

2019 年度 後期 中間試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点 1	評点 2
理工学部		

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/3	有	なし	80分	代数学 6 <small>水曜 3 時限, 教科書: Original</small>	A, B	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏 名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。  
 注意 3. 試験場の静粛を保つために、退場は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 2. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。

**1** (10 点) 拡大  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$  を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ。  
**13.2**

**3** (15 点) 拡大次数が 2 である拡大を 2 次拡大 といふ。次の事を示せ。  
 (1) 2 次拡大は正規拡大である。  
 (2) 体の拡大列  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$  において、 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$  はともに正規拡大であるが、 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$  は正規拡大ではない。  
**11.7**

**2** (10 点)  $\mathbb{F}_5(t)$  の部分体  $K = \mathbb{F}_5(t^5)$  を考へる。  
 (1)  $f(x) = \text{irr}(t+1, K, x)$ ,  $g(x) = \text{irr}(t^2+t+1, K, x)$  を求めよ。  
 (2)  $g(x)$  の 1 つの根を  $\alpha$  とし,  $L = K(\alpha)$  とおく.  $[L:K]_s$  はいくらか。  
**12.22**

**4** (15 点) 次の多項式  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$  について,  $f(x)$  の最小分解体とその  $\mathbb{Q}$  上の拡大次数を求めよ。  
 (1)  $f(x) = x^3 - 8$ . (2)  $f(x) = x^4 - 5x^2 - 6$ . (3)  $f(x) = x^5 - 1$ .  
**10.5**

学籍番号 (9桁)	氏名

5 (15点) 拡大  $L/K$  の 2 元  $\alpha, \beta$  は  $K$  上代数的であるとせよ.  
 $f(x) = \text{irr}(\alpha, K, x), g(x) = \text{irr}(\beta, K, x)$  とおく. このとき  $f(x)$  が  $K(\beta)$  上  
 で既約でないならば  $g(x)$  は  $K(\alpha)$  上で既約でないことを示せ.  
 (Hint:  $[K(\alpha, \beta) : K]$  を考へよ.) 10.6

7 (5点)  $t$  を不定元とし,  $L = \mathbb{F}_5(t)$  とする.  $t \in L$  と, 次に挙げる部分体  
 $K \subset L$  について  $\text{irr}(t, K, x)$  とその  $L$  上での因数分解を求めよ. 12.15 改  
 (1)  $K = \mathbb{F}_5(t^3)$       (2)  $K = \mathbb{F}_5(t^4)$       (3)  $K = \mathbb{F}_5(t^5)$

6 (15点) 次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ.  
 但し  $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$  で,  $t$  は不定元とする. 11.11  
 (1)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$       (2)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$       (3)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$   
 (4)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$       (5)  $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$

8 (15点)  $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$  (但し  $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ) と  $K = \mathbb{Q}$  について,  
 (1)  $L/K$  が Galois 拡大であることを示せ.  
 (2) 以下  $G = \text{Gal}(L/K)$  とおく.  $G$  の要素をすべて記述せよ.  
 (3)  $M_0 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}), M_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega), M_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega^2)$  について  
 $G^{M_0}, G^{M_1}, G^{M_2}$  を求めよ.  
 (4)  $\sigma \in G$  を  $\sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega, \omega \mapsto \omega$  で定まる元とし,  $H$  を  $\sigma$  で生成さ  
 れる  $G$  の部分群とせよ:  $H = \langle \sigma \rangle$ . このとき  $L^H$  を求めよ.  
 (Hint:  $L/K$  の基底として  $\{\omega, \omega^2, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}\omega^2, \sqrt[3]{2}^2\omega, \sqrt[3]{2}^2\omega^2\}$  が取れることを  
 利用せよ.)  
 (5)  $\tau \in G$  を  $\sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}, \omega \mapsto \omega^2$  で定まる元とし,  $D$  を  $\tau$  で生成され  
 る  $G$  の部分群とせよ:  $D = \langle \tau \rangle$ . このとき  $L^D$  を求めよ.  
 (Hint:  $L/K$  の基底として  $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2, \omega, \sqrt[3]{2}\omega, \sqrt[3]{2}^2\omega\}$  が取れることを利用せ  
 よ.) 15.7

学籍番号 (9桁)	氏名

## 記号

$\mathbb{N} \dots$  自然数全体,  $\mathbb{Z} \dots$  整数全体のなす環,  $\mathbb{Q} \dots$  有理数全体のなす体,  
 $\mathbb{R} \dots$  実数全体のなす体,  $\mathbb{C} \dots$  複素数全体のなす体.  $\omega = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ .

