実施：2024 年 1 月 16 日 (火曜) 14:50-16:20, N-102 室

B4 size

2023 年度　**後期　定期試験**　(問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点 1	評点 2
理工学部		

評　点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2	有	なし	80 分	代　数　学　6　火曜 4 時限, 教科書：Original　§12 ～ §16	A, B	大 西 良 博

持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号　(9 桁)	氏　　名
なし	理工学部	数学科	年		

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと. 最終結果だけでは得点できない.
注意 2. 学生証, 記名用のペン, 鉛筆またはシャープペンシル, 消しゴム以外は机の上に置かないこと.
注意 3. 試験場の静粛を保つために, 退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする.
注意 4. **6A** **6B** は選択問題である. どちらか 1 問選んで解答せよ.
注意 5. i は虚数単位で, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ である. その他の記号については計算用紙にある.

1 (10 点)　p を素数, t を不定元とせよ. 体 $\mathbb{F}_p(t)$ の上の非分離的拡大体を 1 つ挙げ, この体が完全体でないことを示せ.　**14.3**

2 (15 点)　$x^2 - x + 2 \in \mathbb{F}_5[x]$ の根の 1 つを α とし t を不定元として, $K = \mathbb{F}_5(t^5)$ とおく. 拡大 $\mathbb{F}_5(\alpha, t)/K$ について以下の問に答へよ.

(1) α^5, $\alpha + \alpha^5$, $\alpha\alpha^5$ を α の $\mathbb{F}_5$ 上の 1 次以下の多項式で表せ.

(2) $\alpha^{25} = \alpha$ であることを示せ.

(3) 最小多項式　$f(x) = \mathrm{irr}\,(t+1, K, x)$,　$g_1(x) = \mathrm{irr}\,(t+\alpha, K(t), x)$,
$g_2(x) = \mathrm{irr}\,(t+\alpha, K(\alpha), x)$,
$g(x) = \mathrm{irr}\,(t+\alpha, K, x)$　を求めよ.

(4) $[K(t+\alpha) : K]$ と $[K(t+\alpha) : K]_s$ はいくらか.　**12.29** の類題

3 (15 点)　t を不定元とする. 次の拡大は Galois 拡大であるか否か. それぞれ理由を付けて答へよ.　(**11.11**), **12.22**

(1) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^5)$　　(2) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$　　(3) $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^3)$

4 (10 点)　α を既約多項式 $x^2+2x+2 \in \mathbb{F}_3[x]$ の 1 つの根とし, $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3(\alpha)$ とする. また, t は不定元とし,

$$K = \mathbb{F}_3(t^9), \quad f(x) = x^{27} + t^9 x^{18} + t^{27} \in K[x]$$

とおく. 体 $L = \mathbb{F}_9(t)$ は $f(x)$ の K 上の最小分解体であること示せ.
さらに L における K の分離閉包 $K^{s,L}$ と $[L:K]_s$, $[L:K]_i$, $[L:K]$ を求めよ.　**12.25** の類題

学籍番号 (9 桁)	氏　　名

5 (10 点) 拡大 $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{7})/\mathbb{Q}$ を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ. **13.3**

6A (15 点) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$ と $K = \mathbb{Q}$ について, 以下の問に答へよ.

(1) L/K が Galois 拡大であることを示せ.

(2) 以下 $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ とおく. G の要素をすべて求め, 演算則がわかる様に記述せよ.

(3) $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$ について G^M を求めよ.

(4) $\rho \in G$ を $\sqrt[3]{2} \longmapsto \sqrt[3]{2}\omega^2,\ \omega \longmapsto \omega^2$ で定まる元とし, H を ρ で生成される G の部分群とせよ : $H = \langle \rho \rangle$. このとき L^H を求めよ. **15.8**

6B (15 点) p を素数, $f(x) = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ とする. $f(x) = 0$ の 1 つの根を α とする. 以下の問に答へよ. **15.14**

(1) $\mathbb{F}_p(\alpha)$ の $\mathbb{F}_p$ 上の同型 σ であつて $\sigma(\alpha) = \alpha + 1$ なるものが唯一つ存在することを示せ.

(2) $\alpha \mapsto \alpha + r$ $(r = 0,\ 1,\ \cdots,\ p-1)$ もすべて $\mathbb{F}_p(\alpha)$ の $\mathbb{F}_p$ 上の同型を与へることを示せ. さらに, $\mathrm{Aut}\ \mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$ はこれらの写像で尽くされることを示せ.

