実施：2019 年 1 月 22 日 (火曜) 16:30-18:10, 4-203 室

A3 size

2018 年度　**後期　定期試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	表評点	裏評点
理工学部		

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80 分	代数学 6　火曜 4 時限, 教科書：Original	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.

$\boxed{1}$ (15 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5})/\mathbb{Q}$ について答へよ.
(1) この拡大を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ.
(2) また, その元の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式を求めよ.

$\boxed{2}$ (10 点) 体の拡大 L/K があり, M をその中間体とせよ. $\alpha\in L$ が K 上代数的であるとせよ. このとき $[\,M(\alpha):M\,]\le[\,K(\alpha):K\,]$ であることを示せ.

$\boxed{3}$ (15 点) 体の拡大 L/K があり, $\alpha,\beta\in L$ とせよ. $[\,K(\alpha):K\,]=m$, $[\,K(\beta):K\,]=n$, $\gcd(m,n)=1$ ならば, $[\,K(\alpha,\beta):K\,]=mn$ であることを示せ. ($\boxed{2}$ を使ふ)

$\boxed{4}$ (15 点) 拡大次数が 2 である拡大を 2 次拡大といふ. 次の事を示せ.
(1) 2 次拡大は正規拡大である.
(2) 有理数体 $\mathbb{Q}$ の拡大列 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)\subset\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)$ において, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)/\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)/\mathbb{Q}$ はともに正規拡大であるが, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}\,)/\mathbb{Q}$ は正規拡大ではない.

学籍番号	

$\boxed{5}$ (15 点) 拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上で既約でないならば $g(x)$ は $K(\alpha)$ 上で既約でないことを示せ. (Hint : $[\,K(\alpha,\beta):K\,]$ を考へよ.)

$\boxed{6}$ (15 点) 次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ.
但し $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ で, t は不定元とする.

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$　(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$　(3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$
(4) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^7)$　(5) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^3)$

$\boxed{7}$ (10 点) 次の拡大は分離的であるか否か, 理由を付けて答へよ.

(1) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^7)$　(2) $\mathbb{F}_7(t)/\mathbb{F}_7(t^3)$

$\boxed{8}$ (5 点) 下の問に答へよ. 但し

$$\alpha = \sqrt{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}, \quad \alpha_1 = \sqrt{6-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}},$$
$$\alpha_2 = \sqrt{6+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}, \quad \alpha_3 = \sqrt{6-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}$$

とし, $\alpha\alpha_1 = \sqrt{6}$, $\alpha\alpha_2 = (1+\sqrt{2})\sqrt{6}$, $\alpha\alpha_3 = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ であることを既知とする.

(1) $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大である. その理由を述べよ.

(2) $[\,\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}\,] = 8$ を既知として, $G = \mathrm{Gal}\bigl(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}\bigr)$ に属する 2 つの元
$$\sigma : \alpha \longmapsto \alpha_1, \quad \tau : \alpha \longmapsto \alpha_2$$
を考へる. $(\tau\sigma)(\alpha) = -\alpha_3$ であることを示せ.

(3) 上の (2) の記号の下で $\langle\,\tau\sigma\,\rangle < G$ に Galois の基本定理で対応する $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ の中間体を求めよ.

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体.　$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1)　体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の 部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を 体の拡大 L/K と記す.

(2)　体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.

(3)　体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を 代数的拡大 と呼ぶ.

(4)　体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを 有限次拡大 と呼ぶ.

(5)　体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の 中間体 と呼ぶ.

(6)　体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.

(7)　ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の 単純拡大 であるといはれる.

(8)　2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを 素体 と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.

(9)　体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の 標数 といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\operatorname{char} K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.

(10)　拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の 最小多項式 と呼んで $\operatorname{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.

(11)　拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の 合成体 と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による 持ち上げ と呼ぶ.

(12)　体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は 代数的閉体 といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の 代数的閉包 といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.

(13)　多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の 最小分解体 といふ.

(14)　拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, といふ性質を持つとき, L/K は 正規拡大 であるといはれる. 体 K に, 1 つの多項式 $f(x) \in K[x]$ の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大である.

(15)　多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は 分離的 であるといはれる.

(16)　拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上 分離的 であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を 分離的拡大 と称する.

(17)　代数的拡大 $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)/K$ が分離的であるためには $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ がすべて K 上分離的であることが必要十分である.

(18)　あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は 完全体 であると呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.

(19)　代数的拡大 L/K について, L から $\overline{K}$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. $\operatorname{char} K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.

(20)　分離的拡大は単純拡大である.

(21)　正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.

(22)　有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ について, $\mathscr{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathscr{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathscr{G}(G)$ に対し $L^H = \{\, \alpha \in L \mid \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \sigma \in H\,) \,\}$, 各 $M \in \mathscr{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\, \sigma \in G \mid \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \alpha \in M\,) \,\}$ と記す. このとき $G^M = \operatorname{Gal}(L/M)$ である.

(23)　Galois の基本定理 1

(22) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathscr{G}(G)$ から $\mathscr{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.

(24)　Galois の基本定理 2

有限次 Galois 拡大 L/K とその中間体 M について次が成り立つ.

(a) $\tau \in \operatorname{Gal}(L/K)$ に対し, $\tau \operatorname{Gal}(L/M)\tau^{-1} = \operatorname{Gal}(L/M^\tau)$.

(b) M は K の Galois 拡大 $\iff$ $\operatorname{Gal}(L/M) \lhd \operatorname{Gal}(L/K)$.

(c) (b) の両側が成り立つとき, $\operatorname{Gal}(M/K) \simeq \operatorname{Gal}(L/K) \,/\, \operatorname{Gal}(L/M)$ (群としての同型).