

2018年度 後期 中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	表評点	裏評点
理工学部		

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/1	有	なし	80分	代数学6 <small>火曜4時限, 教科書: Original</small>	A, B	大西良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号(9桁)	氏名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと。

1 (10点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ。

3 (15点) 体の拡大 L/K があり, $\alpha, \beta \in L$ とせよ. $[K(\alpha):K] = m, [K(\beta):K] = n,$
 $\gcd(m, n) = 1$ ならば, $[K(\alpha, \beta):K] = mn$ であることを示せ. (2 を使ふ)

2 (10点) 体の拡大 L/K があり, M をその中間体とせよ. $\alpha \in L$ が K 上代数的であるとせよ. このとき $[M(\alpha):M] \leq [K(\alpha):K]$ であることを示せ.

4 (15点) 拡大次数が 2 である拡大を 2 次拡大といふ. 次の事を示せ.
 (1) 2 次拡大は正規拡大である.
 (2) 有理数体 \mathbb{Q} の拡大列 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ において, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ はともに正規拡大であるが, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ は正規拡大ではない.

5 (15点) 拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \text{irr}(\alpha, K, x)$, $g(x) = \text{irr}(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上で既約でないならば $g(x)$ は $K(\alpha)$ 上で既約でないことを示せ. (Hint: $[K(\alpha, \beta) : K]$ を考へよ.)

7 (5点) M, M' が代数的拡大 L/K の中間体であるとき, 次のことを示せ. M/K が分離的ならば, MM'/M' も分離的. (即ち, 拡大の分離性は持ち上げによつて保たれる.)
(Hint: 任意の $\alpha \in MM'$ に対し, 有限個の $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in M$ が存在して, $\alpha \in M'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ となる.)

6 (15点) 次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ.

但し $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ で, t は不定元とする.

- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$
 (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ (4) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$ (5) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$

8 (15点) 代数的拡大 L/K の 2 つの真の部分体 M_1, M_2 で, 互ひに包含関係がなく, $[M_1M_2 : M_1] < [M_2 : K]$ であり, $[M_1M_2 : M_1] = [M_2 : M_1 \cap M_2]$ となる例を挙げよ.

記号

\mathbb{N} … 自然数全体, \mathbb{Z} … 整数全体のなす環, \mathbb{Q} … 有理数全体のなす体,
 \mathbb{R} … 実数全体のなす体, \mathbb{C} … 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

既習事項のまとめ

- (1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の 部分体, あるいは L は K の 拡大 といひ, この状況を 体の拡大 L/K と記す.
- (2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の 拡大次数 と呼び $[L : K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L : K] = [L : M][M : K]$.
- (3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を 代数的拡大 と呼ぶ.
- (4) 体の拡大 L/K について, $[L : K] < \infty$ のとき, これを 有限次拡大 と呼ぶ.
- (5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の 中間体 と呼ぶ.
- (6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の 単純拡大 であるといはれる.
- (8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを 素体 と呼ぶ. 素体は有理数体 \mathbb{Q} か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.
- (9) 体 K の積に関する単位元 1 をいっつかかへて 0 になるとき, その最小の個数は K の 標数 といはれ, それは素数である. 1 をいっつかへても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\text{char } K$ と記す. 前者の場合は素体が \mathbb{F}_p であり, 後者の場合の素体は \mathbb{Q} である.
- (10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯一つ存在し, それを α の 最小多項式 と呼んで $\text{ir}(\alpha, K, x)$ で表す.
- (11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を $M_1 M_2$ または $M_2 M_1$ と書いて, M_1 と M_2 の 合成体 と呼ぶ. また, 拡大 $M_1 M_2 / M_1$ を拡大 M_2 / K の M_1 による 持ち上げ と呼ぶ.
- (12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は 代数的閉体 といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の 代数的閉包 といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に \bar{K} と記す.
- (13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の 最小分解体 といふ.
- (14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみで分解する, といふ性質を持つとき L/K は 正規拡大 であるといはれる. 体 K に, 1 つの多項式 $f(x) \in K[x]$ の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大である.
- (15) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は 分離的 であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上 分離的 であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を 分離的拡大 と称する.
- (16) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は 完全体 であると呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.
- (17) 代数的拡大 L/K について, L から \bar{K} への中への K 上の同型の個数を $[L : K]_s$ と記す. $\text{char } K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.
- (18) 分離的拡大は単純拡大である.
- (19) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大 と呼ぶ.
- (20) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \text{Gal}(L/K)$ について, $\mathcal{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathcal{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathcal{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^g = \alpha \ (\forall g \in H)\}$, 各 $M \in \mathcal{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^g = \alpha \ (\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \text{Gal}(L/M)$ である.
- (21) Galois の基本定理 1
(20) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathcal{G}(G)$ から $\mathcal{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与えられる.
- (22) 3 次方程式の解は, 恒等式 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + y\omega + z\omega^2)(x + y\omega^2 + z\omega)$ を使へば, 根号と四則演算のみで記述できる.
- (23) 有限体の元の個数はある素数 p の冪になり, 元の個数が同じ有限体はすべて同型である. また $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m} \iff n \mid m$. 有限体の拡大は常に Galois 拡大であり, $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^m} / \mathbb{F}_{p^n})$ は位数 n の巡回群である.