

2024 年度 後期 定期試験 (問題 兼 解答用紙)

開講学部	評点 1	評点 2
理工学部		

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名	クラス	出題者
2	有	なし	80 分	代数学 6 <small>火曜 4 時限, 教科書: Original §12 ~ §16</small>	A, B	大西 良博
持込許可物件	所属学部	所属学科	学年	学籍番号 (9 桁)	氏名	
なし	理工学部	数学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。

注意 3. 試験場の静粛を保つために、退出は開始 60 分後の時点の一回限りとする。

注意 5.  $i$  は虚数単位で、 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$  である。その他の記号については計算用紙にある。

注意 2. 学生証、記名用のペン、鉛筆またはシャープペンシル、消しゴム以外は机の上に置かないこと。

注意 4. **6A** **6B** は選択問題である。どちらか 1 問選んで解答せよ。

**1** (10 点)  $p$  を素数,  $t$  を不定元とせよ。体  $\mathbb{F}_p(t)$  の上の非分離的拡大体を 1 つ挙げ、この体が完全体でないことを示せ。

**3** (10 点) 次の拡大は分離的であるか否か。それぞれ理由を付けて答へよ。

(1)  $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4)$       (2)  $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^4, t^6)$       (3)  $\mathbb{F}_5(t)/\mathbb{F}_5(t^6, t^9)$

**2** (10 点)  $x^2 + x + 3 \in \mathbb{F}_7[x]$  の根の 1 つを  $\alpha$  とし  $t$  を不定元として、 $K = \mathbb{F}_7(t^7)$  とおく。拡大  $\mathbb{F}_7(\alpha, t)/K$  について以下の間に答へよ。

- $\alpha^7, \alpha + \alpha^7, \alpha\alpha^7$  を  $\alpha$  の  $\mathbb{F}_7$  上の 1 次以下の多項式で表せ。
- $\alpha^{49} = \alpha$  であることを示せ。
- 最小多項式  $f(x) = \text{irr}(t + 1, K, x)$ ,  $g_1(x) = \text{irr}(t + \alpha, K(t), x)$ ,  
 $g_2(x) = \text{irr}(t + \alpha, K(\alpha), x)$ ,  
 $g(x) = \text{irr}(t + \alpha, K, x)$  を求めよ。
- $[K(t + \alpha) : K]$  と  $[K(t + \alpha) : K]_s$  はいくらか。

**4** (15 点)  $t$  を不定元とする。次の拡大は Galois 拡大であるか否か。

それぞれ理由を付けて答へよ。必要であれば  $(\mathbb{F}_{11})^\times = \langle 2 \rangle$  を用いよ。

(1)  $\mathbb{F}_{11}(t)/\mathbb{F}_{11}(t^{10})$       (2)  $\mathbb{F}_{11}(t)/\mathbb{F}_{11}(t^{11})$       (3)  $\mathbb{F}_{11}(t)/\mathbb{F}_{11}(t^5)$

学籍番号 (9桁)	氏名

5 (10点) 拡大  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})/\mathbb{Q}$  を単純拡大として生成する元を 1 つ求めよ.

6A (15点)  $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$  と  $K = \mathbb{Q}$  について, 以下の間に答へよ.

- (1)  $L/K$  が Galois 拡大であることを示せ.
- (2) 以下  $G = \text{Gal}(L/K)$  とおく.  $G$  の要素をすべて記述せよ.
- (3)  $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\omega)$  について  $G^M$  を求めよ.
- (4)  $\rho \in G$  を  $\sqrt[3]{2} \mapsto \sqrt[3]{2}\omega^2, \omega \mapsto \omega^2$  で定まる元とし,  $H$  を  $\rho$  で生成される  $G$  の部分群とせよ:  $H = \langle \rho \rangle$ . このとき  $L^H$  を求めよ.

6B (15点)  $p$  を素数,  $f(x) = x^p - x - 1 \in \mathbb{F}_p[x]$  とする.

- (1)  $f(x) = 0$  の 1 つの根を  $\alpha$  とせよ. このとき,  $\text{Aut } \mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$  は  $\alpha \mapsto \alpha + r$  ( $r = 0, 1, \dots, p-1$ ) で尽くされることを示せ.
- (2) 多項式  $f(x)$  は  $\mathbb{F}_p$  上既約であること, および  $\mathbb{F}_p(\alpha)/\mathbb{F}_p$  が Galois 拡大であることを示せ.

