e^{2ix} - 1} - i$  )

[1] (15 点) Bernoulli 数  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は

$$\sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義される。これに基づき  $\mathbb{Q}((t))$  における等式

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

を証明せよ。( (右辺)  $\times (e^t - 1)$  が  $te^t$  になることを示せ。)

[3] (15 点)  $\cot x$  の  $x = 0$  の周りでの Laurent 展開は

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

で与えられることを示せ。( [1] の  $B_n$  の母関数表示を利用せよ )

[4] (15 点)  $n > 0, m > 0$  を整数とするとき, 第 2 種 Stirling 数  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\}$  は共通文字のない  $m$  個の空でない部分集合への分割の仕方の数である。  $\left\{ \begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}$  を, 集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  について直接計算し求めよ。

[2] (10 点)  $\mathbb{Q}[[t]]$  において  $1 - t + 2t^2$  の乗法に関する逆元を  $t^3$  の項まで求めよ。

5 (15 点)  $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ ,  $(x)_0 = 1$  とする.

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m$$

を証明せよ. ただし  $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$  は漸化式

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

と, 初期値  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ m \end{bmatrix} = 0$  ( $n, m \neq 0$ ) で定められる数である.

6 (15 点) Wilson の定理  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$  を示せ.

7 (15 点) 奇素数  $p$  と  $0 \leq \ell \leq p-1$  に対して,

$\binom{p-1}{\ell} \equiv (-1)^\ell \pmod{p}$  を証明せよ.

(Hint: (左辺) =  $\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-\ell)}{\ell(\ell-1)\cdots 2 \cdot 1}$  の各因数を  $\pmod{p}$  で眺める.)