実施：2021 年 12 月 24 日 (金曜) 10:50-12:20, N-102 室

B4 size

2021 年度　**後期　中間試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	表評点	裏評点
理工学部		

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2/2	有	なし	80 分	代数学 6　金曜 2 時限, 教科書：Original	A, B	大西良博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと．最終結果だけでは得点できない．

注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと．

注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする．

注意 4. **7A** **7B** は選択問題である．どちらか 1 問選んで解答せよ．

1 (10 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ．

2 (10 点) t を不定元とする．$\mathbb{F}_5(t)$ の部分体 $K = \mathbb{F}_5(t^5)$ を考へる．

(1) $f(x) = \mathrm{irr}\,(t+3, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(t^3+t+2, K, x)$ を求めよ．

(2) $g(x)$ の 1 つの根を α とし, $L = K(\alpha)$ とおく．$[L:K]_s$ はいくらか．

3 (15 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,i)/\mathbb{Q}$ は正規拡大であるか否かを理由を付して答へよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (15 点)　次の多項式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ について, $f(x)$ の最小分解体とその $\mathbb{Q}$ 上の拡大次数を求めよ. 最小分解体はできるだけ簡潔な表示を求む.

(1)　$f(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.　　(2)　$f(x) = (x^2+3)(x^2+x+1)$.

(3)　$f(x) = x^4 + 2x^2 + 4$.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{\mathbf{5}}$ (10 点)　次の代数的拡大は正規であるか否かを理由を付して答へよ. 但し $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ で, t は不定元とする.

(1)　$\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}\,\big)/\mathbb{Q}$　　(2)　$\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}\,\big)/\mathbb{Q}$　　(3)　$\mathbb{Q}\big(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,\big)/\mathbb{Q}$

(4)　$\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$　　(5)　$\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^5)$

6 (10 点)　拡大 L/K の 2 元 α, β は K 上代数的であるとせよ. $f(x) = \mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$, $g(x) = \mathrm{irr}\,(\beta, K, x)$ とおく. このとき $f(x)$ が $K(\beta)$ 上で既約であることと $g(x)$ が $K(\alpha)$ 上で既約であることは同値であることを示せ. (Hint : $[\,K(\alpha,\beta) : K\,]$ を考へよ.)

学籍番号 (9 桁)	氏　名

7A (10 点)　t を不定元とする. 体 $L = \mathbb{F}_7(t)$ の部分体 K について $\mathrm{irr}\,(t, K, x)$ とその L 上での因数分解を求めよ. (Hint : $\mathbb{F}_7{}^{\times} = \langle 3 \rangle$)

(1) $K = \mathbb{F}_7(t^3)$　　(2) $K = \mathbb{F}_7(t^6)$　　(3) $K = \mathbb{F}_7(t^7)$

7B (10 点)　t は不定元とし,

$$K = \mathbb{F}_3(t^9), \quad f(x) = x^{27} + t^9 x^{18} + t^{27} \in K[x]$$

とおく. 体 $L = \mathbb{F}_9(t)$ は $f(x)$ の K 上の最小分解体であること示せ.
但し, $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 + 2x + 2)$ とする.
また $[L : K]_s$, $[L : K]_i$, $[L : K]$ はそれぞれいくつか.

$\boxed{\mathbf{8}}$ (10 点) p を素数, $f(x) = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ とする.

(1) $f(x) = 0$ の 1 つの根を α とせよ. このとき, $\mathrm{Aut}\ \mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$ は $\alpha \mapsto \alpha + r$ $(r = 0, 1, \cdots, p-1)$ で尽されることを示せ.

(2) 多項式 $f(x)$ は $\mathbb{F}_p$ 上既約であること, および $\mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$ が Galois 拡大であることを示せ.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{\mathbf{9}}$ (10 点) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ (但し $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$) と $K = \mathbb{Q}$ について,

(1) L/K が Galois 拡大であることを示せ.

(2) 以下 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とおく. G の要素をすべて記述せよ.

(3) $M_0 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,)$, $M_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega)$, $M_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\,\omega^2)$ について $G^{M_0}, G^{M_1}, G^{M_2}$ を求めよ.

(4) $\sigma \in G$ を $\sqrt[3]{2} \longmapsto \sqrt[3]{2}\,\omega$, $\omega \longmapsto \omega$ で定まる元とし, H を σ で生成される G の部分群とせよ : $H = \langle \sigma \rangle$.
このとき L^H を求めよ.

(5) $\tau \in G$ を $\sqrt[3]{2} \longmapsto \sqrt[3]{2}$, $\omega \longmapsto \omega^2$ で定まる元とし, D を τ で生成される G の部分群とせよ : $D = \langle \tau \rangle$.
このとき L^D を求めよ.

記　号

$\mathbb{N}$ … 自然数全体, $\mathbb{Z}$ … 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ … 有理数全体のなす体,
$\mathbb{R}$ … 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ … 複素数全体のなす体. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を体の拡大 L/K と記す.

(2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.

(3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を代数的拡大と呼ぶ.

(4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを有限次拡大と呼ぶ.

(5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の中間体と呼ぶ.

(6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.

(7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の単純拡大であるといはれる.

(8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.

(9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の標数といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\mathrm{char}\, K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.

(10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の最小多項式と呼んで $\mathrm{irr}\,(\alpha, K, x)$ で表す.

(11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の合成体と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.

(12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は代数的閉体といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の代数的閉包といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.

(13) 体 K 上代数的な 2 元 α, α' に対して, 次の 2 つの同値は同値であり, これらが成り立つとき, 2 元 α, α' は K 上で共役であるといはれる.
(1) $\mathrm{irr}\,(\alpha, K, x) = \mathrm{irr}\,(\alpha', K, x)$.
(2) K 上の同型 $\sigma : K(\alpha) \to K(\alpha')$ で $\alpha^\sigma = \alpha'$ となるものがある.

(14) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上される様な体を $f(x)$ の最小分解体といふ.

(15) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, といふ性質を持つとき, L/K は正規拡大であるといはれる. 体 K に, 1 つの多項式 $f(x) \in K[x]$ の根の全てを添加してできる拡大は, 正規拡大である.

(16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は分離的であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上分離的であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を分離的拡大と称する.

(17) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は完全体であると呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.

(18) 代数的拡大 L/K について, L から $\overline{K}$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す. $\mathrm{char}\, K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.

(19) 分離的拡大は単純拡大である.

(20) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.

(21) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ について, $\mathscr{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathscr{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathscr{G}(G)$ に対し $L^H = \{\, \alpha \in L \,|\, \alpha^\sigma = \alpha \ (\forall \sigma \in H\,) \}$, 各 $M \in \mathscr{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\, \sigma \in G \,|\, \alpha^\sigma = \alpha\,(\forall \alpha \in M\,) \}$ と記す. このとき $G^M = \mathrm{Gal}(L/M)$ である.

(22) Galois の基本定理 1
(21) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathscr{G}(G)$ から $\mathscr{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.

(23) Galois 群が巡回群である様な拡大は, 巡回拡大と呼ばる.

(24) Galois 群が Abel 群である様な拡大は, Abel 拡大と呼ばる.

(25) 体 K 上の Abel 拡大の合成体は K 上の Abel 拡大である.

(26) 拡大 L/K の部分体 M, M' について M/K と M'/K がともに Galois 拡大であれば, MM'/K も Galois 拡大であつて, $\mathrm{Gal}(MM'/K) \simeq \mathrm{Gal}(M/M \cap M')$ が成り立つ. 左辺の σ に対して右辺の $\sigma|_M$ が対応する.