学籍番号 (9桁)	氏名

7 (15点)  $\mathbb{Q}$  上の多項式  $f(x) = x^4 - 10x^2 + 23$  の最小分解体を  $L$  とする. 拡大  $L/\mathbb{Q}$  の Galois 群  $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  と  $G$  の部分群のすべて, および,  $L/\mathbb{Q}$  の部分体のすべてを求め, それら包含関係と Galois の定理 1 による対応を図示せよ.

学籍番号 (9桁)	氏名

8 (15点) 次の  $\zeta \in \mathbb{C}$  について  $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$  が Galois 拡大であることを示せ. さらに,  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$  とそのすべての部分群を記述し, および, それらに対応する  $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$  の中間体を求めよ.

(1)  $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{8}$       (2)  $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{5}$       (3)  $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{12}$

## 記号

$\mathbb{N} \dots$  自然数全体,  $\mathbb{Z} \dots$  整数全体のなす環,  $\mathbb{Q} \dots$  有理数全体のなす体,  $\mathbb{F}^q \dots$   $q$  元体,  
 $\mathbb{R} \dots$  実数全体のなす体,  $\mathbb{C} \dots$  複素数全体のなす体.  $i$  は虚数単位.  $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ .

## 既習事項のまとめ

- (1) 体  $L$  の部分集合  $K$  が  $L$  の演算に関して体であるとき,  $K$  を  $L$  の 部分体. あるいは  $L$  は  $K$  の拡大といひ, この状況を体の拡大  $L/K$  と記す.
- (2) 体の拡大  $L/K$  に対して  $K$  上の vector 空間としての  $L$  の次元を  $L/K$  の拡大次数と呼び  $[L : K]$  で表す. 3つの体  $K \subset M \subset L$  について  $[L : K] = [L : M][M : K]$ .
- (3) 体の拡大  $L/K$  について, 任意の  $\alpha \in L$  がある  $f(x) \in K[x]$  の根であるとき,  $L/K$  を 代数的拡大と呼ぶ.
- (4) 体の拡大  $L/K$  について,  $[L : K] < \infty$  のとき, これを 有限次拡大と呼ぶ.
- (5) 体  $K$  が体  $M$  の部分体で,  $M$  が体  $L$  の部分体であるとき,  $M$  を  $L/K$  の 中間体と呼ぶ.
- (6) 体  $L$  とその部分体  $K$  および  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$  に対し,  $K$  のすべての元と  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  をすべてを含む最小の体を  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  と記す. これは  $K$  に係数をもつ線形  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  の有理式の全体に他ならない.
- (7) ある体  $L$  がその部分体  $K$  と  $\alpha \in L$  によつて, 上の記法で  $L = K(\alpha)$  と書けるとき,  $L$  は  $K$  の 単純拡大であるといはれる.
- (8) 2つの部分体の共通部分は再び体であるから, どんな体  $K$  についても, それに含まれる最小の体が存在する. それを素体と呼ぶ. 素体は有理数体  $\mathbb{Q}$  か  $p$  元体  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ( $p$  は素数) に同型である.
- (9) 体  $K$  の積に関する単位元  $1$  をいくつか加へて  $0$  になるとき, その最小の個数は  $K$  の 標数といはれ, それは素数である.  $1$  をいくつか加へても  $0$  にならない場合は, 標数は  $0$  であるといふ.  $K$  の標数を  $\text{char } K$  と記す. 前者の場合は素体が  $\mathbb{F}_p$  であり, 後者の場合の素体は  $\mathbb{Q}$  である.
- (10) 拡大  $L/K$  と  $\alpha \in L$  について,  $\alpha$  を根とし, 最高次係数が  $1$  であり, 次数が最小な多項式  $f(x) = K[x]$  が唯一つ存在し, それを  $\alpha$  の 最小多項式と呼んで  $\text{irr}(\alpha, K, x)$  で表す.
- (11) 拡大  $L/K$  と中間体  $M_1, M_2$  について,  $M_1$  と  $M_2$  を含む最小の部分体を  $M_1 M_2$  または  $M_2 M_1$  と書いて,  $M_1$  と  $M_2$  の合成体と呼ぶ. また, 拡大  $M_1 M_2 / M_1$  を拡大  $M_2 / K$  の  $M_1$  による持ち上げと呼ぶ.
- (12) 体  $K$  を含む体  $\Omega$  上に代数的拡大が存在しないとき,  $\Omega$  は代数的閉体といはれ, さらにもし,  $\Omega/K$  が代数的拡大であるならば  $\Omega$  は  $K$  の代数的閉包といはれる. 任意の体  $K$  に対し, その代数的閉包が存在し, すべて同型である. それを一般に  $\bar{K}$  と記す.
- (13) 多項式  $f(x) \in K[x]$  のすべての根で  $K$  上される様な体を  $f(x)$  の 最小分解体といふ.
- (14) 拡大  $L/K$  が, どんな既約多項式  $f(x) \in K[x]$  も  $L$  内に  $1$  つ根を持てば,  $f(x)$  が  $L$  上  $1$  次式のみ積に分解する, といふ性質を持つとき,  $L/K$  は 正規拡大であるといはれる.
- (15) 正規拡大の“底上げ” ( $L \supset M \supset K$  についての  $L/K$  の主張を  $L/M$  に乗り換へること) や持ち上げは正規拡大である.  
 また  $K$  上の2つの正規拡大の合成体はまた  $K$  上の正規拡大である.

