

2024年度 前期中間試験 (問題兼解答用紙)

開講学部	評点小計
理工学部	

評点

問題枚数	両面印刷	別紙解答用紙	試験時間	試験科目名		出題者
1/6	有	なし	80分	計算機科学7 <small>水曜1時限, 教科書: Original</small>		大西良博
持込許可物	所属学部	所属学科	学年	クラス	学籍番号(9桁)	氏名
なし	理工学部	学科	年			

注意 1. 最終的な答に至る途中の説明をできるだけ詳しく書くこと。最終結果だけでは得点できない。
 注意 2. 途中退出し試験を完了できるのは 10:10 の時点のみとする。

1 (20点) 検査行列 H が

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(4, 2, \mathbb{F}_3)$$

で与えられる \mathbb{F}_3 上の線形符号 $C \subset \mathbb{F}_3^{-4}$ について, 次の (1) ~ (3) に答へよ。

- (1) C の生成行列 G および C の符号語をすべて求めよ。
- (2) C の最小距離 d を求めよ。
- (3) C の標準配列および対応する syndromes を表に表せ。

解 (1) 方程式 $H^t x = 0$ の解空間が C であり, その基底を行 vectors とする行列が G であつて

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(4, 2, \mathbb{F}_3).$$

(2) H に対して, **定理 5.1** を使ふと $d = 2$ であることがわかる。

第 3 列を 2 倍すると第 4 列に一致することに注意。

別解 **命題 3.10** (2024年6月6日付けの text) による。つまり C の 0 以外の元 (9 個) の重さ $\omega(w)$ を見れば, それらはすべて 2 以上である。よつて, 答は 2。

(3) $G = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ とすれば, 以下の様になる: **未完**

e	$e + a$	$e + 2a$	$e + b$	$e + 2b$	$e + a + b$	$e + 2a + b$	$e + a + 2b$	$e + 2a + 2b$	$e^t H$
0000	1210	2120	2101	1202	0011	1221	2112	0022	00
0001	1211	2121							22
0002	1212	2122							11
0010	1220	2100							21
0020	1200	2110							12
0100	1010	2220							01
0200	1110	2020							02
1000	2210	0120							10
2000	0210	1120							20

e coset leaders

$e^t H$ syndrome

この表 (標準配列) の作り方

Coset leaders の Hamming 重さなるべく小さくなる様にしてみた。

そのためには, 第 1 列に Hamming 重さ 1 の 0001, 0001, 0010, 0020, 0100, 0200, 1000, 2000 を入れて syndrome を計算する。この場合は, 0000 とこの 8 個とで丁度 syndromes のすべてが現れる。

2 (20 点) 次の行列 G は (7, 4) Hamming 符号の生成行列である.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(但し, ここでは巡回符号として記述してある.) これについて以下に答へよ.

- (1) $[1101]$ を符号化せよ.
- (2) 検査行列 H を簡約化された形で求めよ.
- (3) $[1111011]$, $[1100011]$ を元語化せよ.

解. (1)

$$[1101]G = [1010001] \dots \text{Ans.}$$

(2) G を反転簡約化すると

$$G' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

よつて, 検査行列は,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である. これは簡約化されてゐる.

(3) Syndrome を計算すると

$$e = H^t[1111011] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるが, これは H の第 5 列に他ならないから, その修正を入れて

$$e = [1111011] - [0000100] = [1111111]$$

と復号される. これの元語化 $[x y z w]$ とは

$$(*) \quad [x y z w]G = [1111111]$$

を満たすものことであるから, これを解けばよい. まづ G の第 1, 6, 7 列に対応する成分に注目して,

$$x = 1, \quad z = 1, \quad w = 1$$

である. さらに G の第 2 列に対応する成分を見れば

$$1 + y = 1$$

から $y = 0$ である. つまり元語化は $[1 \ 0 \ 1 \ 1]$ である. もう一つについても

$$e = H^t[1100011] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

から, 正しい符号語は

$$[1100011] - [1000000] = [0100011]$$

である. こちらに元語化についても, 同様に考へて

$$[0 \ y \ 1 \ 1]$$

の形であるが, やはり, G の第 2 列を見ることで $y = 1$ がわかり $[0 \ 1 \ 1 \ 1]$ が元語化である.

3 (15 点) $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_{2^2} = \mathbb{F}_2[\alpha] = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\}$ (但し $\alpha^2 = 1 + \alpha$) 上の検査行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 + \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(2, 4, \mathbb{F}_4)$$

で定義される線形符号 C に対し,

- (1) C の最小距離 $d(C)$ を求めよ.
- (2) C が 1 誤り訂正符号であることを示せ.
- (3) C の生成行列を反転簡約行列の形で求めよ. それを G とする.
- (4) 通報 $[1 \ \alpha]$ を符号化せよ.
- (5) C が 1 誤り訂正符号であることを踏まへて, 受信語 $[1 \ 1 \ \alpha \ 1]$ を元語化せよ.

