実施：2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

開講学部	評点小計
理工学部	

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
1/9	有	なし	90 分	代数学 6　月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏　名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 教科書はもちろん, 本問題用紙以外のものを見てはいけない.
注意 3. 裏面は使用してはならない. 各問題用紙の表面に収まる様に答案を作成せよ.
注意 4. あなた 1 人だけの静寂な環境で解答を作成すること.
注意 5. その他, "Class room" に記した注意を守ること.

$\boxed{\mathbf{1}}$ (10 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})/\mathbb{Q}$ を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ.

開講学部	評点小計
理工学部	

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
2/9	有	なし	90 分	代数学 6 月曜 1 時限, 教科書 : Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{2}}$ (10 点) $\mathbb{F}_5(t)$ の部分体 $K = \mathbb{F}_5(t^5)$ を考へる.

(1) $f(x) = \mathrm{irr}\,(t+1, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(t^2+t+1, K, x)$ を求めよ.

(2) $g(x)$ の 1 つの根を α とし, $L = K(\alpha)$ とおく. $[L:K]_s$ はいくらか.

実施：2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
3/9	有	なし	90 分	代数学 6 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{3}}$ (10 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}\,\omega)/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるか否かを理由を付して答へよ. （$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega)/\mathbb{Q}$ ではないことに注意.）

実施：2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
4/9	有	なし	90 分	代数学 6 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

4 (15 点) 次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について, $f(x)$ の最小分解体とその $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ. 最小分解体はできるだけ簡潔な表示を求む.

(1) $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$. (2) $f(x) = x^4 + 7x^2 + 12$. (3) $f(x) = x^5 - 1$.

実施：2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

開講学部	評点小計
理工学部	

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
5/9	有	なし	90 分	代数学 6 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{5}}$ (15 点) 拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上で既約でないならば $g(x)$ は $K(\alpha)$ 上で既約でないことを示せ.

(Hint：$[\,K(\alpha, \beta) : K\,]$ を考へよ.)

実施 : 2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
6/9	有	なし	90 分	代 数 学 6 月曜 1 時限, 教科書 : Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏 名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{6}}$ (10 点) 次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ．但し $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ で, t は不定元とする．

(1) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ (3) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ (4) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)/\mathbb{Q}$ (5) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$

実施 : 2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
7/9	有	なし	90 分	代 数 学 6 月曜 1 時限, 教科書 : Original	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏 名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{7}}$ (10 点) t を不定元とし, $L = \mathbb{F}_5(t)$ とする. $t \in L$ と, 次に挙げる部分体 $K \subset L$ について $\mathrm{irr}\,(t, K, x)$ とその L 上での因数分解を求めよ.

(1) $K = \mathbb{F}_5(t^3)$ (2) $K = \mathbb{F}_5(t^4)$ (3) $K = \mathbb{F}_5(t^5)$

実施：2020 年 12 月 16 日 (水) 7:00 配信, 提出期限は 20 日 (日) 23:59, 場所 自宅 等

2020 年度 **前期 中間試験** (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	出題者
8/9	有	なし	90 分	代数学 6 月曜 1 時限, 教科書：Original	大西 良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9 桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

$\boxed{\mathbf{8}}$ (10 点) $L=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\omega)$ (但し $\omega=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$) と $K=\mathbb{Q}$ について,

(1) L/K が Galois 拡大であることを示せ.

(2) 以下 $G=\mathrm{Gal}(L/K)$ とおく. G の要素をすべて記述せよ.

(3) $M_0=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,)$, $M_1=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega\,)$, $M_2=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega^2\,)$ について
G^{M_0}, G^{M_1}, G^{M_2} を求めよ.

(4) $\sigma\in G$ を $\sqrt[3]{2}\longmapsto\sqrt[3]{2}\omega,\ \omega\longmapsto\omega$ で定まる元とし, H を σ で生成される G の部分群とせよ : $H=\langle\sigma\rangle$.
このとき L^H を求めよ. (Hint : L/K の基底として $\{\omega,\omega^2,\ \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega^2,\ \sqrt[3]{2}^2\omega,\ \sqrt[3]{2}^2\omega^2\}$ が取れることを利用せよ.)

(5) $\tau\in G$ を $\sqrt[3]{2}\longmapsto\sqrt[3]{2},\ \omega\longmapsto\omega^2$ で定まる元とし, D を τ で生成される G の部分群とせよ : $D=\langle\tau\rangle$.
このとき L^D を求めよ. (Hint : L/K の基底として $\{1,\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}^2,\omega,\ \sqrt[3]{2}\omega,\ \sqrt[3]{2}^2\omega\}$ が取れることを利用せよ.)

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体.　$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を体の拡大 L/K と記す.

(2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K]=[L:M][M:K]$.

(3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を代数的拡大と呼ぶ.

(4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを有限次拡大と呼ぶ.

(5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の中間体と呼ぶ.

(6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.

(7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の単純拡大であるといはれる.

(8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.

(9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の標数といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\operatorname{char} K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.

(10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の最小多項式と呼んで $\operatorname{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.

(11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の合成体と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.

(12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は代数的閉体といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の代数的閉包といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.

(13) 体 K の拡大体であつて, 多項式 $f(x) \in K[x]$ がその上で 1 次式のみの積に分解する様な体のうち, 最小の体を K を $f(x)$ の最小分解体といふ.

(14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, といふ性質を持つとき, L/K は正規拡大であるといはれる.

(15) 正規拡大の“底上げ”や持ち上げは正規拡大である. また K 上の 2 つの正規拡大の合成体はまた K 上の正規拡大である.

(16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は分離的であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上分離的であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を分離的拡大と称する.

(17) 分離的拡大の持ち上げは分離的拡大である. また K 上の 2 つの分離的拡大の合成体はまた K 上の分離的拡大である.

(18) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は完全体と呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.

(19) 代数的拡大 L/K について, L から $\overline{K}(\supset L)$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. さらに $[L:K]_i = [L:K]/[L:K]_s$ と記す. $\operatorname{char} K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.

(20) 分離的拡大は単純拡大である.

(21) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.

(22) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ について, $\mathscr{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathscr{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathscr{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \,|\, \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \sigma \in H)\}$, 各 $M \in \mathscr{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \,|\, \alpha^\sigma = \alpha\,(\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \operatorname{Gal}(L/M)$ である.

(23) Galois の基本定理 1
(22) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathscr{G}(G)$ から $\mathscr{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.

(24) Galois の基本定理 2
(22) の状況下で, $M \in \mathscr{F}(L/K)$ について次が成り立つ.
(1) $\tau \in \operatorname{Gal}(L/K)$ に対し, $\tau \operatorname{Gal}(L/M) \tau^{-1} = \operatorname{Gal}(L/M^\tau)$.
(2) M は K の Galois 拡大 $\iff$ $\operatorname{Gal}(L/M) \lhd \operatorname{Gal}(L/K)$.
(3) (2) の両側が成り立つとき, $\operatorname{Gal}(M/K) \simeq \operatorname{Gal}(L/K) \,/\, \operatorname{Gal}(L/M)$ (群としての同型).