実施：2017 年 1 月 10 日 (火) 13:10 – 14:40, 4-202 室

2016 年度 **後期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代数学 8 火曜 4 時限, 教科書：荒川/伊吹山/金子 著「ベルヌーイ数とゼータ関数」	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	4 年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

(**3** の hint 追加：$\cot x = 2i \cdot \dfrac{e^{2ix}}{e^{2ix}-1} - i$)

1 (15 点) Bernoulli 数 B_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ は

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

で定義される. これに基き $\mathbb{Q}((t))$ における等式

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

を証明せよ. ((右辺) $\times$ (e^t-1) が te^t になることを示せ.)

2 (10 点) $\mathbb{Q}[[t]]$ において $1+t-3t^2$ の乗法に関する逆元を t^3 の項まで求めよ.

3 (15 点) $\cot x$ の $x=0$ の周りでの Laurent 展開は

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

で与えられることを示せ. (**1** の B_n の母関数表示を利用せよ)

4 (15 点) $n>0, m>0$ を整数とするとき, 第 2 種 Stirling 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ は共通文字のない m 個の空でない部分集合への分割の仕方の数である. $\left\{ {6 \atop 4} \right\}$ を, 集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ について直接計算し求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, $(x)_0 = 1$ とする.

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m$$

を証明せよ. ただし $\left[{n \atop m}\right]$ は漸化式

$$\left[{n+1 \atop m}\right] = \left[{n \atop m-1}\right] + n\left[{n \atop m}\right]$$

と, 初期値 $\left[{0 \atop 0}\right] = 1$, $\left[{n \atop 0}\right] = \left[{0 \atop m}\right] = 0$ $(n,\, m \neq 0)$ で定められる数である.

$\boxed{\mathbf{6}}$ (15 点) Wilson の定理 $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ を示せ. 但し $p > 0$ は素数である.

$\boxed{\mathbf{7}}$ (15 点) 文字 t に関する $\mathbb{Q}$ 上の冪級数環 $\mathbb{Q}[[t]]$ において,

$$\sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \end{Bmatrix} = (-1)^m \delta_{m,n} \quad (m,\ n \geq 0)$$

$$\frac{(-\log(1-t))^\ell}{\ell!} = \sum_{n=\ell}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} \quad (\ell \geq 0)$$

を利用して等式 $e^{\log(1+t)} - 1 = t$ を証明せよ.