## 練習事項のまとめ

- (1) 体  $L$  の部分集合  $K$  が  $L$  の演算に関して体であるとき,  $K$  を  $L$  の部分体. あるいは  $L$  は  $K$  の拡大といひ, この状況を体の拡大  $L/K$  と記す.
- (2) 体の拡大  $L/K$  に対して  $K$  上の vector 空間としての  $L$  の次元を  $L/K$  の拡大次数と呼び  $[L:K]$  で表す. 3 つの体  $K \subset M \subset L$  について  $[L:K] = [L:M][M:K]$ .
- (3) 体の拡大  $L/K$  について, 任意の  $\alpha \in L$  がある  $f(x) \in K[x]$  の根であるとき,  $L/K$  を代数的拡大と呼ぶ. 体の拡大  $L/K$  について,  $[L:K] < \infty$  のとき, これを有限次拡大と呼ぶ.
- (4) 体  $K$  が体  $M$  の部分体で,  $M$  が体  $L$  の部分体であるとき,  $M$  を  $L/K$  の中間体と呼ぶ.
- (5) 体  $L$  とその部分体  $K$  および  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  に対し,  $K$  のすべての元と  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  をすべてを含む最小の体を  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  と記す. これは  $K$  に係数をもつ様な  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体  $L$  がその部分体  $K$  と  $\alpha \in L$  によつて, 上の記法で  $L = K(\alpha)$  と書けるとき,  $L$  は  $K$  の単純拡大であるといはれる.
- (8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体  $K$  についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体  $\mathbb{Q}$  か  $p$  元体  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $p$  は素数) に同型である.
- (9) 体  $K$  の積に関する単位元  $1$  をいくつか加へて  $0$  になるとき, その最小の個数は  $K$  の標数といはれ, それは素数である.  $1$  をいくつか加へても  $0$  にならない場合は, 標数は  $0$  であるといふ.  $K$  標数を  $\text{char } K$  と記す. 前者の場合は素体が  $\mathbb{F}_p$  であり, 後者の場合の素体は  $\mathbb{Q}$  である.
- (10) 拡大  $L/K$  と  $\alpha \in L$  について,  $\alpha$  を根とし, 最高次係数が  $1$  であり, 次数が最小な多項式  $f(x) \in K[x]$  が唯一つ存在し, それを  $\alpha$  の最小多項式と呼んで  $\text{irr}(\alpha, K, x)$  で表す.
- (11) 拡大  $L/K$  と中間体  $M_1, M_2$  について,  $M_1$  と  $M_2$  を含む最小の部分体を  $M_1 M_2$  または  $M_2 M_1$  と書いて,  $M_1$  と  $M_2$  の合成体と呼ぶ. また, 拡大  $M_1 M_2 / M_1$  を拡大  $M_2 / K$  の  $M_1$  による持ち上げと呼ぶ.
- (12) 体  $K$  を含む体  $\Omega$  上に代数的拡大が存在しないとき,  $\Omega$  は代数的閉体といはれ, さらにもし,  $\Omega/K$  が代数的拡大であるならば  $\Omega$  は  $K$  の代数的閉包といはれる. 任意の体  $K$  に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に  $\bar{K}$  と記す.
- (13) 多項式  $f(x) \in K[x]$  のすべての根で  $K$  上される様な体を  $f(x)$  の最小分解体といふ.
- (14) 拡大  $L/K$  が, どんな既約多項式  $f(x) \in K[x]$  も  $L$  内に 1 つ根を持てば,  $f(x)$  が  $L$  上 1 次式のみで分解する, といふ性質を持つとき,  $L/K$  は正規拡大であるといはれる. 体  $K$  に, 1 つの多項式  $f(x) \in K[x]$  の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大である.
- (15) 多項式  $f(x) \in K[x]$  が重根を持たないとき,  $f(x)$  は分離的であるといはれる. 拡大  $L/K$  において,  $\alpha \in L$  が  $K$  上の分離的多項式の根であるとき  $\alpha$  は  $K$  上分離的であるといはれ, さらに, すべての  $\alpha \in L$  が  $K$  上分離的であるとき,  $L/K$  を分離的拡大と称する.
- (16) あらゆる代数的拡大  $L/K$  が分離的である様な体  $K$  は完全体であると呼ばれる. 標数が  $0$  である体や有限体は完全体である.
- (17) 代数的拡大  $L/K$  について,  $L$  から  $\bar{K}(\supset L)$  への中への  $K$  上の同型の個数を  $[L:K]_s$  と記す. さらに  $[L:K]_s = [L:K]/[L:K]_s$  と記す.  $\text{char } K = p > 0$  のとき, これは  $p$  の冪になる.
- (18) 分離的拡大は単純拡大である.
- (19) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.
- (20) 有限次 Galois 拡大  $L/K$  とその Galois 群  $G = \text{Gal}(L/K)$  について,  $\mathcal{F}(L/K)$  を  $L/K$  の中間体の全体  $\mathcal{G}(G)$  を  $G$  の部分群の全体とせよ. 各  $H \in \mathcal{G}(G)$  に対し  $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^g = \alpha \ (\forall g \in H)\}$ , 各  $M \in \mathcal{F}(L/K)$  に対し  $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^g = \alpha \ (\forall \alpha \in M)\}$  と記す. このとき  $G^M = \text{Gal}(L/M)$  である.
- (21) Galois の基本定理 1  
 (20) の状況下で,  $\varphi: H \mapsto L^H$  は  $\mathcal{G}(G)$  から  $\mathcal{F}(L/K)$  への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は  $\varphi^{-1}(M) = G^M$  で与へられる.  
 (22) 3 次方程式の解は, 恒等式  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$  を使へば, 根号と四則演算のみで記述できる.  
 (23) 有限体の元の個数はある素数  $p$  の冪になり, 元の個数が同じ有限体はすべて同型である. また  $\mathbb{F}_{p^n} \subset \mathbb{F}_{p^m} \iff n \mid m$ . 有限体の拡大は常に Galois 拡大であり,  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_{p^n})$  は位数  $n$  の巡回群である.