## 以上が「代数学 5」の範囲.

- (16) 多項式  $f(x) \in K[x]$  が重根を持たないとき,  $f(x)$  は分離的であるといはれる. 拡大  $L/K$  において,  $\alpha \in L$  が  $K$  上の分離的多項式の根であるとき  $\alpha$  は  $K$  上分離的であるといはれ, さらに, すべての  $\alpha \in L$  が  $K$  上分離的であるとき,  $L/K$  を 分離的拡大と称する.
- (17) 分離的拡大の持ち上げは分離的拡大である. また  $K$  上の2つの分離的拡大の合成体はまた  $K$  上の分離的拡大である.
- (18) あらゆる代数的拡大  $L/K$  が分離的である様な体  $K$  は 完全体と呼ばれる. 標数が  $0$  である体や有限体は完全体である.
- (19) 代数的拡大  $L/K$  について,  $L$  から  $\bar{K}(\supset L)$  への中への  $K$  上の同型の個数を  $[L : K]_s$  と記す. さらに  $[L : K]_s = [L : K]/[L : K]_s$  と記す.  $\text{char } K = p > 0$  のとき, これは  $p$  の冪になる.
- (20) 分離的拡大は単純拡大である.
- (21) 正規かつ分離的な代数的拡大を Galois 拡大と呼ぶ.
- (22) 有限次 Galois 拡大  $L/K$  とその Galois 群  $G = \text{Gal}(L/K)$  について,  $\mathcal{F}(L/K)$  を  $L/K$  の中間体の全体,  $\mathcal{G}(G)$  を  $G$  の部分群の全体とせよ. 各  $H \in \mathcal{G}(G)$  に対し  $L^H = \{\alpha \in L \mid \alpha^g = \alpha \ (\forall g \in H)\}$ , 各  $M \in \mathcal{F}(L/K)$  に対し  $G^M = \{\sigma \in G \mid \sigma^g = \sigma \ (\forall g \in M)\}$  と記す. このとき  $G^M = \text{Gal}(L/M)$  である.
- (23) Galois の基本定理 1  
 (22) の状況下で,  $\varphi : H \rightarrow L^H$  は  $\mathcal{G}(G)$  から  $\mathcal{F}(L/K)$  への包含関係を逆転させる全単射であり, 逆写像は  $\varphi^{-1}(M) = G^M$  で与へられる.
- (24) Galois の基本定理 2  
 (22) の状況下で,  $M \in \mathcal{F}(L/K)$  について次が成り立つ.  
 (1)  $\tau \in \text{Gal}(L/K)$  に対し,  $\tau \text{Gal}(L/M)\tau^{-1} = \text{Gal}(L/M^\tau)$ .  
 (2)  $M$  は  $K$  の Galois 拡大  $\iff \text{Gal}(L/M) \triangleleft \text{Gal}(L/K)$ .  
 (3) (2) の両側が成り立つとき,  $\text{Gal}(M/K) \simeq \text{Gal}(L/K)/\text{Gal}(L/M)$  (群としての同型).
- (25) Galois 群が巡回群である様な拡大は, 巡回拡大と呼ばれる.
- (26) Galois 群が Abelian 群である様な拡大は, Abelian 拡大と呼ばれる.
- (27) 体  $K$  上の Abelian 拡大の合成体は  $K$  上の Abelian 拡大である.
- (28) 拡大  $L/K$  の部分体  $M, M'$  について  $M/K$  と  $M'/K$  がともに Galois 拡大であれば,  $MM'/K$  も Galois 拡大であつて,  $\text{Gal}(MM'/K) \simeq \text{Gal}(M/M) \times \text{Gal}(M'/M)$  が成り立つ. 左辺の  $\sigma$  に対して右辺の  $\sigma|_M$  が対応する.