実施：2018 年 1 月 24 日 (水) 9:10-10:40, 4-203 室

A3 size

2017 年度 **後 期 定 期 試 験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	表評点	裏評点
理工学部		

評 点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試 験 科 目 名	クラス	出 題 者
2/1	有	なし	80 分	代 数 学 6　火曜 4 時限, 教科書：Original	A, B	大 西 良 博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

注意 4. **5a** **5b**, は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.

1 (15 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ.

2 (20 点) 次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ.
但し $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ で, t は不定元とする.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})/\mathbb{Q}$　　(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)/\mathbb{Q}$　　(4) $\mathbb{F}_{13}(t)/\mathbb{F}_{13}(t^4)$

3 (20 点) 拡大次数が 2 である拡大を 2 次拡大といふ. 次の事を示せ.

(1) 2 次拡大は正規拡大である.

(2) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大列 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2})\subset\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ において, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ はともに正規拡大であるが, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ は正規拡大ではない.

4 (20 点) 群 G が可解群で $G>H$ のとき, H も可解群であることを示せ.

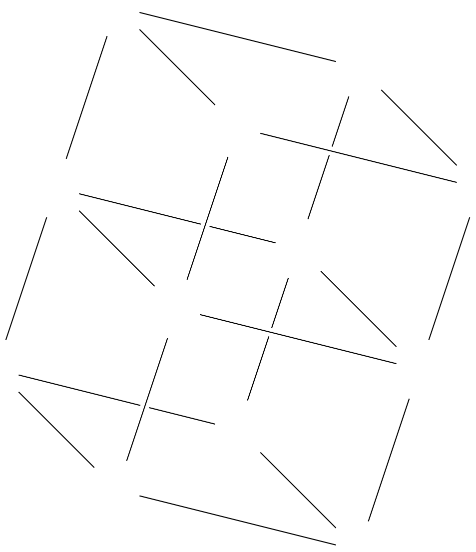
学籍番号	

$\boxed{\textbf{5a}}$ (15 点) K を x^6-8 の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とせよ. $G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とその部分群, および, それらに対応する K の部分体を求めよ.

$\boxed{\textbf{5b}}$ (15 点) $f(x)=x^3-3x+1$ とおく.

(1) $f(x)=0$ の解を $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 平方根号 $\sqrt{\ }$, 3 乗根号 $\sqrt[3]{\ }$, および四則演算のみで表せ.
(2) $f(x)$ の最小分解体を L とし $K=\mathbb{Q}(\omega)$ とおく. $\mathrm{Gal}(L/K)$ とその部分群, および, そのそれぞれに対応する中間体を図示せよ.

$\boxed{\textbf{6}}$ (15 点) p, q, r を相異なる 3 つの素数, $n=p^2qr$ とせよ. $G=\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{5^n}/\mathbb{F}_5)$ の構造を記せ. また G の部分群とそれらに対応する拡大 $\mathbb{F}_{5^n}/\mathbb{F}_5$ の中間体の様子を図示せよ.



$\boxed{\textbf{7}}$ (20 点) 下の問に答へよ. 但し

$$\alpha=\sqrt{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}},\quad \alpha_1=\sqrt{6-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}},$$
$$\alpha_2=\sqrt{6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}},\quad \alpha_3=\sqrt{6-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}.$$

(1) $\alpha\alpha_1=\sqrt{6}$, $\alpha\alpha_2=(1+\sqrt{2})\sqrt{6}$, $\alpha\alpha_3=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ であることを示せ.
(2) $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であることを示せ.
(3) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]=8$ を既知として, $G=\mathrm{Gal}\big(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}\big)$ に属する 2 つの元

$$\sigma:\alpha\longmapsto\alpha_1,\quad \tau:\alpha\longmapsto\alpha_2$$

を用いて G のすべての元とそれらの演算規則を記述せよ.
(4) (3) の記号の下で, $\{1,\sigma^2\}<G$ に Galois の基本定理で対応する部分体を求めよ.

$\boxed{\textbf{8}}$ (20 点) K を体とし, $a\in K$ について $b=1+a^2\in K$ が K の元の平方ではないとする. このとき $\mathrm{char}\,K\neq 2$ で $\mathrm{Gal}\big(K(\sqrt{b+\sqrt{b}}\,)/K\big)$ は 4 次の巡回群であることを示せ.
(Hint : $\beta=\sqrt{b+\sqrt{b}}$ とおく. $[K(\beta):K]=4$ が確かめられれば, $\beta^\sigma=-\sqrt{b-\sqrt{b}}$ なる $\mathrm{Gal}\big(K(\beta)/K\big)$ の元 σ が存在する. このとき β^{σ^2}, β^{σ^3} を調べよ.)

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体.　$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の 部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を 体の拡大 L/K と記す.
(2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.
(3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を 代数的拡大 と呼ぶ.
(4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを 有限次拡大 と呼ぶ.
(5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の 中間体 と呼ぶ.
(6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.
(7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の 単純拡大 であるといはれる.
(8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを 素体 と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.
(9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の 標数 といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\operatorname{char} K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.
(10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の 最小多項式 と呼んで $\operatorname{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.
(11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の 合成体 と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による 持ち上げ と呼ぶ.
(12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は 代数的閉体 といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の 代数的閉包 といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.
(13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の 最小分解体 といふ.
(14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, といふ性質を持つとき, L/K は 正規拡大 であるといはれる. 体 K に, 1 つの多項式 $f(x) \in K[x]$ の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大である.
(15) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は 分離的 であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上 分離的 であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を 分離的拡大 と称する.
(16) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は 完全体 であると呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.
(17) 代数的拡大 L/K について, L から $\overline{K}$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. $\operatorname{char} K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.
(18) 分離的拡大は単純拡大である.
(19) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.
(20) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ について, $\mathscr{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathscr{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathscr{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \,|\, \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \sigma \in H)\}$, 各 $M \in \mathscr{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \,|\, \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \operatorname{Gal}(L/M)$ である.
(21) Galois の基本定理 1
(20) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathscr{G}(G)$ から $\mathscr{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.
(22) 3 次方程式の解は, 恒等式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$ を使へば, 根号と四則演算のみで記述できる.
(23) 有限体の元の個数はある素数 p の冪になり, 元の個数が同じ有限体はすべて同型である. また $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m} \iff n|m$. 有限体の拡大は常に Galois 拡大であり, $\operatorname{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ は位数 n の巡回群である.
(24) 群 G について, $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{1\}$ 且つ, すべての $0 \le i \le n-1$ について G_i/G_{i+1} が Abel 群である様な部分群の列が存在するとき G を 可解群 と呼ぶ.