解

- (1) どの 2 列も 1 次独立で, どの 3 列も 1 次従属なので, $d(C) = 3$.
- (2) $d(C) = 2t + 1$ なる最大の t は 1 なので 1 誤り符号である.
- (3) まず, H を簡約化する:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 + \alpha & \alpha & 1 & 1 & \\ \alpha & 1 + \alpha & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ \alpha & 1 + \alpha & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \textcircled{2} - \textcircled{1} \times \alpha \\ \hline 1 & 0 & 1 + \alpha & 1 & \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \end{array}$$

よつて

$$G = \begin{bmatrix} 1 + \alpha & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \quad [1 \ \alpha]G = [1 \ 0 \ 1 \ \alpha].$$

(5) 与へられた受信語の syndrome は

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}.$$

この syndrome を持つ様な 1 誤りは

$$[0 \ 0 \ \alpha \ 0]$$

に他ならない. よつて求める復号は

$$[1 \ 1 \ \alpha \ 1] + [0 \ 0 \ \alpha \ 0] = [1 \ 1 \ 0 \ 1].$$

この元語化 $[x \ y]$ は

$$[x \ y]G = [1 \ 1 \ 0 \ 1]$$

を解けばよく, $[x \ y] = [0 \ 1]$ である. □

4 (15 点) $\mathbb{F}_3[x]/(x^8 - 1)$ の ideals を全て求めよ.

(Hint: $x(x^8 - 1) = x^9 - x$ の分解体は \mathbb{F}_3 の 2 次拡大であるから, 既約因数 (式) の次数は 2 の約数.)

解 その様な ideal は $x^8 - 1$ の約数を生成元とするので, \mathbb{F}_3 上で $x^8 - 1$ を因数分解してみると

$$x^8 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1).$$

ここで, さらに $x^4 + 1$ を因数分解するために monic な既約 2 次式を探すと

$$x^2 + x + 2, \quad x^2 + 2x + 2$$

の 2 つしかなく, $x^8 - 1$ は重根を持たないから (微分すればわかる),

$$x^8 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

が $x^8 - 1$ の素因数分解である. よつて求める ideals は,

$$(x - 1)^a(x + 1)^b(x^2 + 1)^c(x^2 + x + 2)^d(x^2 + 2x + 2)^e$$

を生成元とする. ここに $a, b, c, d, e \in \{0, 1\}$ である. その様な多項式を生成元とする ideals は 32 個 ある. □

5 (15 点) $g(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 \in \mathbb{F}_3[x]$ は周期 10 の多項式である.

(つまり $g(x)|x^n - 1$ なる最小の $n \in \mathbb{N}$ は 10).

これの生成する巡回符号 $C \subset \mathbb{F}_3^{-10}$, つまり

$$\mathbb{F}_3 g(x) + \mathbb{F}_3 xg(x) + \cdots + \mathbb{F}_3 x^5 g(x)$$

の係数を昇冪の順に拾つてできる \mathbb{F}_3^{-10} 内の vectors の全体のなす部分空間, について以下に答へよ.

- (1) C の検査多項式 $h(x)$ を求めよ.
- (2) $\mathbf{u} = [0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 2]$ は符号語であるか否か. 理由を付けて答えよ.
- (3) $\mathbf{v} = [0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0]$ は符号語であるか否か. 理由を付けて答えよ.

略解. (1)

$$h(x) = 2 + 2x + x^5 + x^6.$$

(2) \mathbf{u} に対応する多項式 $u(x) = x + 2x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 2x^9$ について

$$u(x)/g(x) = x + 2x^4 + 2x^5$$

と割り切れるので \mathbf{u} は符号語である.

(3) \mathbf{v} に対応する多項式 $v(x) = 2x + x^7$ について

$$v(x) \equiv 2x + 2x^2 \pmod{g(x)}$$

であり $g(x) \nmid v(x)$ であるから \mathbf{v} は符号語ではない.

6 (15 点) 次の行列 G を生成行列とする \mathbb{F}_3 上の線形符号 $C \subset \mathbb{F}_3^{-11}$ は巡回符号である.

$$G = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{Mat}(6, 11, \mathbb{F}_3).$$

これについて以下に答へよ.

- (1) 生成多項式 $g(x)$ を記せ.
- (2) 検査多項式 $h(x)$ を記せ.
- (3) $g_0 + 2g_5^\sigma$ を g_0, \dots, g_5 の \mathbb{F}_3 上の 1 次結合で表せ. (σ は右 shift を意味する)

略解. (以下すべて \mathbb{F}_3 上での計算である.)

(1)

$$g(x) = 2 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^5.$$

(2)

$$h(x) = \frac{x^{11} - 1}{g(x)} = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 + x^6.$$

(3) $g_0 + 2g_5^\sigma$ は $\text{rep}(, x)$ で $(1 + 2x^6)g \bmod (x^{11} - 1)$ に対応するのであるが,

$$x^6 = h(x) - (1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)$$

を使つて x^6 より次数の高い項を消去すれば

$$\begin{aligned} 1 + 2x^6 &= 1 - 2(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4) \bmod h(x) \\ &= 2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \bmod h(x) \end{aligned}$$

であるから $(2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)g(x)$ に対応する. ゆゑに,

$$(1 + 2x^6)g(x) \equiv (2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)g(x) \bmod h(x)g(x), \text{ つまり,}$$

$$(1 + 2x^6)g(x) \equiv (2 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)g(x) \bmod (x^{11} - 1).$$

ゆゑに

$$g_0 + 2g_5^\sigma = 2g_0 + 2g_1 + 2g_2 + 2g_3 + 1g_4 + 0g_5$$

である.