実施：2017 年 1 月 10 日 (火) 13:10 – 14:40, 4-202 室

2016 年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代数学 8 火曜 4 時限, 教科書：荒川/伊吹山/金子 著「ベルヌーイ数とゼータ関数」	A, B	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	4 年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

($\boxed{3}$ の hint 追加：$\cot x = 2i \cdot \dfrac{e^{2ix}}{e^{2ix}-1} - i$)

$\boxed{1}$ (15 点) Bernoulli 数 B_n $(n = 0,\,1,\,2,\,\cdots)$ は

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = k+1 \quad (k = 0,\,1,\,2,\,\cdots)$$

で定義される. これに基き $\mathbb{Q}((t))$ における等式

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

を証明せよ. ((右辺) $\times$ (e^t-1) が te^t になることを示せ.)

解答例. Text p.19 を見よ.

$\boxed{2}$ (10 点) $\mathbb{Q}[[t]]$ において $1+t-3t^2$ の乗法に関する逆元を t^3 の項まで求めよ.

解答例.

$$\frac{1}{1+t-3t^2} = \frac{1}{1-(-t+3t^2)}$$
$$= 1 + (-t+3t^2) + (-t+3t^2)^2 + (-t+3t^2)^3 + \cdots$$
$$= 1 - t + 4t^2 - 7t^3 + \cdots$$

$\boxed{3}$ (15 点) $\cot x$ の $x=0$ の周りでの Laurent 展開は

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} B_{2n} \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

で与えられることを示せ. ($\boxed{1}$ の B_n の母関数表示を利用せよ)

解答例. Text pp.21-22.

$\boxed{4}$ (15 点) $n>0,\, m>0$ を整数とするとき, 第 2 種 Stirling 数 $\left\{ {n \atop m} \right\}$ は共通文字のない m 個の空でない部分集合への分割の仕方の数である. $\left\{ {6 \atop 4} \right\}$ を, 集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ について直接計算し求めよ.

解答例.
3, 1, 1, 1 個 の分割は $\binom{6}{3} = 20$ 通り.
2, 2, 1, 1 個 の分割は $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \div 2! = 15 \times 6 \div 2 = 45$ 通り.
よって $\left\{ {6 \atop 4} \right\} = 20 + 45 = 65.$

$\boxed{5}$ (15 点) $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$, $(x)_0 = 1$ とする.

$$(x)_n = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m$$

を証明せよ. ただし $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$ は漸化式

$$\left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ m \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} n \\ m-1 \end{smallmatrix}\right] + n\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix}\right]$$

と, 初期値 $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 1$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ m \end{smallmatrix}\right] = 0$ $(n,\ m \neq 0)$ で定められる数である.

解答例. 数学的帰納法で示す.
$n = 0$ のとき
(左辺) $= (x)_0 = 1$.
(右辺) $= (-1)^0(-1)^0\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]x^0 = 1$
で正しい. また

$$\begin{aligned}
&(x)_{n+1} \\
&= (x)_n \cdot (x-n) \\
&= (x-n)(-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m \\
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^{m+1} - (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m\, n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m \\
&= (-1)^n \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} x^m - (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m\, n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m \\
&\qquad (\text{前の和で } m \text{ を } m-1 \text{ に置き換え.}) \\
&= (-1)^n \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^{m-1} \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} x^m - (-1)^n \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m\, n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} x^m \\
&\qquad (\because n \geq 1 \text{ ゆえ } \left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0,\ \left[\begin{smallmatrix} n \\ n+1 \end{smallmatrix}\right] = 0) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \left(\begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} \right) x^m \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} x^m
\end{aligned}$$

であるから, 帰納法が成立する.

$\boxed{6}$ (15 点) Wilson の定理 $(p-1)! \equiv -1 \mod p$ を示せ.
但し $p > 0$ は素数である.

解答例. 様々な証明があるので考え (調べ) てみよ.

$\boxed{7}$ (15 点) 文字 t に関する $\mathbb{Q}$ 上の冪級数環 $\mathbb{Q}[[t]]$ において,

$$\sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \end{Bmatrix} = (-1)^m \delta_{m,n} \quad (m,\ n \geq 0)$$

$$\frac{(-\log(1-t))^\ell}{\ell!} = \sum_{n=\ell}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} \quad (\ell \geq 0)$$

を利用して等式 $e^{\log(1+t)} - 1 = t$ を証明せよ.

解答例.

$$\begin{aligned}
e^{\log(1+t)} - 1 &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(\log(1+t))^\ell}{\ell!} \\
&= \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \sum_{n=\ell}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^\ell \sum_{\ell=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^n (-1)^\ell \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} \\
&\qquad (\because n \geq 1 \text{ のとき } \left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right] = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \begin{bmatrix} n \\ \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ 1 \end{Bmatrix} \\
&\qquad (\because \left[\begin{smallmatrix} \ell \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} (-1)^n \delta_{n,1} \\
&= t.
\end{aligned}$$

ここより下に記入しないで下さい.