(3) 多項式 $f(x)$ は $\mathbb{F}_p$ 上既約であること, および $\mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$ が Galois 拡大であることを示せ.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏 名

$\boxed{\mathbf{7}}$ (15 点) $\zeta = \exp(2\pi i/7)$ とし, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$, $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$ とおく. 次の問に答へよ. 解答する手順は必ずしも番号順でなくてよい. 但し, 論理的整合性には十分留意せよ. $\boxed{\mathbf{15.16}}$ を改題

(1) $\operatorname{irr}(\zeta, \mathbb{Q}, x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ であることを示せ.

(2) $\operatorname{Aut} L/\mathbb{Q}$ の元 σ で $\zeta^\sigma = \zeta^3$ なるものが唯一つ存在することを示せ.

(3) (2) の σ について α^σ を α の有理式で書け.

(4) (2) の σ が $\mathbb{Q}(\alpha)$ の自己同型を与へることを示せ.

(5) $\operatorname{irr}(\alpha, \mathbb{Q}, x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ であることを示せ.

(6) $[\,L : \mathbb{Q}(\alpha)\,]$ および $[\,\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}\,]$ はいくつか.

学 籍 番 号 (9 桁)	氏　　名

$\boxed{\mathbf{8}}$ (10 点) $\zeta = \exp \dfrac{2\pi i}{12}$ とする. $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であることを示せ. さらに $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ とそのすべての部分群を記述し, および, それらに対応する $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ の中間体を求めよ. **16.13(3)**

記　号

$\mathbb{N}$ ⋯ 自然数全体, $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数全体のなす環, $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数全体のなす体, $\mathbb{F}_q$ ⋯ q 元体,
$\mathbb{R}$ ⋯ 実数全体のなす体, $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数全体のなす体. i は虚数単位. $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$.

既習事項のまとめ

(1) 体 L の部分集合 K が L の演算に関して体であるとき, K を L の部分体, あるいは L は K の拡大といひ, この状況を体の拡大 L/K と記す.

(2) 体の拡大 L/K に対して K 上の vector 空間としての L の次元を L/K の拡大次数と呼び $[L:K]$ で表す. 3 つの体 $K \subset M \subset L$ について $[L:K] = [L:M][M:K]$.

(3) 体の拡大 L/K について, 任意の $\alpha \in L$ がある $f(x) \in K[x]$ の根であるとき, L/K を代数的拡大と呼ぶ.

(4) 体の拡大 L/K について, $[L:K] < \infty$ のとき, これを有限次拡大と呼ぶ.

(5) 体 K が体 M の部分体で, M が体 L の部分体であるとき, M を L/K の中間体と呼ぶ.

(6) 体 L とその部分体 K および $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in L$ に対し, K のすべての元と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ をすべてを含む最小の体を $K(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と記す. これは K に係数をもつ様な $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の有理式の全体に他ならない.

(7) ある体 L がその部分体 K と $\alpha \in L$ によつて, 上の記法で $L = K(\alpha)$ と書けるとき, L は K の単純拡大であるといはれる.

(8) 2 つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体 K についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体 $\mathbb{Q}$ か p 元体 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p は素数) に同型である.

(9) 体 K の積に関する単位元 1 をいくつか加へて 0 になるとき, その最小の個数は K の標数といはれ, それは素数である. 1 をいくつ加へても 0 にならない場合は, 標数は 0 であるといふ. K 標数を $\operatorname{char} K$ と記す. 前者の場合は素体が $\mathbb{F}_p$ であり, 後者の場合の素体は $\mathbb{Q}$ である.

(10) 拡大 L/K と $\alpha \in L$ について, α を根とし, 最高次係数が 1 であり, 次数が最小な多項式 $f(x) = K[x]$ が唯 1 つ存在し, それを α の最小多項式と呼んで $\operatorname{irr}(\alpha, K, x)$ で表す.

(11) 拡大 L/K と中間体 M_1, M_2 について, M_1 と M_2 を含む最小の部分体を M_1M_2 または M_2M_1 と書いて, M_1 と M_2 の合成体と呼ぶ. また, 拡大 M_1M_2/M_1 を拡大 M_2/K の M_1 による持ち上げと呼ぶ.

(12) 体 K を含む体 Ω 上に代数的拡大が存在しないとき, Ω は代数的閉体といはれ, さらにもし, Ω/K が代数的拡大であるならば Ω は K の代数的閉包といはれる. 任意の体 K に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に $\overline{K}$ と記す.

(13) 多項式 $f(x) \in K[x]$ のすべての根で K 上されるる様な体を $f(x)$ の最小分解体といふ.

(14) 拡大 L/K が, どんな既約多項式 $f(x) \in K[x]$ も L 内に 1 つ根を持てば, $f(x)$ が L 上 1 次式のみの積に分解する, といふ性質を持つとき, L/K は正規拡大であるといはれる.

(15) 正規拡大の "底上げ" ($L \supset M \supset K$ についての L/K の主張を L/M に乗り換へること) や持ち上げは正規拡大である.
また K 上の 2 つの正規拡大の合成体はまた K 上の正規拡大である.

以上が「代数学 5」の範囲.

(16) 多項式 $f(x) \in K[x]$ が重根を持たないとき, $f(x)$ は分離的であるといはれる. 拡大 L/K において, $\alpha \in L$ が K 上の分離的多項式の根であるとき α は K 上分離的であるといはれ, さらに, すべての $\alpha \in L$ が K 上分離的であるとき, L/K を分離的拡大と称する.

(17) 分離的拡大の持ち上げは分離的拡大である. また K 上の 2 つの分離的拡大の合成体はまた K 上の分離的拡大である.

(18) あらゆる代数的拡大 L/K が分離的である様な体 K は完全体と呼ばれる. 標数が 0 である体や有限体は完全体である.

(19) 代数的拡大 L/K について, L から $\overline{K}(\supset L)$ への中への K 上の同型の個数を $[L:K]_s$ と記す.
さらに $[L:K]_i = [L:K]/[L:K]_s$ と記す. $\operatorname{char} K = p > 0$ のとき, これは p の冪になる.

(20) 代数的拡大 L/K について, K 上分離的な L の元の全体は体をなし, それは $K^{s,L}$ と記される.
$[L:K]_s = [K^{s,L}:K]$ が成り立つ.

(21) 分離的拡大は単純拡大である.

(22) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.

(23) 有限次 Galois 拡大 L/K とその Galois 群 $G = \operatorname{Gal}(L/K)$ について, $\mathscr{F}(L/K)$ を L/K の中間体の全体, $\mathscr{G}(G)$ を G の部分群の全体とせよ. 各 $H \in \mathscr{G}(G)$ に対し $L^H = \{\alpha \in L \,|\, \alpha^\sigma = \alpha\ (\forall \sigma \in H)\}$, 各 $M \in \mathscr{F}(L/K)$ に対し $G^M = \{\sigma \in G \,|\, \alpha^\sigma = \alpha\ (\forall \alpha \in M)\}$ と記す. このとき $G^M = \operatorname{Gal}(L/M)$ である.

(24) Galois の基本定理 1
(23) の状況下で, $\varphi : H \mapsto L^H$ は $\mathscr{G}(G)$ から $\mathscr{F}(L/K)$ への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は $\varphi^{-1}(M) = G^M$ で与へられる.

(25) Galois の基本定理 2
(23) の状況下で, $M \in \mathscr{F}(L/K)$ について次が成り立つ.
(1) $\tau \in \operatorname{Gal}(L/K)$ に対し, $\tau \operatorname{Gal}(L/M) \tau^{-1} = \operatorname{Gal}(L/M^\tau)$.
(2) M は K の Galois 拡大 $\iff$ $\operatorname{Gal}(L/M) \lhd \operatorname{Gal}(L/K)$.
(3) (2) の両側が成り立つとき, $\operatorname{Gal}(M/K) \simeq \operatorname{Gal}(L/K) / \operatorname{Gal}(L/M)$ (群としての同型).

(26) Galois 群が巡回群である様な拡大は, 巡回拡大と呼ばれる.

(27) Galois 群が Abel 群である様な拡大は, Abel 拡大と呼ばれる.

(28) 体 K 上の Abel 拡大の合成体は K 上の Abel 拡大である.

(29) 拡大 L/K の部分体 M, M' について M/K と M'/K がともに Galois 拡大であれば, MM'/K も Galois 拡大であつて, $\operatorname{Gal}(MM'/K) \simeq \operatorname{Gal}(M/M \cap M')$ が成り立つ. 左辺の σ に対して右辺の $\sigma|_M$ が対応する.